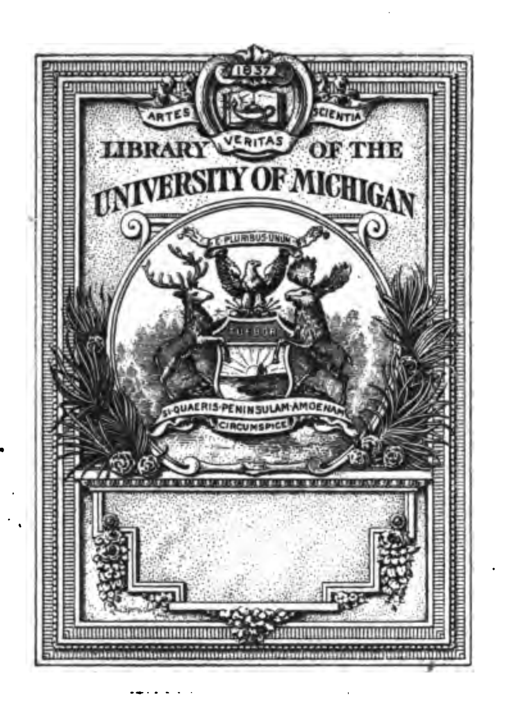
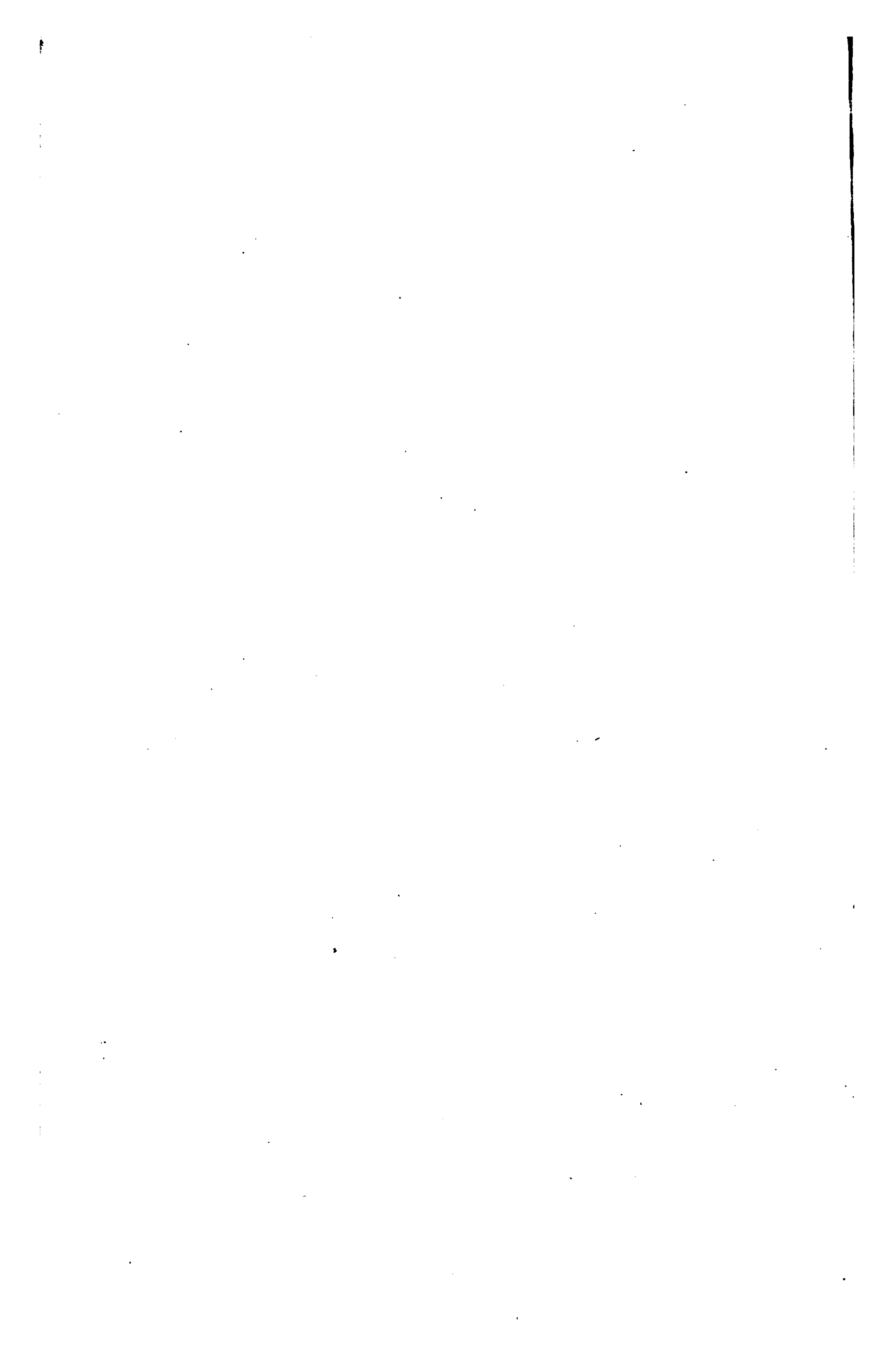



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



ANALYTISCHE

GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE

MIT BESONDERER

BERÜCKSICHTIGUNG DER NEUEREN METHODEN.

NACH

GEORGE SALMON

FREI BEARBEITET

VON

DR. WILHELM FIEDLER,

PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNICUM ZU ZÜRICH.

FÜNFTE UMGEARBEITETE AUFLAGE.

ERSTER TEIL.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1887.

Vorrede.

Als ich (1858) die Bearbeitung von *George Salmon's* schon berühmtem Werke „*A Treatise on Conic Sections*“ unternahm, sah ich den Grund seines seltenen Erfolges (1848 zuerst erschienen, folgte 1855 bereits die 3. Auflage) in der lichtvollen Darstellung derjenigen neueren Methoden, durch welche die analytische Geometrie über das Coordinatensystem des Cartesius hinausgeführt und dann immer mehr zu einer selbständigen Wissenschaft entwickelt worden ist. Dasselbe erschien mir als ein erster und zugleich wohlgelungener Versuch zur Lösung der wichtigen und zeitgemäfsen, ja drängenden Aufgabe, *in einem Buch von mäfsigem Umfang von den Elementen zu dem gegenwärtigen Standpunkt der wissenschaftlichen Arbeit hinzuführen.* Nach meiner besonderen Auffassung dieser Aufgabe und des Verhältnisses deutscher Studirender zu ihr wagte ich zugleich mit Billigung und unter freundschaftlicher Förderung des Verfassers eine Reihe von Veränderungen und Erweiterungen, insbesondere die Einführung des Systems der trimetrischen Liniencoordinaten und die des wichtigen Instruments der Determinanten; denn nur dadurch schien mir das Buch jenem Zweck der Einführung in den gegenwärtigen wissenschaftlichen Stand der analytischen Geometrie für deutsche Leser ganz entsprechen zu können. So erschien das Buch in deutscher Sprache 1860.

In der zweiten Auflage (1866) habe ich sodann tiefergreifende Umgestaltungen einesteils in den ersten Kapiteln im Anschlufs an die 4. und 5. Auflage des Originals, anderenteils nach eigenem Plan vorgenommen, die im wesentlichen festgehalten worden sind. Die projectivischen Eigenschaften wurden mehr systematisch entwickelt; die Anwendungen der Invariantentheorie auf die Hauptaxentransformation, auf die Charaktere der individuellen Kegelschnitte, die Bestimmung der Brennpunkte, etc. als Vorbereitungen zur analytischen Theorie der Metrik dargestellt und mit der Betrachtung der linearen Substitutionen unter dem Gesichtspunkt der geometrischen Verwandtschaften verbunden. Die speciellen Methoden der reciproken Polaren und der Projection schlossen sich an. Auf den Zusammenhang, in welchem die analytische Be-

gründung der Geometrie des Maſses in diesem Entwickelungsgang erscheint, glaubte ich besonderes Gewicht legen zu dürfen; denn die analytische Untersuchung in allgemeinster Form giebt statt der analytischen Behandlung gewisser Teile der Geometrie ein System der analytischen Geometrie erst dadurch, daſs sie auch die Entwickelung dieser durch die Elemente längst bekannten und scheinbar endgültig erledigten metrischen Grundbegriffe als ihre Consequenzen und zugleich als Specialisirungen der wahrhaft allgemeinen Anschauungen nachweist. Auch die groſsen Principien der Dualität und Continuität erhalten von da aus neues Licht.

Mit der 6. Auflage (1879) ward das Original stereotypirt.

Für die deutsche 5. neue Ausgabe, die die fortdauernde Gunst des wissenschaftlichen Publikums gefordert hat, erschien mir die systematische Einführung des Imaginären nach seiner geometrischen Darstellbarkeit und Bestimmtheit als ein notwendiger Fortschritt. Die Ausführung desselben und die der damit zum Teil verbundenen Neuordnung des Materials, deren völliges Gelingen nicht ohne lange und stetige Arbeit möglich war, verdanke ich meinem Sohn Dr. *Ernst Wilhelm Fiedler* und freue mich der Hoffnung, daſs die Sorgfalt, mit der er sie vollzogen hat, die verdiente Würdigung finden werde.

Die imaginären Punkte kommen im ersten, die imaginären Geraden im zweiten Kapitel zur elementaren Behandlung, das Princip der Dualität tritt im vierten vollständig hervor und mit der Projectivität und Collineation im fünften Kapitel werden auch für die imaginären Elemente die allgemeinen Bestimmungen gewonnen.

Die neue Auflage wird in zwei Teilen ausgegeben, von denen der erste, mehr elementare, hier vorliegt. Durch * sind die Abschnitte bezeichnet, die beim ersten Studium übergangen werden können. Den Bedürfnissen weiterer Studien aber habe ich durch die bis auf die neueste Zeit fortgeführten angehängten Literatur-Nachweisungen zu entsprechen gesucht.

Dem zweiten Teil wird ein das Ganze umfassendes alphabetisches Sachenregister beigegeben werden.

Damit empfehle ich von neuem diese Arbeit der Beachtung des mathematischen Publikums und wünsche, daſs sie ihren Teil auch ferner beitrage zur Verbreitung und Entwickelung der analytischen Geometrie.

Zürich-Hottingen, im Juli 1887.

Dr. Wilhelm Fiedler.

Inhaltsverzeichnis.

I. Kapitel. § 1—17. 29 Beisp.

Der Coordinatenbegriff und der Punkt.

II. Kapitel. § 18—44. 62 Beisp.

Der Gleichungsbegriff und die Gerade.

III. Kapitel. § 45—60. 66 Beisp.

Aufgaben über Gerade und Linienpaare.

IV. Kapitel. § 61—79. 29 Beisp.

Symbolische Gleichungen und duale homogene Coordinaten.

*V. Kapitel. § 80—100. 20 Beisp.

Von der Projectivität und den collinearen Gebilden.

VI. Kapitel. § 101—118. 56 Beisp.

Der Kreis.

VII. Kapitel. § 119—140. 55 Beisp.

Systeme von Kreisen.

VIII. Kapitel. § 141—163. 13 Beisp.

Haupteigenschaften der Curven zweiten Grades.

IX. Kapitel. § 164—189. 59 Beisp.

Die Centraleigenschaften von Ellipse und Hyperbel.

X. Kapitel. § 190—210. 58 Beisp.

Die Focaleigenschaften von Ellipse und Hyperbel.

XI. Kapitel. § 211—229. 22 Beisp.

Die Parabel.

XII. Kapitel. § 230—250. 33 Beisp.

Specielle Beziehungen zweier Kegelschnitte.

XIII. Kapitel. § 251—267.

Die Methode des Unendlich-Kleinen.

Literatur-Nachweisungen.

A. Kap. I — V. Punkt und Gerade. Coordinatentheorie und Projectivität.

1) § 1, p. 1. Vergl. „Historische Bemerkungen" von *R. Baltzer* (III) in den Berichten der mathem.-physik. Classe der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. 1865. Neuestens *S. Günther* „Die Anfänge und Entwickelungsstadien des Coordinatenprincips" in den „Abhandlungen der Naturforsch. Gesellsch. zu Nürnberg" VI. Bd. 50 p. 8. Überdies aber wegen der Art, wie die antike Darstellungsform der Lehre von den Kegelschnitten eine geometrische Algebra bilde und als solche verwendet worden sei, so dafs sie einer Umwandlung in analytische Geometrie fähig war, das schöne Werk von *Zeuthen* „Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum", Kopenh. 1886—7 (511 p. 8°).

2) § 4, p. 5. Die eindeutige Definition einer Strecke, eines Winkels u. s. w. oder die Durchführung des Princips der Zeichen in der Geometrie verdankt man *Möbius* „Der barycentrische Calcul" 1827 („Werke" Bd. I. 1885.) Siehe §§ 1, 17, 19, 165 Anm.

3) § 17, p. 25 u. § 43, p. 64. *v. Staudt* begründete die Lehre von den imaginären Elementen der Geometrie in seinem Werke „Beiträge zur Geometrie der Lage" (1856—1860); eine analytische Darstellung davon gab *Stolz* in Bd. 4 der „Mathem. Annalen" p. 416f. (1871). Die hier vorliegende ist unabhängig davon entstanden.

4) § 61, p. 98. Vergl. *Plücker,* „Analytisch-geom. Entwickelungen". 2 Bde., 1828.

5) § 64, p. 104. Vergl. das Kap. „Die geometrischen Netze" in *Möbius'* „Barycentr. Calcul" p. 266—282. („Werke" I. p. 237f.)

6) § 64, 4. p. 106. Dieser wichtige Satz ist von *Desargues.* Vergl. „Oeuvres *de Desargues*" p. Poudra. Paris 1864. I, p. 413, 430.

7) § 77, p. 120. Das Coordinatensystem des barycentrischen Calculs von *Möbius ist das erste Beispiel eines Coordinatensystems der geraden Linie überhaupt* (1827), *eines trimetrischen insbesondere.* Die vollständige Entwickelung des Gedankens von Coordinatensystemen der geraden Linie ist das Verdienst von *Plücker.* Siehe „Analytisch-geometrische Entwickelungen", Bd. 2, (1831) und spätere Schriften. Durch dieselben wurden die wahren analytischen Ausdrucksformen für die Lehren *Steiner's* gefunden, welche den fruchtbaren und doch sich scheinbar widerstreitenden Methoden von *Poncelet* und *Gergonne* ihre wahre Grundlage und höhere Vereinigung gegeben hatten.

8) § 79, p. 131. Das Princip der Dualität ward nach *Poncelet's* Vorarbeiten von *Gergonne* ausgesprochen und von *Plücker* zuerst auf analytische Basis gestellt. *Steiner* hat es dann als eine *Folge* der einfachsten Beziehungen der von ihm aufgestellten Grundgebilde (Punktreihen und Strahlbüschel) geometrisch erwiesen, welche in ihrer analytischen Ausdrucksform auch in unserem Text dazu geführt haben.

9) § 80, p. 133. Der Ausdruck Doppelverhältnis oder Doppelschnittverhältnis ward von *Möbius* in „Der barycentrische Calcul" 1827 eingeführt. Später ist der Ausdruck

$$k : k' = \sin AOP \,.\, \sin P'OB : \sin AOP' \,.\, \sin P'OB$$

die anharmonische Function oder das anharmonische Verhältnis genannt worden, und diese Bezeichnung von *Chasles* hat grofse Verbreitung gefunden, obwohl sie nicht glücklich ist. *Chasles* hat im „Traité

de géométrie supérieure" 1852 die Entwickelung einer Planimetrie auf Grundlage des anharmonischen Verhältnisses begonnen. Aber schon *Steiner* hat seine fundamentale Bedeutung für die *ganze* Geometrie entwickelt in dem Werke: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander". 1832. („Werke" I, 1881. p. 229f.)

10) § 80, p. 134. *v. Staudt* hat die harmonischen Gebilde zur Grundlage der Projectivitätstheorie und der reinen Geometrie gemacht. Vergl. seine „Geometrie der Lage" (§ 8, p. 73) 1847.

11) § 81, p. 135. Vergl. *Pappus* „Collectiones mathem." VII, 129.

12) § 84, p. 141. Für die folgende Entwickelung der projectivischen Coordinaten vergl. man des Herausgebers „Darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage", Leipzig 1871, p. 507f. und die Literaturnotizen daselbst.

13) § 86, p. 148. Die algebraische Abkürzungs-Symbolik ist im engsten Zusammenhang mit *Cayley's* Methode der Operations-Symbole („Crelle's Journal" Bd. 34 u. s. w.); sie wurde in der hier gebrauchten Bezeichnung durchgeführt von *Aronhold* in der Abhandlung über die cubischen ternären Formen (a. a. O. Bd. 55) und besonders erfolgreich entwickelt und angewandt von *Clebsch* (ibid. Bd. 59 u. s. w.). Vergl. in „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen" von *G. Salmon* in meiner deutschen Bearbeitung (2. Aufl.) die XIV.

14) § 89, p. 158. Der Ausdruck Collineation ist von *Möbius*: „Der barycentr. Calcul", p. 301f., p. XIf. der Vorrede; der Name Homologie von *Poncelet* in dem Werk „Traité des propriétés projectives des figures", 1822, Art. 297f. Für die geometrische Theorie vergl. man in *Möbius'* Werk den 2. Abschnitt p. 181—308 („Werke" I. p. 266f.).

15) § 91, p. 161. Für die vollständige geometrische Deutung der Coefficienten der linearen Substitution in § 90 und für die Ableitung der allgemeinen Transformation der Coordinaten in § 91 vergl. man des Herausgebers „Darstellende Geometrie" 2. Aufl. §§ 152, 153 und die entsprechenden Noten, resp. 3. Aufl. Bd. III.

16) § 96, 1. p. 179. Vergl. *Chasles* „Traité de géom. sup." (1852) Cap. 33; *Möbius* in den Berichten der math.-physik. Classe der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. von 1858 („Werke" II, p. 331f.) und *Cayley* in den „Annali di Matem." Bd. 1 von 1863. Die hier gegebene Darstellung wurzelt in dem Gedanken der Cyklographie.

B. Kap. VI—XIII. Die Kegelschnitte, insbesondere der Kreis und die Methode des Unendlich-Kleinen.

17) § 104, 4. p. 201. Die hier angewendete Methode der Untersuchung stammt von *Cayley*.

18) § 110, p. 210. Diese rührt von *Burnside* her.

19) § 113, 5. p. 216. Vergl. „Cambridge Mathem. Journ." Bd. 1, p. 169.

20) § 113, 6. p. 218. Zuerst in „Nouvelles Annales de Mathém." Bd. 23, p. 414. Sodann ibid. Bd. 32, p. 71.

21) § 114, p. 218. Den Namen Potenz bei Kreisen gebrauchte zuerst *J. Steiner* in „Crelle's Journal" Bd. 1, p. 164f. in einer für die Einsicht von der Nützlichkeit des Begriffes durchschlagenden Abhandlung. Aus ihr stammt auch die Auffassung der Berührung als Specialfall von dem Schneiden unter bestimmtem Winkel und die Aufstellung der bezüglichen Aufgaben. („Werke" I. p. 19f.)

22) § 119, p. 228. Radical-Axe von *Gaultier*, „Journ. de l'école polyt." Bd. 16, 1813. Chordale von *Plücker*, „Analyt.-geometr. Entwickelungen" Bd. 1, p. 93.

23) § 122, p. 234. Siehe *Plücker* „Analytisch-geometrische Entwickelungen", Bd. 1, Nr. 101, 137f.

24) § 123, p. 235. Die Erweiterung des Potenzbegriffes von Punkt und Kreis auf zwei beliebige Kreise findet man bei *Darboux* „Annales de l'École normale supérieure" Bd. 1, 1872 p. 323f. und bei *Clifford* in der Note „On the Powers of Spheres" (1868?), siehe „Mathematical Papers of *W. K. Clifford*". London 1882. p. 332 u. p. 546.

25) § 126, p. 240. Vergl. *Poncelet's* „Traité des propriétés projectives de figures", p. 41, wo überhaupt die Theorie der Kreisbüschel ihre erste vollere Ausbildung erfuhr. Man vergl. noch *Casey* im „Quarterly Journ. of Mathem." Bd. 5, p. 43, 118. Bei *Poncelet* ward auch die Lehre von den Ähnlichkeitspunkten (§§ 130f., 243) weiter geführt.

26) § 130, 4. p. 251. Vergl. *J. Steiner* in Bd. 45 von „Crelle's Journ." p. 197. („Werke" II, p. 455.)

27) § 133, p. 255. Diese Lösung rührt von *Gergonne* her. „Annales des Mathém." Bd. 7, p. 289.

28) § 136, p. 263. Der Begriff potenzhaltender Punkte ward durch *J. Steiner* in der unter 21) genannten Abhandlung eingeführt („Werke" I, p. 33) und ohne Zweifel schöpfte er daraus auch die Theorie der Inversion.

29) § 137, p. 265. Zuerst bei *Plücker* „Analytisch-geometrische Entwickelungen" 1828. I. Nr. 184 „Crelle's Journ." Bd. XI, p. 219f., datirt 1831, obschon durch *J. Steiner's* potenzhaltende und *Poncelet's* invers liegende Punkte vorbereitet. Als Princip der elektrischen Bilder entdeckte *W. Thomson* „Journal des Mathém." t. X, p. 364 das Princip der reciproken Radien von Neuem 1845 und *Liouville* behandelte es im XII. Bd. seines „Journal" allgemein.

30) § 139, p. 269. Für das Allgemeine: *Gauss* „Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird". Altona 1825. („Werke" IV, p. 189—216.)

31) § 140, p. 272. Diese Lösung gab *Casey* in der „Royal Irish Academy" im April 1866; einen allgemeinen Satz derselbe in „Hermathena" Bd. 3, p. 279f. (Dublin 1879.)

32) § 140, 1. p. 272. Eine Untersuchung von *Cayley* „Cambridge and Dublin Mathem. Journal" II, p. 270.

33) § 140, 3. p. 274. Vergl. die neueren Abhandlungen von *Darboux* („Annales de l'école normale" 2. Sér. t. 1, p. 323—392) und von *Frobenius* („Crelle's Journal" Bd. 79, p. 185).

34) § 168, p. 311. Diese Methode gab *Boole* im „Cambridge Math. Journ." Bd. 3, p. 106, und 2. Serie Bd. 6, p. 87.

35) § 173, p. 316. Vergl. *O'Brien*, „Cambridge Math. Journ." Bd. 4, p. 99.

36) § 174, p. 317. Vergl. *O'Brien's* „Coordin. Geom.", p. 112.

37) § 179, p. 323. Diese Vervollständigung der Beziehungen zwischen der gleichseitigen Hyperbel und dem Kreis gab ich in der „Cyklographie" in anderer Form.

38) § 179, p. 323. Für Aufg. 2 siehe *Brianchon, Poncelet* in „Gergonne's Annal." Bd. 11, p. 205.

39) Ibidem für Aufg. 4, p. 323 siehe a. a. O., p. 210.

40) § 183, 7. p. 331. Die Formeln der Aufg. 7 gab *Mac Cullagh* „Dublin. Exam. Papers" 1836, p. 22. ibid. 9) vergl. *Turner* „Cambr. and Dublin Math. Journ. Bd. 1, p. 122.

41) § 195, p. 351. Man vergl. *J. Steiner's* Abhandlung „Crelle's Journ." Bd. 37, p. 161 („Werke" II, p. 391f.) und dazu die Arbeit des Herausgebers, „Acta Mathemat." Bd. 5, 331f. (besonders § 31f.), in welcher der Zusammenhang dieser Lehren mit den Eigenschaften der linearen Kreissysteme vollständig entwickelt ist.

42) § 197, p. 352. Vergl. *O'Brien's* „Coordinate Geometry" p. 85.

43) § 202, p. 358. Die Sätze in Aufg. 1 bis 5 sind von *W. D. Sadleir.*

44) § 204, p. 361. *O'Brien* a. a. O. p. 156.

45) § 206, p. 364. Siehe *Pappus,* „Mathem. Collect." Buch VII. Der letzte (238.) Satz dieses Buches ist auch der Satz des Art. 196, welchen Apollonius noch nicht hat.

46) § 208, p. 366. Den Satz in Aufg. 4 gab *Frost,* „Cambridge and Dublin Math. Journ." Bd. 1, p. 68. Vergl. *Hittorf* in „Crelle's Journ." Bd. 38, p. 89.

47) § 208, 5. p. 366. Für diese Gleichung siehe *Davies'* „Philosoph. Magazine" 1842, p. 192.

48) § 208, p. 366. Der Beweis in Aufg. 7 rührt von *Mac Cullagh* her.

49) § 208, p. 367. Der in Aufg. 9 von *Larrose* „Nouvelles Annal." Bd. 19, p. 85.

50) § 208, p. 368. Die Gleichung der Aufg. 14 gab *M. Roberts.*

51) § 208, p. 369. Das Beisp. 15 rührt von *Burnside* her.

52) § 208, 17 Schlufs, p. 369. Für weitere Ausführung vergleiche die Note von *Eckardt* in Bd. 18 der „Zeitschrift f. Math. u. Phys." p. 106.

53) § 210, p. 373. Beisp. 2) vergl. *Wolstenholme's* „Mathemat. Problems" 2. Ed. p. 189.

54) § 220, p. 384. Den Satz der Aufg. 3 gab *Gregory,* „Cambridge Math. Journ." Bd. 2, p. 16.

55) § 228, p. 390. Vergl. *O'Brien* p. 156.

56) § 228, 1. p. 391. Vergl. *Steiner* in „Gergonne's Annal." Bd. 19, p. 59. („Werke" I, p. 207.)

57) § 235, p. 400. Diese Construction gab *J. Steiner* „Crelle's Journal", Bd. 30, p. 271. (Siehe „Werke" II, 341.)

58) § 236, 1. p. 401. Vergl. *Joachimsthal* „Crelle's Journ." Bd. 36, p. 95.

59) § 236, 2. p. 401. Die diese Sehne betreffenden Aufgaben sind neuerdings gestellt und behandelt worden in Bd. 31, p. 192, 336 und den folgenden Bänden der „Nouvelles Annales". (Vergl. auch Bd. 10 des „Giornale di Matematiche" p. 320.) Die Enveloppe der Sehne TL für alle Punkte des Kegelschnittes ist ein sehr specieller Fall von der in Art. 85, Aufg. 3 der „Anal. Geom. der höheren ebenen Curven" von *Salmon-Fiedler* (Leipzig 1873) bestimmten.

60) § 236, 4. p. 402. Vergl. *Steiner* „Crelle's Journ." Bd. 32, p. 100 („Werke" II, p. 377); und *Joachimsthal* an dem bei 58) a. O.

61) nicht 54) § 248, p. 415. Der Satz in 6 ist von *Burnside.*

62) statt 61) § 262, p. 428. Die Untersuchung über die Focalsehne verdankt der Autor *Townsend.*

63) statt 62) § 265, p. 430. Dieser Satz ist von *Graves.* Vergl. dessen Übersetzung von *Chasles'* „On cones and spherical conics" p. 77. Aber schon bei *Leibnitz* „Commercium Epistolicum" in dem Briefe vom 3. Jan. 1704 an Joh. Bernoulli findet sich ein sehr allgemeiner Satz.

64) statt 63) § 266, p. 431. Dieser allgemeinere Satz ward zuerst von *Mac Cullagh* in „Dublin Exam. Papers" 1841, p. 41; 1842, p. 68, 83; dann von *Chasles* „Compt. rendus" Bd. 17, p. 838 gegeben. Vergl. *de Jonquière's* „Mélanges de géométrie pure" p. 55 f.

65) statt 64) § 266, p. 431. Zur Ausdehnung des Satzes auf Hyperbel und Parabel vergl. *Azarelli* „Atti dell Acad. Pontif. Rom." Bd. 21, 1871.

66) statt 65) § 267, p. 432. Diesen Beweis gab *Hart* „Cambr. and Dubl. Math. Journ." Bd. 4, p. 193.

Verzeichnis bemerkter Druckfehler.

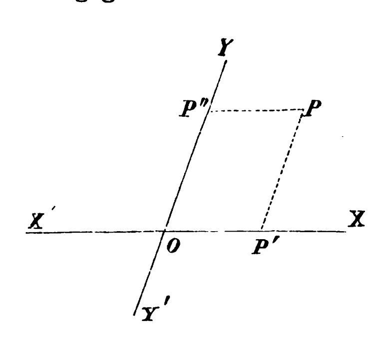
Seite	
52	B. 7) Zeile 1 lies $-x_3 \mid 0$ statt $x_3 \mid 0$.
88	Zeile 15 von oben lies $\pm l(x-a)^n$.
89	Zeile 5 von oben lies $-2\frac{B}{C}$, $m_1 m_2 = \frac{A}{C}$.
103	Zeile 1 von oben lies $a_2\, a_1' s_1$.
115	Zeile 15 von unten lies der äufserlich ein —.
119	Überschrift lies Cartesische.
174	Zeile 17 von unten lies δ statt D.
211	Überschrift lies Der Kreis in.
244	B. 3) Zeile 5 lies § 125.
284	Zeile 10 von oben lies $a_{11}\, x^2$.
323	B. 4) Zeile 3 lies § 155.
331	B. 9) Streiche die Nummer am Schlufs.
341	B. 5) Zeile 4 lies § 48.
366	B. 7) Zeile 5 lies § 204.
367	B. 10) Zeile 3 lies den anderen.
414	B. 6) Die Nummer am Schlufs lies 61). Vor 248 fehlt der *. Die Nummern der Literatur-Noten auf Bogen 27 müssen um 1 höher sein.
430	Zeile 18 von unten lies Denken wir von.

Erstes Kapitel.

Der Coordinatenbegriff und der Punkt.

1. **Parallelcoordinaten.** Zur Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene ward von Fermat und Descartes (Cartesius)[1]) folgende Methode eingeführt und in der Folge durch die Geometer allgemein gebraucht.

Man nimmt an, dafs die Lage von zwei geraden Linien oder *Axen* $X'X$, $Y'Y$, welche sich im Punkte O schneiden, fest gegeben sei. Wenn man dann durch einen Punkt P ihrer Ebene die Geraden $P'P$, $P''P$ bez. parallel zu $Y'Y$, $X'X$ zieht, so nennt man P', *bez.* P'' *die Projection des Punktes* P *auf die Axe* $X'X$, *bez.* $Y'Y$. Man erfährt aus der Lage des Punktes P die Längen $P''P$, $P'P$ und kann sie auf den Axen durch die bez. gleichen Längen OP', OP'' messen.



Umgekehrt ist durch die Projectionen P', P'' der Punkt P *eindeutig* bestimmt, als die freie Ecke des aus den Seiten OP', OP'' gebildeten Parallelogramms. *Die Ortsbestimmung von* P *in der Ebene erfordert also nur die Angabe der Projectionen* P', P'' *in zwei festen Geraden.*

Es ist üblich, für die allgemeine Mafszahl einer in der Axe $X'X$ gemessenen Länge OP' das Zeichen x, für OP'' in der Axe $Y'Y$ das Zeichen y zu brauchen. Die Längeneinheit mufs dazu angegeben oder ein für alle mal willkür-

lich fixirt sein. Ist nun $P''P = a$, $P'P = b$, so können wir dies ausdrücken durch die Gleichungen $x = a$, $y = b$.

2. Die Parallelen $P''P$, $P'P$ werden die *Coordinaten des Punktes* P genannt, die Parallele zur Axe $X'X$ insbesondere die *Abscisse*, die Parallele zur Axe $Y'Y$ die *Ordinate* von P. Die festen Axen heifsen *Coordinatenaxen* und zwar $X'X$ die Abscissenaxe oder x-*Axe*, $Y'Y$ die Ordinatenaxe oder y-*Axe*; ihr Schnittpunkt O heifst der *Anfangspunkt* (Ursprung) oder *Nullpunkt* der Coordinaten, da für ihn Abscisse und Ordinate Null sind. Man unterscheidet das so durch Angabe der Axen und des Mafsstabes definirte *Coordinatensystem* von andern als das *Cartesische*, das gemeine oder das der *Parallelcoordinaten*. Wenn speciell der Axenwinkel $\sphericalangle XOY = \omega$ ein Rechter ist, nennt man x, y *rechtwinklige* (*orthogonale*) *Coordinaten*.

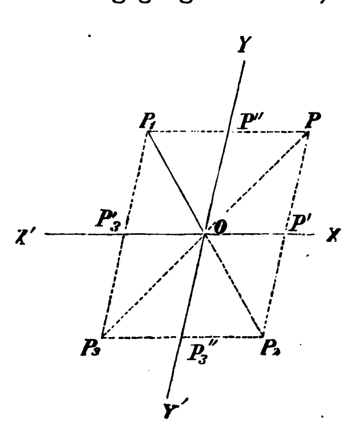
Sind in der vorigen Figur die Coordinaten des Punktes P $x = a$, $y = b$, so haben offenbar seine Projectionen P' und P'' die Coordinaten $x = a$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = b$. Die Coordinaten eines Punktes P sind also die Abscisse seiner Projection P' und die Ordinate seiner Projection P''. Und allgemein liegen die Punkte gleicher Abscissen $x = a$ auf der Parallelen durch P' zur y-Axe, die Punkte gleicher Ordinaten $y = b$ auf der Parallelen durch P'' zur x-Axe. So haben alle Punkte, die in der Abscissenaxe selbst liegen, die Ordinate Null, die Punkte der Ordinatenaxe dagegen die Abscisse Null.

Abkürzend soll ein Punkt von den Coordinaten $x = a$, $y = b$ *als der Punkt* $a|b$ *bezeichnet werden*, so dafs dann z. B. P', P'', O die Punkte $a|0$, $0|b$, $0|0$ sind.

3. **Vorzeichen.** Durch die Gleichungen $x = a$, $y = b$ ist der Punkt P *eindeutig* nur dann bestimmt, wenn man weifs, nach welcher Seite hin man die Längen a in der x-Axe, b in der y-Axe von O aus abzutragen hat. Wären die Coordinaten nur die Mafszahlen absoluter Längen OP', OP'', so müfsten wir a, b zu *beiden* Seiten von O in den Axen abtragen, und jeder der Punkte P, P_1, P_2, P_3 genügte dann den Gleichungen $x = a$, $y = b$.

Es ist aber möglich, zwischen Abscissen OP', OP_3'

(oder Ordinaten), welche der Länge nach gleich, dem Sinne nach entgegengesetzt sind, algebraisch zu unterscheiden, indem man ihnen *verschiedene Vorzeichen* beilegt. Wir setzen fest, dafs Längen (oder ebenso Winkel), die in einem bestimmten Sinn gemessen sind, als positiv betrachtet werden, dafs sie aber als negativ gelten, wenn sie im entgegengesetzten Sinn gemessen sind. Der Sinn der Messung wird durch die Aufeinanderfolge von Anfangs- und Endpunkt der *Strecke* ausgedrückt, so dafs $OP_3' = P'O = -OP'$, und $OP_3'' = P''O = -OP''$ ist. Es ist dabei willkürlich, welchen Sinn wir in jeder Axe als den positiven ansehen wollen, jedoch üblich, die nach *rechts* gemessenen Abscissen OP' und die nach *oben* gemessenen Ordinaten OP'' als positiv, die je im entgegengesetzten Sinn gemessenen Strecken OP_3', OP_3'' als negativ zu betrachten. Vermittelst dieser Bestimmungen sind die vier Punkte P, P_1, P_2, P_3 leicht zu unterscheiden als die Punkte von den Coordinaten



$$x = +a,\ y = +b;\ x = -a,\ y = +b;\ x = -a,\ y = -b;\ x = +a,\ y = -b.{}^{*)}$$

Die Coordinatenaxen teilen die Ebene in *vier Felder* (Regionen), bei orthogonalen Axen Quadranten genannt. Unterscheidet man die von O ausgehenden Zweige der Axen als die positiven und die negativen Halbaxen der x, bez. y, so sind die vier Felder durch die Vorzeichencombinationen $+|+$; $-|+$; $-|-$; $+|-$ zu characterisiren. Denn *offenbar stimmen für alle Punkte eines Feldes die Vorzeichen der gleichbenannten Coordinaten jeweilen überein.* Bewegt sich ein Punkt P in der Ebene, so entspricht nur jeder Überschreitung

*) Diese Unterscheidung mufs dem Anfänger aus der Trigonometrie geläufig sein.

der Axe der x, bez. der y ein Vorzeichenwechsel der ungleichbenannten Coordinate y, bez. x desselben durch Null hindurch.

B. Punkte $+a \mid +b$, $-a \mid -b$ liegen symmetrisch in Bezug auf O, $a|b$, $b|a$ symmetrisch zur Halbirungslinie des Winkels zwischen $+x$, $+y$, etc.

4. Ist in einer beliebigen Geraden ein positiver Sinn und der Nullpunkt O einer Abscissenmessung festgesetzt, so ist die Entfernung $P'Q'$ zweier ihrer Punkte nach Gröfse und Sinn bestimmt. Denn nicht nur für den Fall, dafs P' zwischen O und Q' liegt, ist $P'Q' = OQ' - OP'$, sondern auch, falls O etwa zwischen P' und Q' liegt; denn dann sind OQ' und OP' in entgegengesetztem Sinn gemessen und $P'Q'$ ist, obwol ihre arithmetische Differenz, doch ihre algebraische Summe. *Daher ist stets eine Strecke $P'Q'$ gleich der Abscisse des Endpunktes Q' minus der Abscisse des Anfangspunktes P'.*

Sind P' und Q' die Projectionen von P und Q, so heifst $P'Q'$ *die Projection der Strecke* PQ. Sie ist nach dem Vorigen positiv oder negativ, aber unabhängig davon, ob der durch PQ definirte Sinn in jener willkürlichen Geraden positiv oder negativ heifse. Die beiden Projectionen $P'Q'$ und $P''Q''$ übertragen also zwar ihren Bewegungssinn auf die Strecke PQ (im Gegensatz zu QP), aber, den Fall ausgenommen, dass PQ einer der Axen parallel ist, folgt daraus noch keine Festsetzung, ob PQ positiv oder negativ zu messen sei. Solange wir nur *eine* Strecke PQ betrachten, hat es auch keinen Zweck, ihr ein Vorzeichen beizulegen, da dieses ja andeutet, dafs diese Strecke zu einer andern addirt oder von einer solchen subtrahirt werden solle. Liegt aber ein dritter Punkt R in der durch P und Q bestimmten Geraden, so bedingt $P'Q' + Q'R' + R'P' = 0$ eine Vorzeichenbestimmung der Strecken gemäfs der Identität

$$PQ + QR + RP = 0.$$

Bilden die Punkte P, Q, S ein Dreieck PQS oder n Punkte $P, Q, S, \ldots T$ ein Polygon $PQS \ldots T$ und denkt man sich die Begrenzung in einem bestimmten

Umfahrungssinn vollständig durchlaufen, also nach einander die Strecken PQ, $QS, \ldots TP$, so ist notwendig die algebraische Summe der Projectionen $P'Q' + Q'S' + \ldots + T'P'$ gleich Null. Einen andern Ausdruck hiefür gibt der Satz: *die Projection jedes die Punkte P und Q verbindenden Linienzuges auf eine beliebige Gerade ist gleich der Projection der geraden Strecke PQ auf dieselbe.*

Für die Messung der Winkel kann ein für die ganze Ebene gültiger, positiver Sinn festgesetzt werden. *Man pflegt den Drehungssinn des Uhrzeigers als negativ, den entgegengesetzten als positiv zu bezeichnen**). Bei unserer Wahl der Axen gelangt also OX durch eine Drehung im positiven Sinne nach einander mit OY, OX', OY' zur Deckung. Ist auf zwei Geraden der positive Sinn jeweilen fixirt, so wird als ihr Winkel derjenige genommen, den die gleichsinnigen Halbstrahlen einschliefsen; so ist $\sphericalangle XOY = X'OY' = \omega$ der Axenwinkel (während $\sphericalangle XOY' = \sphericalangle X'OY = \omega + \pi$). Umgekehrt überträgt die Angabe des nach Gröfse und Zeichen bestimmten Winkels den Sinn des einen Schenkels auf den andern, und eine Änderung des Winkels um π bedeutet die Umkehrung des Sinnes auf dem zweiten Schenkel. *Alle Winkel $\sphericalangle POQ$ lassen sich ausdrücken als die algebraischen Differenzen der Winkel $\sphericalangle XOQ - XOP$, welche ihre positiven Schenkel mit einem positiven Anfangsstrahl machen, nämlich der Halbaxe OX.*[2])

5. **Coordinatenausdruck der Entfernung d zweier Punkte P, Q oder $x'|y'$, $x''|y''$.**

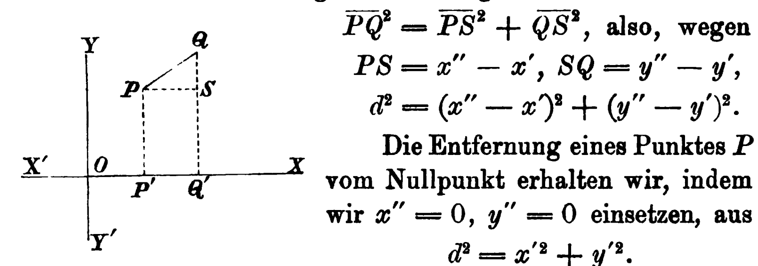
Für den Fall, dafs die Verbindungslinie der Punkte P, Q einer Axe parallel ist, z. B. der x-Axe, ist $PQ = P'Q'$ die algebraische Coordinatendifferenz $x'' - x'$. Im allgemeinen ergibt sich aber die Entfernung PQ aus den beiden Pro-

---

*) Betrachten wir die Bewegung eines Punktes auf einem Kreise, so dafs sein zugehöriger Centriwinkel im positiven Sinn wächst, so befindet sich das Kreisinnere zur Linken jenes Punktes. Daher gilt überhaupt derjenige *Umfahrungssinn* einer nicht überschlagenen geschlossenen Figur als positiv, bei welchem stets *das Innere derselben* dem bewegten Punkte *zur Linken* bleibt.

jectionen $P'Q'$, $P''Q''$ als dritte Seite eines durch diese gegebenen Dreiecks.

Unter Voraussetzung rechtwinkliger Axen ist offenbar



$$\overline{PQ}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{QS}^2,$$ also, wegen

$$PS = x'' - x', \; SQ = y'' - y',$$

$$d^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2.$$

Die Entfernung eines Punktes P vom Nullpunkt erhalten wir, indem wir $x'' = 0$, $y'' = 0$ einsetzen, aus

$$d^2 = x'^2 + y'^2.$$

Denken wir in der Figur allgemeiner den Axenwinkel $XOY = \omega$ schief, so ist $\sphericalangle QSP = \pi - \omega$ und es gilt

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{QS}^2 - 2\,\overline{PS}\,.\,\overline{QS}\,.\cos QSP,$$

wobei die Seitenlängen des Dreiecks immer absolut (positiv) zu nehmen sind. Man verificirt dann für verschiedene relative Lagen von P und Q gegen die Axen leicht, dafs statt der Längen die Strecken so einzuführen sind, dafs

$$d^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2\,(x'' - x')\,(y'' - y')\cos\omega;$$

für die Entfernung des Punktes $x'|y'$ vom Nullpunkt speciell

$$d^2 = x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\omega.$$

Für $\omega = \frac{\pi}{2}$ gehen aus diesen Formeln wiederum die obigen hervor. Dabei hat die Entfernung d der Punkte selbst ein von dem der Projectionen unabhängiges, also doppeltes Vorzeichen, da ihr Ausdruck durch eine Quadratwurzel gegeben wird und hier natürlich die Bemerkungen des vorigen Artikels gelten.

Wie schon hier so zeichnen sich im allgemeinen die Formeln bei der Anwendung rechtwinkliger Coordinaten durch gröfsere Einfachheit aus. Wir werden aber im folgenden die hauptsächlichsten Formeln in ihrer allgemeinsten Gestalt geben, da die schiefwinkligen Parallelcoordinaten zuweilen mit Vorteil anzuwenden sind und die Specialisirung in der Einführung von $\omega = \frac{\pi}{2}$ besteht.

B. 1) Die Coordinaten der Ecken eines Dreiecks sind $x' = 2$, $y' = 3$; $x'' = 4$, $y'' = -5$; $x''' = -3$, $y''' = -6$;

unter Voraussetzung rechtwinkliger Axen sind die Längen seiner Seiten $\sqrt{68}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{106}$.

2) Die Längen der Seiten eines Dreiecks, dessen Ecken dieselben Coordinaten haben wie vorher, sind unter der Voraussetzung des Axenwinkels von 60^0, $\sqrt{52}$, $\sqrt{57}$, $\sqrt{151}$.

3) Der Ausdruck dafür, dafs die Entfernung des Punktes $x|y$ vom Punkte $2|3$ gleich 4 ist, lautet: $(x-2)^2+(y-3)^2=16$.

4) Der Punkt $x|y$ ist von den Punkten $2|3$ und $4|5$ gleich weit entfernt, wenn

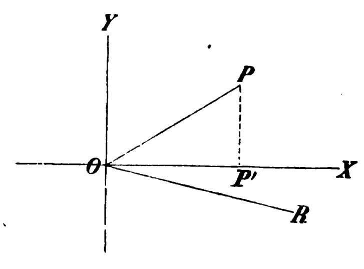
$$(x-2)^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(y-5)^2 \text{ oder } x+y=7.$$

5) Der Punkt, welcher von den Punkten $2|4$, $4|5$, $6|1$ gleich weit entfernt ist, hat die Coordinaten

$$x=\frac{13}{3},\ y=\frac{8}{3} \text{ und die Entfernung } \frac{\sqrt{50}}{3}.$$

6. **Polarcoordinaten.** Aufser der Methode der Parallelcoordinaten zum Ausdruck der Lage eines Punktes wird noch eine andere häufig angewendet, die aus den Betrachtungen der beiden vorigen Artikel folgt.

Ist *ein fester Punkt O als Nullpunkt und ein fester Halbstrahl OX durch ihn als Nullstrahl* gegeben, so kennt man aus der Lage eines Punktes P seine Entfernung OP vom Nullpunkt und den Winkel XOP. Umgekehrt ist durch den Winkel die Gerade OP und der positive Sinn derselben (§ 4) eindeutig bestimmt; alsdann wird P fixirt durch die absolute Länge OP, falls man dieselbe immer im positiven Sinn auf dem zweiten Schenkel abträgt.



Die Entfernung OP heifst der *Vector* r (radius vector), der Winkel XOP die *Anomalie* ϑ (das Argument) des Punktes P, *ϑ und r zusammen die Polarcoordinaten von P,* da O auch der *Pol* genannt wurde. Den Punkt P bezeichnen wir auch durch das Coordinatenpaar $\vartheta|r$ *), wofür, wenn ausnahmsweise negative Vectoren vorkommen, auch geschrieben werden kann $\vartheta+\pi|-r$.

*) Die Angabe von ϑ durch griechische Buchstaben oder in Bruchteilen von π (Bogenmafs) schliefst eine Verwechslung von $\vartheta|r$ mit $x|y$ aus.

Offenbar könnte nach Einführung eines zweiten Pols O' auf OX der Punkt P auch durch die bloſse Angabe der beiden Anomalien XOP, $XO'P$ eindeutig und, wie man sagt, *bipolar* bestimmt werden. So existiren noch viele Coordinatensysteme, die aber notwendig durch einander ersetzbar sein müssen.

7. **Aus den Parallelcoordinaten $x|y$ eines Punktes P folgen seine Polarcoordinaten $\vartheta|r$ und umgekehrt.** Für den gebräuchlichsten Fall, wo rechtwinklige Coordinaten in Polarcoordinaten mit demselben Nullpunkt und der positiven x-Axe als Nullaxe umzusetzen sind, ist

$$x = r\cos\vartheta,\quad y = r\sin\vartheta,$$

denn x, y *sind die orthogonalen Projectionen des Vectors r auf die Axen.* Zum umgekehrten Übergang gilt

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{y}{x},\quad r = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\cos\vartheta},$$

so daſs in der Tat zu jedem Vorzeichen von r ein bestimmter Winkel ϑ gehört und beide um π verschieden sind.

Bei schiefen Axen mit dem Winkel $XOY = \omega$ ist $OP : P'P = \sin OP'P : \sin P'OP$, also

$$P'P = y = r\,\frac{\sin\vartheta}{\sin\omega},\quad \text{ebenso } OP' = x = r\,\frac{\sin(\omega-\vartheta)}{\sin\omega}$$

ähnlich wie vorhin. Umgekehrt ist auszugehen von

$$y : x = \sin\vartheta : \sin(\omega-\vartheta).$$

Da dieses Verhältnis $y : x$ nur von der Anomalie ϑ abhängt, ist für die Coordinaten aller Punkte des Halbstrahles OP $y : x = \text{const.}$ Alle Punkte mit gleichem Vector liegen hinwiederum auf einem Kreis mit dem Centrum in O.

Wenn endlich der Nullstrahl OR mit der Axe OX nicht zusammenfällt, sondern diese den Winkel $ROX = \alpha$ mit ihr bildet und $\sphericalangle ROP = \vartheta'$, so ist in den vorigen Formeln einfach ϑ durch $\vartheta' - \alpha$ zu ersetzen; also für rechtwinklige Coordinaten

$$x = r\cos(\vartheta'-\alpha),\quad y = r\sin(\vartheta'-\alpha).$$

B. 1) Die folgenden Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten sind in solche für Polarcoordinaten zu übertragen:

$$x^2 + y^2 = 5mx \qquad \textit{Aufl.}\ r = 5m\cos\vartheta$$
$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad r^2\cos 2\vartheta = a^2.$$

2) Die folgenden Gleichungen in Polarcoordinaten sind in solche zwischen rechtwinkligen Coordinaten umzusetzen:

$$r^2 \sin 2\vartheta = 2a^2 \quad \textit{Aufl.}\ xy = a^2$$
$$r^2 = a^2\cos 2\vartheta \qquad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$
$$r^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}\vartheta = a^{\frac{1}{2}} \qquad x^2+y^2 = (2a-x)^2$$
$$r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}\vartheta \qquad (2x^2+2y^2-ax)^2 = a^2(x^2+y^2).$$

8. **Distanz zweier Punkte in Polarcoordinaten.** Sind P, Q die beiden Punkte $\vartheta'|r'$, $\vartheta''|r''$, so ist nach

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2OP\cdot OQ\cdot\cos POQ$$
$$d^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos(\vartheta''-\vartheta').$$

Oft werden Parallel- und Polarcoordinaten zweckmäfsig nebeneinander benutzt. Vergleichen wir z. B. diesen Ausdruck für d^2 mit dem in § 5 für rechtwinklige Coordinaten erhaltenen, so entspringt die Relation

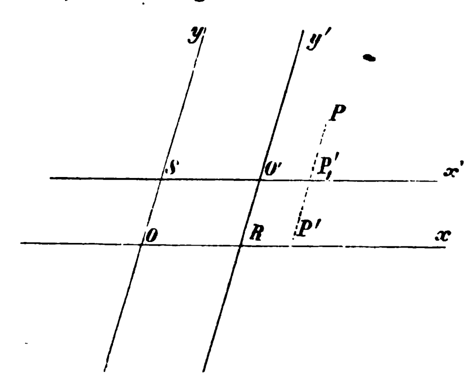
$$x'x'' + y'y'' = r'r''\cos(\vartheta''-\vartheta') = r'r''\cos\varphi,$$

aus welcher der gemeine Coordinatenausdruck für den Winkel $\varphi = POQ$ folgt, unter dem die Strecke PQ vom Nullpunkt aus erscheint, sobald man r', r'' als blofse Abkürzungen für $\sqrt{x'^2+y'^2}$, $\sqrt{x''^2+y''^2}$ ansieht.

9. **Transformation der Parallelcoordinaten.** Es wird oft notwendig, aus den bekannten, auf gegebene Axen bezogenen Parallelcoordinaten x, y eines Punktes seine Coordinaten x', y' in Bezug auf ein anderes gegebenes Axenpaar abzuleiten. Diese Operation wird die *Transformation der Coordinaten* genannt. Sie ist bestimmt, sobald man die Lage der neuen Axen im alten System kennt. Ihr Nutzen liegt darin, dafs man *zwei ganz beliebige Gerade der Ebene als neue Axen nehmen kann.*

Den allgemeinen Fall, wo sowol der Anfangspunkt als die Axen im neuen System andere Lage haben als im alten, können wir offenbar stets erreichen, wenn wir nacheinander folgende Transformationen ausführen. Erstens ändern wir den Anfangspunkt, setzen aber die neuen Axen den alten bez. parallel voraus; zweitens halten wir den Anfangspunkt fest, lassen aber die Axen sich ändern.

Der erste Fall kann als *Parallel- oder Verschiebungstransformation* gekennzeichnet werden, da das neue Axensystem $x'O'y'$ aufgefasst werden kann als das Resultat der Parallelverschiebung des alten Systems xOy um die Strecke OO'. Sind die Coordinaten des neuen Anfangspunktes O' im alten System $OR = x_0$, $OS = y_0$, so ist



$$OP' = OR + O'P'_1, \quad P'P = OS + P'_1P.$$

Hat also P im alten System die Coordinaten $x|y$, im neuen aber die (accentuirten) Coordinaten $x'|y'$, so sind die Transformationsformeln

$$x = x' + x_0, \; y = y' + y_0; \; x' = x - x_0, \; y' = y - y_0.$$

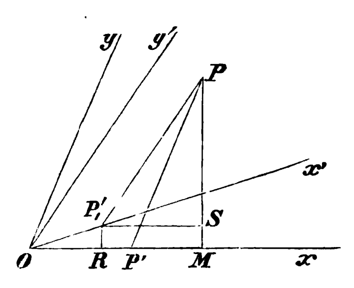
Also werden die gleichnamigen Coordinaten aller Punkte der Ebene um je eine (additive) Constante geändert.

* Man bemerke, dafs die Formeln noch eine zweite Deutung gestatten, wenn wir $x'|y'$ als Coordinaten eines von P verschiedenen Punktes Q im alten System betrachten. In der Tat, wenn man das ursprüngliche Coordinatensystem festhält, jedoch alle Punkte P um Strecken verschiebt, die parallel und gleich $O'O$ sind, also im umgekehrten Sinne wie vorhin die Axen, so sind die Coordinaten $x'|y'$ ihrer neuen Lagen Q aus jenen Formeln erhältlich.

B. Genügen die Coordinaten eines Punktes der Relation $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 18$, so verwandelt sich dieselbe, wenn der Anfangspunkt nach $2|3$ verlegt wird, in $x'^2 + y'^2 = 31$.

10. In dem zweiten umfassenderen Fall sind die Axenrichtungen beliebig verändert, während der Nullpunkt fest bleibt. Sind x, y die positiven alten Axen mit dem Winkel ω und bilden die neuen Axen x', y' mit x bez. die Winkel $\sphericalangle x, x' = \alpha$, $\sphericalangle x, y' = \beta$, so ist der neue Axenwinkel $\sphericalangle x', y' = \omega' = \beta - \alpha$, und die Winkel $\sphericalangle x', y = \omega - \alpha$, $\sphericalangle y', y = \omega - \beta$.

Man erhält nun die Transformationsformeln am einfachsten dadurch, dafs man die gebrochenen Züge $OP'P$ und $OP'_{,}P$ auf die Normalen von P zu den alten Axen orthogonal projicirt und den Satz des § 4 anwendet. Unmittelbar hat man MP durch die alten und durch die neuen Coordinaten ausgedrückt als



$$MP = RP'_{,} + SP$$
$$= OP'_{,} \sin ROP'_{,} + P'_{,}P \sin SP'_{,}P$$

oder $y \sin \omega = x' \sin \alpha + y' \sin \beta$.

Die Normale von P auf die y-Axe erhält man offenbar, indem man y, α, β bez. ersetzt durch x, $\omega - \alpha$, $\omega - \beta$, also

$$x \sin \omega = x' \sin (\omega - \alpha) + y' \sin (\omega - \beta).$$

Diese Formeln gelten allgemein, nicht nur bei der Annahme der Figur, wo α, β, ω positiv und $\omega > \beta > \alpha$ ist. Fällt z. B. y' jenseits von y, so ist $\beta > \omega$, also $\omega - \beta$ und $\sin (\omega - \beta)$ negativ einzuführen.

Der analytische Ausdruck der Coordinatentransformation bei festem Nullpunkt ist also der, dafs die $x|y$ ersetzt werden durch homogene lineare Functionen der $x'|y'$, deren Coefficienten von drei Gröfsen α, β, ω abhängen. Man erhält auch die umgekehrte Transformation direct in analoger Form.

Endlich entspringen aus der Aufeinanderfolge der beiden bisherigen Schritte (§ 9) *für die allgemeinste Coordinatentransformation die Formeln*

$$(x - x_0) \sin \omega = x' \sin (\omega - \alpha) + y' \sin (\omega - \beta)$$
$$(y - y_0) \sin \omega = x' \sin \alpha \qquad\qquad + y' \sin \beta.$$

B. 1) Man bilde die umgekehrte Transformation durch Auflösung der directen unter Beachtung der Relation

$$\sin \omega' \sin \omega = \sin \beta \sin (\omega - \alpha) - \sin \alpha \sin (\omega - \beta).$$

2) Bei jeder Transformation ist

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega = x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos \omega'.$$

Denn, setzen wir $x' \sin \alpha + y' \sin \beta = L$, $x' \cos \alpha + y' \sin \beta = M$, so können die allgemeinen Transformationsformeln geschrieben werden $y \sin \omega = L$, $x \sin \omega = M \sin \omega - L \cos \omega$; also ist

durch Quadriren und Addiren $x^2 + y^2 + xy \cos \omega = L^2 + M^2$, anderseits aber durch Auflösung der Ansätze

$$L^2 + M^2 = x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos(\beta - \alpha).$$

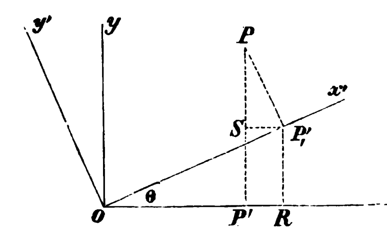
Siehe auch die Beispiele zu § 20.

11. Der zweite Transformationsfall umfaſst einige wichtige Specialfälle, die sich auch kurz direct untersuchen lassen. Oft ist *von schiefen Parallelcoordinaten zu rechtwinkligen zu transformiren unter Beibehaltung der x-Axe.* Dazu ist in den allgemeinen Formeln nur einzusetzen: $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, aber ebenso leicht liest man aus der Figur des § 10 direct ab

$$MP = y' = y \sin \omega, \quad OM = x' = x + y \cos \omega$$

und umgekehrt $y \sin \omega = y'$, $x \sin \omega = x' \sin \omega - y' \cos \omega$.

Falls das alte und das neue Axenpaar denselben Winkel $\omega = \omega'$ einschlieſst, so kann man das neue als die um den Winkel $\alpha = \vartheta$ gedrehte Lage des alten betrachten. Hierin ist insbesondere für $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2} + \vartheta$ inbegriffen: *die Transformation rechtwinkliger Coordinaten durch Drehung des Axensystems um einen Winkel ϑ.* Man erhält auch direct aus der Figur wegen



$$x = OR - SP_1', \quad y = RP_1' + SP,$$
$$x = x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta$$
$$y = x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta.$$

Die Auflösungen dieser Gleichungen nach x', y' entstehen natürlich durch die Vertauschung von x, y, ϑ mit $x', y', -\vartheta$ bez. Man nennt diese den Drehungen eines rechtwinkligen Axensystems entsprechenden Coordinatenrelationen *orthogonale Transformationen.* Sie haben die in

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

enthaltene Eigenschaft, die Summe der Coordinatenquadrate nicht zu ändern, was geometrisch daraus folgt, daſs beide Ausdrücke das Vectorquadrat desselben Punktes darstellen (§ 5).

Zu beachten ist, daſs, wenn der Drehungssinn der gleichen

Axenwinkel x', y' und x, y nicht übereinstimmt, in den allgemeinen Formeln zu setzen ist $\omega' = -\omega$ oder $\beta = \vartheta - \omega$, bei rechtwinkligen Coordinaten $\beta = \vartheta - \frac{\pi}{2}$. Die zu letzteren gehörigen Formeln erhält man offenbar nicht durch eine bloſse Drehung, sondern, indem man nach Ausführung einer Drehung des rechtwinkligen Axensystems die positive und die negative Halbaxe der y' mit einander vertauscht, also mit einer orthogonalen Transformation die einfache Ersetzung von y' durch $-y'$ verbindet. Man nennt diese Transformationen $x = x' \cos\vartheta + y' \sin\vartheta$, $y = x' \sin\vartheta - y' \cos\vartheta$ *uneigentlich orthogonale.* Für ihre algebraische Theorie verweisen wir auf die § 86 genannten „Vorlesungen" Art. 43. 44.

B. *Aufg.* 1) Die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes genügen der Relation $y^2 - x^2 = 6$; wenn die Halbirungslinien der Axenwinkel das neue Axensystem bilden, geht diese über in $x'y' = 3$.

2) Die Formeln für die Transformation von gegebenen schiefen Axen zu den Halbirungslinien der Axenwinkel als neuen Axen sind allgemein $\left(\alpha = \frac{\omega}{2}, \beta = \frac{\omega + \pi}{2}\right)$:

$$x \sin\omega = x' \sin\frac{\omega}{2} - y' \cos\frac{\omega}{2}, \quad y \sin\omega = x' \sin\frac{\omega}{2} + y' \cos\frac{\omega}{2}.$$

3) Transformirt man die Gleichung $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 4$ von einem Axensystem $\omega = \frac{\pi}{3}$ zu rechtwinkligen Axen unter Beibehaltung der x-Axe, so wird sie $3x'^2 - 7x'y'\sqrt{3} + 10y'^2 = 6$.

*12. Die Formeln für die Transformation von einem rechtwinkligen Axensystem zu einem andern gestatten offenbar wiederum eine zweite Auffassung (vgl. § 9). Denken wir das Axensystem x, y fest und $x|y$, $x'|y'$ als Coordinaten verschiedener Punkte P, Q in Bezug auf dasselbe. Ist dann $Q_1 Q_2 \ldots$ eine beliebige Figur der Ebene, die durch eine Drehung um den Winkel ϑ um den Fixpunkt O mit einer congruenten Figur $P_1 P_2 \ldots$ zur Deckung gebracht werden kann, so sind die Coordinaten $x_1|y_1$, $x_2|y_2, \ldots$ aus den auf dieselben Axen bezogenen Coordinaten $x_1'|y_1'$, $x_2'|y_2', \ldots$ vermöge der Gleichungen zu berechnen $x = x' \cos\vartheta - y' \sin\vartheta$, $y = x' \sin\vartheta + y' \cos\vartheta$. Demgemäſs verwandelt *die ortho-*

gonale Transformation eine gegebene Figur in eine (gleichstimmig) congruente Figur.

Da ferner die Punkte $x' \mid y'$ und $x' \mid -y'$ symmetrisch zur y'-Axe liegen, so verwandelt der Zeichenwechsel der Ordinate jedes Punktes einer Figur dieselbe in eine ihr symmetrische. Auf ein festes Coordinatensystem bezogen, *entspricht vermöge einer uneigentlich orthogonalen Transformation einer gegebenen Figur eine symmetrisch gleiche (ungleichstimmig congruente).*

Da aber bekanntlich eine ebene Figur durch eine Drehung ϑ um einen Fixpunkt $x_0 \mid y_0$ mit jeder ihr congruenten Figur der Ebene zur Deckung zu bringen ist und auch die allgemeinste Lagenveränderung des Coordinatensystems von diesen drei Constanten $x_0 \mid y_0$, ϑ abhängt, so kann auch *jede ebene Figur in eine beliebige ihr congruente oder symmetrisch gleiche verwandelt werden, indem man die Coordinaten ihrer Punkte, unter passender Wahl der Constanten, durch nach den allgemeinen Formeln transformirte Coordinaten ersetzt.*

Endlich bleibt noch der Fall zu betrachten, dafs auf den fest gewählten Axen der *Mafsstab* geändert wird. Steht die neue Längeneinheit zu der alten im Verhältnis $k : 1$, so sind die Coordinaten $x \mid y$ eines Punktes in der neuen Einheit $x = kx'$, $y = ky'$, d. h. die Coordinaten ändern sich proportional. Tragen wir statt dessen zu gegebenen Coordinaten $x' \mid y'$ die proportionalen $x \mid y$ in der unveränderten Einheit auf, so ist der Vector von P das $k$fache des Vectors von Q und O, P, Q liegen in gerader Linie (§ 7). *Die Figuren der Punkte $x' \mid y'$ und $kx' \mid ky'$ heifsen dann ähnlich und ähnlich gelegen oder homothetisch* und die zugehörige Coordinatenrelation die *Ähnlichkeitstransformation.*

13. **Teilverhältnis eines Punktes in einer Strecke.** *Eine Strecke AB wird durch einen Punkt C ihrer Geraden im Verhältnis $n_1 : n_2$ geteilt, wenn die Teilstrecken $AC : CB$ in diesem Verhältnis stehen.* Nach dieser Definition hat man die Teilstrecken so zu messen, dafs ihre Summe gleich der geteilten Strecke, $AC + CB = AB$, ist. Somit bestimmt jeder innerhalb der Strecke AB gewählte oder *innere Teilpunkt C, ein*

positives Teilverhältnis $AC:CB$, jeder in eine Verlängerung von AB fallende oder *äufsere Teilpunkt ein negatives Teilverhältnis*, denn die Teilstrecken haben im ersten Fall gleiche, im zweiten verschiedene Vorzeichen*).

Werden nun A, B, C durch parallele Strahlen auf irgend eine Gerade nach A', B', C' projicirt, so ist nach elementaren Sätzen $A'C' : C'B' = AC : CB$, d. h. *das Teilverhältnis wird durch Parallelprojection nicht geändert.* Haben A, B die Coordinaten $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ bez., so können die Coordinaten $x' | y'$ des Teilpunktes C zu jedem Teilverhältnis $n_1 : n_2$ bestimmt werden.

y, D, B, M, C, A, x, O, A', M', C', B', D'

Denn die Projectionen auf die Axen geben

$$n_1 : n_2 = A'C' : C'B' = x' - x_1 : x_2 - x',$$

ebenso
$$n_1 : n_2 = y' - y_1 : y_2 - y';$$

also
$$x' = \frac{n_2 x_1 + n_1 x_2}{n_1 + n_2}, \quad y' = \frac{n_2 y_1 + n_1 y_2}{n_1 + n_2}.$$

Die ersten Formeln liefern zu jedem Punkt C der Geraden AB das Teilverhältnis, die letzten zu jedem beliebigen Verhältnis $n_1 : n_2$ die Coordinaten des zugehörigen Teilpunktes. Somit *ist jeder Punkt der Geraden AB eindeutig bestimmbar durch die Verhältniszahl $v = n_1 : n_2$, nach welcher er die Strecke AB teilt.*

Verfolgen wir die Ortsveränderung des Teilpunktes C, wenn wir das Teilverhältnis v von Null an alle positiven und negativen Zahlwerte annehmen lassen. Für $v = 0$ ($n_1 = 0$) fällt C mit A zusammen; nimmt v positive wach-

*) In der Elementargeometrie pflegt man nur den inneren Teilpunkt einer Strecke zu betrachten und sein Teilverhältnis als eine positive Zahl anzugeben. In den Lehrbüchern der analytischen Geometrie findet man öfters die obige Definition abgeändert in $n_1 : n_2 = AC : BC$, d. h. man hätte die Teilstrecken jeweilen von den Endpunkten der Strecke nach dem Teilpunkt hin zu messen. Man hat alsdann nur jeweilen die Teilverhältnisse des Textes mit entgegengesetztem Vorzeichen zu lesen.

sende Werte an, so entfernt sich C von A und nähert sich B, so dafs zu $v = +1$ $(n_1 = n_2)$ der Mittelpunkt M von AB gehört; aber erst für $v = +\infty$ $(n_2 = 0)$ erreicht C den Punkt B. Da dies auch für $v = -\infty$ geschieht, so müssen diese Verhältniswerte $\pm\infty$ ebensowol als identisch betrachtet werden wie die Werte ± 0. Für wachsende negative (also absolut abnehmende) Werte von v entfernt sich C als äufserer Teilpunkt immer mehr von B, so lange $v < -1$ $(n_1 < -n_2)$; dagegen entfernt sich C in entgegengesetztem Sinn als äufserer Teilpunkt immer mehr von A, wenn v von Null an abnimmt, aber $v > -1$ $(n_1 > -n_2)$ bleibt.

Zu jedem Wert des Teilverhältnisses v können wir also den zugehörigen Teilpunkt in endlicher Entfernung angeben, nur nicht zu $v = -1$ $(n_1 = -n_2)$, für den $x = \infty$, $y = \infty$ wird. Nennen wir nun Punkte mit unendlich grofsen (∞) Coordinaten unendlich ferne Punkte, so werden wir zu der Annahme geführt: *in jeder Geraden der Ebene liegt nur ein einziger unendlich ferner Punkt.* Denn, gehört so bezüglich jeder endlichen Strecke der Geraden zu jedem Teilverhältnis $v \gtrless -1$ ein einziger Punkt in endlicher Entfernung und umgekehrt, so müssen wir auch für den Teilverhältniswert $v = -1$, den nur ein unendlich ferner Punkt erzeugen kann, den Satz von der Eindeutigkeit der Bestimmung derselben noch gültig voraussetzen, sofern sich keine Widersprüche daraus ergeben. Wir haben gesehen, wie ein beweglicher Punkt den Punkt ∞ in beiderlei Sinn erreichen kann, dafs also die Gerade als eine im Unendlichen geschlossene Linie anzusehen sein wird.

B. 1) Die Coordinaten des Mittelpunktes der Verbindungslinie der Punkte $x' \mid y'$, $x'' \mid y''$ sind $x = \frac{x' + x''}{2}$, $y = \frac{y' + y''}{2}$.

2) Die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks, welches die Punkte $2 \mid 3$, $4 \mid -5$, $-3 \mid -6$ zu Ecken hat, sind $\frac{1}{2} \mid -\frac{11}{2}$, $-\frac{1}{2} \mid -\frac{3}{2}$, $3 \mid -1$.

3) Die Verbindungslinie der Punkte $2 \mid 3$, $4 \mid -5$ ist in drei gleiche Teile geteilt; der dem ersten Punkte zunächst liegende Teilpunkt ist $\frac{8}{3} \mid \frac{1}{3}$.

4) Die Ecken eines Dreiecks sind $x' \mid y'$, $x'' \mid y''$, $x''' \mid y'''$;

der Punkt, der das erste Dritteil der Verbindungslinie einer Ecke mit dem Mittelpunkte der Gegenseite angibt, hat

$$x = \tfrac{1}{3}(x' + x'' + x'''),\quad y = \tfrac{1}{3}(y' + y'' + y''').$$

5) Für das in 2) gegebene Dreieck ist der Punkt (*Schwerpunkt*), in welchem sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseiten (Mittellinien des Dreiecks) begegnen, $1 \mid -\frac{8}{3}$.

6) Bestimmen C, D in AB die Teilverhältnisse ν, ν', so ist $(\nu + 1)(\nu' + 1) \cdot CD = (\nu' - \nu) AB$. Also folgt für einen Punkt E, für den $AE : EB = \nu''$, $\frac{CE}{ED} = \frac{\nu - \nu''}{\nu'' - \nu'} : \frac{\nu + 1}{\nu' + 1}$.

7) In einem Dreieck ist eine Seite in dem Verhältnis $n_1 : n_2$ und die Verbindungslinie dieses Teilpunktes mit der Gegenecke in dem Verhältnis $n_1 + n_2 : n_3$ geteilt; die Coordinaten des letzteren Teilpunktes sind

$$x = \frac{n_1 x' + n_2 x'' + n_3 x'''}{n_1 + n_2 + n_3},\quad y = \frac{n_1 y' + n_2 y'' + n_3 y'''}{n_1 + n_2 + n_3}.$$

14. **Harmonische Teilung einer Strecke.** Zu einem nur dem absoluten Wert ν nach gegebenen Teilverhältnis einer Strecke AB gibt es einen inneren Teilpunkt C mit $AC : CB = n_1 : n_2$, und einen äufseren Teilpunkt D mit $AD : DB = -n_1 : n_2$.

Aus den Coordinaten von C in § 13 folgen also die von D durch Einführung von $-\nu$ statt ν und ebenso umgekehrt. Aus dem ersten Punkt folgt der zweite in derselben Weise, wie aus dem zweiten wieder der erste; eine solche Eigenschaft einander zugeordneter Punkte heifst *Vertauschbarkeit.*

Zwei Punkte C, D, die eine Strecke AB nach entgegengesetzt gleichen Verhältnissen teilen, heifsen ein Paar conjugirt harmonischer Punkte in Bezug auf das Punktepaar AB. Von den Punktepaaren AB und CD teilt jedes das andere harmonisch, denn aus der Proportion $AC : CB = -AD : DB$ folgt auch $CA : AD = -CB : BD$ oder die in Bezug auf beide völlig symmetrische *Bedingung der harmonischen Lage von AB und CD:*

$$AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0.$$

Harmonische Paare AB, CD trennen sich, d. h. zwischen den Punkten eines Paares liegt stets ein Punkt des andern. Bleibt AB fest und durchläuft C die ganze Gerade, so nimmt auch der conjugirte Punkt D jede Lage einmal an, und zwar

nähern sich beide jeweilen demselben Endpunkt der gegebenen Strecke von entgegengesetzten Seiten her, da sie ja durch ihn getrennt bleiben, und fallen für $n_1 = 0$ in A, für $n_2 = 0$ in B zusammen. *Der Mitte M einer Strecke AB ($n_1 = n_2$) ist harmonisch conjugiert der ∞ Punkt ($n_1 = - n_2$) ihrer Geraden.* Somit erscheint die Halbirung einer Strecke als ein Specialfall ihrer harmonischen Teilung.

Die harmonische Lage zweier Punktepaare überträgt sich auf beliebige Parallelprojectionen derselben, da dieselben kein Teilverhältnis ändern. Auf der x-Axe gemessen, hat daher die obige Bedingung harmonischer Lage der Paare $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ und $x' | y'$, $x'' | y''$ den Ausdruck

$$(x' - x_1)(x'' - x_2) + (x'' - x_1)(x' - x_2) = 0$$

oder
$$x'x'' + x_1 x_2 - \tfrac{1}{2}(x' + x'')(x_1 + x_2) = 0.$$

Statt erst durch Coordinatentransformation AB als neue Abscissenaxe einzuführen, können wir uns weiterhin einfacher nur auf die Axenprojectionen der Punktepaare AB, CD beziehen. Die symmetrische Relation drückt jede der vier Abscissen durch die drei andern linear aus, z. B. wenn $u = \frac{x_1 + x_2}{2}$ die Abscisse des Mittelpunkts M von AB ist,

$$x'' = \frac{ux' - x_1 x_2}{x' - u}.$$

Die Einführung von u formt die allgemeine Relation um in

$$(x' - u)(x'' - u) + (x_1 - u)(x_2 - u) = 0;$$

mit der Bedeutung

$$MC \cdot MD + MA \cdot MB = 0$$

oder
$$MC \cdot MD = \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2.$$

Sind AB, CD harmonische Paare, so ist das Product der Entfernungen von C, D vom Mittelpunkt des Paares AB gleich dem Quadrat der halben Entfernung von A und B. Umgekehrt liegen also alle Paare von Punkten, deren Entfernungen von einem Punkte M ihrer Geraden ein positives constantes Product p^2 ergeben, harmonisch zu einem Paare von der Mitte M und den Abständen $+p$, $-p$.

B. 1) A und B teilen nach § 13. 6) CD in den Verhältnissen $-\nu+1:\nu'+1$, $\nu-1:\nu'+1$.

2) Die Bedingung harmonischer Teilung von AB läfst sich umformen in
$$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}.$$
Man nennt AB das *harmonische Mittel* von AC und AD.

15. **Gleichung des Punktepaares.** Die Vertauschbarkeit conjugirt harmonischer Punkte tritt in den Abscissenrelationen des vorigen § darin hervor, dafs dieselben die Abscissen der conjugirten Punkte x', x'' und x_1, x_2 nicht einzeln, sondern nur ihre Summe und ihr Product enthalten. In der Tat sind aus
$$x_1+x_2=\frac{2u}{t},\quad x_1x_2=\frac{w}{t}$$
die beiden Zahlwerte x_1, x_2 bestimmbar als die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung
$$tx^2-2ux+w=0,$$
nämlich in den beiden äquivalenten Formen
$$x=\frac{u\pm\sqrt{u^2-tw}}{t}=\frac{t}{u\mp\sqrt{u^2-tw}},$$
in welchen $u^2-tw=\mathrm{D}$ die *Discriminante der Gleichung* heifst.

Demnach können die Abscissen der Punkte eines Paares als Wurzeln einer quadratischen Gleichung definirt werden, wie die Abscisse eines einzelnen Punktes bisher aus einer linearen Gleichung $x=a$ erhalten wurde. Einer besonderen Erläuterung bedürfen offenbar nur die Fälle, wo eine der Wurzeln 0 oder ∞ sein soll. Wenn in der obigen Gleichung der Coefficient $w=0$ ist, so betrachten wir sie immer noch als eine quadratische Gleichung, deren eine Wurzel $x=0$ ist, während die andere aus $tx-2u=0$ folgt. Nun kann aber dieselbe quadratische Gleichung auch in der Form geschrieben werden
$$w\left(\frac{1}{x}\right)^2-2u\left(\frac{1}{x}\right)+t=0$$
und wir haben sie also ebenso beim Verschwinden von t noch immer als eine quadratische Gleichung zu betrachten (nicht als eine lineare), von deren Wurzeln die eine den

Wert $1 : x = 0$ oder $x = \infty$, die andere aber den Wert $1 : x = 2u : w$ oder $x = w : 2u$ hat. Dasselbe Resultat ergibt sich auch aus der Betrachtung der beiden aufgelösten Formen, da sich in denselben die Discriminante **D**, je kleiner w oder t werden, dem Werte u^2 nähert. Somit wird ein Punktepaar, das den ∞ Punkt enthält, durch eine quadratische Gleichung

$$0 \cdot x^2 - 2ux + w = 0$$

dargestellt, die scheinbar linear ist.

Setzen wir nun auch $x' + x'' = 2u' : t'$, $x'x'' = w' : t'$, so dafs

$$t'x^2 - 2u'x + w' = 0$$

x', x'' als Wurzeln liefert, so kann *die Bedingung der harmonischen Lage von* x', x'' *und* x_1, x_2 *in den Coefficienten der die Paare definirenden Gleichungen* geschrieben werden als

$$\frac{w}{t} + \frac{w'}{t'} - 2\frac{u}{t}\frac{u'}{t'} = 0 \text{ oder } 2uu' = tw' + wt'.$$

Zu zwei gegebenen Paaren kann unter Umständen ein drittes gefunden werden, das beide gleichzeitig harmonisch teilt; haben die Paare z. B. einen gemeinsamen Mittelpunkt M, so ist $M\infty$ das gemeinsame harmonische Paar. Der algebraische Ausdruck des Problems ist die Bestimmung der Coefficienten t, u, w der Gleichung $tx^2 - 2ux + w = 0$ des dritten Paares aus den Bedingungen

$$2uu' = tw' + wt', \quad 2uu'' = tw'' + wt'',$$

welche ausdrücken, dafs die Gleichungen mit den Coefficienten t', u', w' bez. t'', u'', w'' zu jenem harmonische Paare darstellen. Die beiden Relationen sind in $u : t$, $w : t$ linear, liefern für sie also stets ein einziges reelles Paar von Lösungen. Durch die Einsetzung derselben in die Gleichung des dritten Punktepaares erhalten wir als den eindeutig bestimmten Ausdruck des Problems

$$(u't'' - t'u'')\,x^2 + (t'w'' - w't'')\,x + (w'u'' - u'w'') = 0.$$

Wir wollen vorläufig auf die Discussion der Bedingungen, unter welchen diese Gleichung reelle Wurzeln hat, nicht eintreten und nur bemerken, dafs sich aus weiteren Betrachtungen (§ 95) der Satz ergeben wird: *Zwei Punktepaare besitzen ein*

gemeinsames harmonisches (reelles) Paar, wenn sie einander nicht trennen.

Jedoch wollen wir noch den algebraischen Ausdruck für den Fall direct suchen, wo als das zweite Paar der Mittelpunkt M des ersten Paares AB und der ∞ Punkt gegeben ist. Lautet die Gleichung des ersten Paares ($t = 1$ gesetzt) $x^2 - 2ux + w = 0$, so ist u die Abscisse des Mittelpunktes M. Ein zum zweiten Paar $M\infty$ harmonisches drittes Paar mufs ebenfalls M zum Mittelpunkt ($u' = u$), also die Gleichung haben $x^2 - 2ux + w' = 0$. Dasselbe ist auch zum ersten harmonisch, wenn w' aus $w + w' = 2uu' = 2u^2$ bestimmt wird; die gesuchte Gleichung ist somit

$$x^2 - 2ux + 2u^2 - w = 0.$$

B. 1) Zu den Paaren von den Abscissen $1 | 3$; $6 | 8$ liegt das Paar $x^2 - 9x + 15 = 0$ gleichzeitig harmonisch.

2) In Bezug auf $0 | -2$; $1 | -5$ sind gleichzeitig conjugirt harmonisch $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})$.

16. **Imaginäre Punkte.** Wenn wir auch jedes Punktepaar einer gegebenen Geraden durch eine quadratische Gleichung zwischen den Abscissen darstellen können, so wissen wir doch noch nicht umgekehrt jede solche Gleichung als Ausdruck einer geometrischen Beziehung zwischen Punkten zu interpretiren, sondern erst solche mit reellen Wurzeln. Nun hat die Algebra, um ihren Sätzen Allgemeinheit und Einfachheit des Ausdrucks, ihren Aufgaben die Lösbarkeit zu sichern, das Gebiet der reellen Zahlen zu dem *Gebiet der complexen Zahlen* erweitert, indem sie neben den reellen *die imaginären Einheiten* $\pm i$ durch die Definition $i^2 = -1$ einführte. Alle complexen Zahlen werden in der Form $u + iv$ erhalten, wenn u, v alle reellen Zahlwerte durchlaufen. In diesem Gebiet hat jede algebraische Gleichung zweiten Grades $ax^2 + 2bx + c = 0$ zwei Wurzeln und zwar, unter Voraussetzung reeller Coefficienten, zwei reelle, zusammenfallende oder complexe Wurzeln, je nachdem die Discriminante $\mathsf{D} = b^2 - ac$ positiv, Null oder negativ ist; dabei heifsen die Wurzeln im letzten Fall insbesondere conjugirt imaginär,

als complexe Zahlen $x = u + iv$, $\bar{x} = u - iv$, deren Summe und Product reell ist: $x + \bar{x} = 2u$, $x\bar{x} = u^2 + v^2$.

Wir werden weiterhin vielfach, zunächst am Problem des vorigen § erkennen, dafs wir diesen Sprachgebrauch der Algebra auch auf die Geometrie übertragen müssen, um in sehr vielen Fällen ihre Sätze allgemein, einfach und streng ausdrücken zu können. Auf diesem Standpunkt der Entwickelungen ist klar, dafs in der Coordinatengeometrie der geometrische Punkt völlig durch zwei reelle Zahlen ersetzt wird und dafs es durchaus folgerichtig ist zu sagen: *wir führen auch für ein Coordinatenpaar, das aus complexen Zahlen besteht, eine geometrische Bezeichnung als imaginärer (idealer) Punkt ein. Conjugirt heifsen insbesondere solche imaginäre Punkte, deren Coordinaten beide conjugirt imaginär sind.*

Wir haben gemäfs dieser Definition die für die geometrischen Beziehungen reeller Punkte gefundenen algebraischen Ausdrücke als auch für die imaginären Punkte gültig anzunehmen und für diese die geometrischen Begriffsbildungen entsprechend zu erweitern. Es mögen $x \mid y$ irgendwelche complexe Zahlen (reelle inbegriffen) bedeuten, und $\bar{x} \mid \bar{y}$ seien die zu ihnen conjugirten Complexen. Es soll dann stets die Abscissendifferenz $x'' - x'$ eine Strecke und zwar die Projection der Strecke $x' \mid y'$, $x'' \mid y''$ definiren. Reelle Entfernung besitzen also nicht nur reelle Punkte, sondern auch solche imaginäre, deren gleichnamige Coordinaten in dem rein imaginären Teil (iv) übereinstimmen; rein imaginäre Entfernung haben conjugirt imaginäre Punkte unter einander und von ihrem stets reellen Mittelpunkt $\frac{x + \bar{x}}{2} \,\Big|\, \frac{y + \bar{y}}{2}$. Wenn ein dritter Punkt $x_3 \mid y_3$ mit $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$ allgemein das Teilverhältnis bestimmt $x_3 - x_1 : x_2 - x_3 = y_3 - y_1 : y_2 - y_3$, so wollen wir, auch wenn dasselbe einen complexen Wert hat, sagen, der Punkt $x_3 \mid y_3$ sei ein Teilpunkt der Strecke $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$ in der durch diese beiden bestimmten Geraden. Wir erkennen also: *in jeder reellen Geraden liegen imaginäre Punkte,* und zwar zweifach unendlich viele, die erhalten werden, wenn das Teilverhältnis auch jeden complexen Zahlwert annimmt (vgl. § 13).

Ein Paar conjugirt imaginärer Punkte wird durch eine quadratische Gleichung mit reellen Coefficienten dargestellt. In Bezug auf jedes Paar reeller oder conjugirt imaginärer Punkte bildet daher mit jedem reellen ein reeller, mit jedem imaginären der conjugirt imaginäre Punkt ein harmonisches Paar, denn nur $(x - u)(\bar{x} - u)$ kann zugleich mit u reell sein, wie die Bedingung harmonischer Lage in § 14 es verlangt. Das Problem des § 15 liefert zu zwei reellen Gleichungen eindeutig eine dritte reelle Gleichung. Somit ist das *zu zwei willkürlich gegebenen gleichzeitig harmonische Paar völlig eindeutig durch dieselben mit definirt,* selbst wenn es aus conjugirt imaginären Punkten besteht.

* 17. **Darstellung imaginärer Punkte aus ihren Coordinaten.** Der imaginäre Punkt kann in keiner Weise direct geometrisch veranschaulicht werden, so lange die reellen Coordinatenpaare die reellen Punkte der Ebene bedeuten*). *Unter einer geometrischen Darstellung eines imaginären Punktes kann man nur die Angabe solcher reeller Punkte verstehen, die zu seiner für geometrische Constructionen verwendbaren Definition ausreichen.* Die Möglichkeit, ein Paar conjugirt imaginärer Punkte durch reelle zu definiren, eröffnet aber die Schlufsanwendung von § 15: *zu einem Punktepaar von der Gleichung*

$$x^2 - 2ux + w = 0$$

existirt stets ein und nur ein harmonisches Paar mit demselben Mittelpunkt u von der Gleichung

$$x^2 - 2ux + 2u^2 - w = 0.$$

Ist die Discriminante der ersten Gleichung positiv $u^2 - w = v^2$, ist also das gegebene Paar reell und hat die Abscissen $u \pm v$, so ist die Discriminante der zweiten Gleichung notwendig

*) So ist die bekannte Gaufs'sche Darstellung der complexen Zahlen $x = u + iv$ durch die reellen Punkte von den rechtwinkligen Coordinaten $u \mid v$ nicht im Sinn der Euklid'schen Geometrie geometrisch zu nennen, denn sie interpretirt nur *eine* Variable im algebraischen Sinn. Diese Interpretation hat mehrfach zu der irrigen Anschauung geführt, der Punkt von den Coordinaten $u + iv \mid 0$ liege nicht in der x-Axe, während er doch die Strecke $u \mid 0$, $v \mid 0$ teilt.

negativ $u^2 - (2u^2 - w) = -u^2 + w = -v^2$ und das abgeleitete Paar besteht aus den conjugirt imaginären Punkten $u \pm iv$.

Somit ist das Paar der Punkte mit den conjugirt imaginären Abscissen $u \pm iv$ eindeutig definirt durch das reelle Paar von den Abscissen $u \pm v$, als das Paar, welches zu diesem und dem aus dem Mittelpunkt u und dem ∞ Punkt bestehenden Paare gleichzeitig harmonisch liegt. Setzen wir

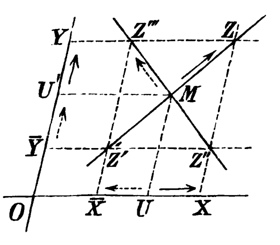
$$x = u + iv, \quad \bar{x} = u - iv, \quad X = u + v, \quad \bar{X} = u - v,$$

so folgt

$$u = \frac{x + \bar{x}}{2} = \frac{X + \bar{X}}{2}, \qquad v = \frac{x - \bar{x}}{2i} = \frac{X - \bar{X}}{2}.$$

Wir können etwa *die Punkte X, $\bar{X}$ das Stellvertreterpaar der Punkte x, $\bar{x}$ nennen.*

Um endlich auch die conjugirt imaginären Punkte x und $\bar{x}$ von einander zu unterscheiden, wollen wir festsetzen, daſs dem Sinne $X\bar{X}$ in der durch das Stellvertreterpaar begrenzten Strecke auch der Sinn $x\bar{x}$ in der imaginären Strecke entsprechen solle. Alsdann genügt die Festsetzung, daſs *der Sinn des Stellvertreterpaares den Endpunkt der imaginären Strecke charakterisire,* der positive Sinn $\bar{X}X$ also den Punkt x mit positivem imaginären Teil, ($u + iv$ wenn $v > 0$), $X\bar{X}$ dagegen $\bar{x}$. In der Zeichnung wird der Sinn durch einen Pfeil, in der Schreibung durch die Aufeinanderfolge angegeben, wobei die im reellen Gebiete nur stellvertretende Bedeutung etwa durch beigefügte Klammern angedeutet werden mag, also



$$x = \{\bar{X}, X\}, \quad \bar{x} = \{X, \bar{X}\}.$$

Jetzt können wir jeden Punkt von gegebenen Parallelcoordinaten $x = u + iv$, $y = u' + iv'$ in reeller Form eindeutig darstellen. In der Abscissenaxe ist

$$x = \{\bar{X}, X\} = \{u - v, u + v\},$$

in der Ordinatenaxe

$$y = \{\overline{Y},\ Y\} = \{u' - v',\ u' + v'\},$$

also ist $x \mid y$ dargestellt durch

$$\{Z',\ Z\} = \{u - v \mid u' - v',\ u + v \mid u' + v'\}.$$

In der Tat ist $\overline{x} \mid \overline{y}$ davon unterschieden als $\{Z,\ Z'\}$, $x \mid \overline{y}$ als $\{Z''',\ Z''\}$ und $\overline{x} \mid y$ als $\{Z'',\ Z'''\}$. Zugleich sehen wir, *dafs je zwei conjugirt imaginäre Punkte* $x \mid y$, $\overline{x} \mid \overline{y}$ *eine reelle Verbindungsgerade* ZZ' *bestimmen, welche ihr reeller Träger heifst.*

Somit wird ein imaginärer Punkt der Ebene eindeutig dargestellt durch Angabe seiner reellen Verbindungslinie mit seinem Conjugirten, des Stellvertreterpaares und eines Sinnes in derselben. Wir werden an anderer Stelle (§ 96) diese Methode als die symmetrische Form einer zuerst von *von Staudt* gegebenen Definition erkennen und mit derselben geometrisch operiren lernen, wofür hier einige elementare Beispiele schon gegeben werden können.[3])

B. 1) In Bezug auf das imaginäre Paar $a \pm bi$ (vom Mittelpunkt a) findet man den zu dem reellen Punkt x' conjugirt harmonischen x'' aus der Gleichung (§ 14)

$$(x' - a)(x'' - a) = (bi)^2 = -b^2.$$

Derselbe ist also bezüglich a der symmetrische zu dem conjugirt harmonischen von x' in Bezug auf das Stellvertreterpaar $a \pm b$.

2) Dieselbe Gleichung liefert die reelle Definition eines zu einem reellen Paare x', x'' harmonischen Paares, dessen Mittelpunkt zwischen x' und x'' liegt.

3) Zu einem gegebenen imaginären Paar $\{a \pm b\}$ das harmonische Paar $c \pm d$ von gegebenem Mittelpunkt zu finden, lehrt die Gleichung $(c - a)^2 + b^2 = d^2$.

4) Man verificirt nach § 13, dafs $a \pm bi$ die Strecke $a \pm b$ harmonisch teilt im Verhältnis $\pm i$.

Zweites Kapitel.

Der Gleichungsbegriff und die Gerade.

18. **Eine Gleichung zwischen den Coordinaten definirt einen geometrischen Ort.** Wenn die auf gegebene Axen bezogenen Coordinaten $x|y$ unabhängig von einander beliebige Werte $x = a$, $y = b$ annehmen, so entspricht der Gesammtheit der Wertepaare der beiden unabhängigen Veränderlichen (Variabeln) die Gesammtheit der Punkte der Ebene und nach unsern Festsetzungen (§ 16) auch umgekehrt. Eine Abhängigkeit zwischen diesen Variabeln wird ausgedrückt, wenn eine Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

von ihnen erfüllt sein soll. *Wir setzen die Function $f(x, y)$ stetig und auf die Form einer ganzen rationalen Function gebracht voraus.* Jede der Variabeln wird durch das Bestehen dieser Gleichung eine stetige Function der andern.

Eine solche Gleichung reicht nicht hin, zwei Unbekannte $x|y$ zu bestimmen; vielmehr genügt immer noch eine unbegrenzte Anzahl von Wertepaaren $x|y$ der Gleichung. Aus den sämmtlichen Punkten der Ebene wird also eine Vereinigung von unendlich vielen Punkten ausgeschieden, deren Coordinaten durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ verbunden sind*). *Diese Vereinigung haben wir als die geometrische*

---

*) Die Gesammtheit der Werte von n Variabeln heifst eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit;* daher heifst die Gesammtheit der Punkte der Ebene ein Gebilde von zwei Dimensionen oder zweiter Stufe, die Punkte von deren Coordinaten nur eine unabhängig veränderlich ist, ein Gebilde von einer Dimension oder erster Stufe.

Bedeutung der Gleichung anzusehen und nennen sie den durch die Gleichung definirten geometrischen Ort oder den Ort von der Gleichung $f(x, y) = 0$.

Wir kennen schon verschiedene Beispiele geometrischer Örter. Nach § 5 hat ein Punkt von den rechtwinkligen Coordinaten $x \mid y$ die Entfernung d von $a \mid b$, wenn

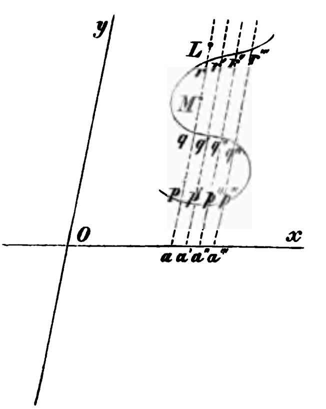
$$d^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Diese Gleichung wird aber, wenn wir $a \mid b$ und d gegeben denken, durch unzählige Wertepaare $x \mid y$ erfüllt, nämlich durch die Coordinaten aller Punkte auf einer mit dem Radius d um $a \mid b$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreisperipherie, aber nicht durch die anderer Punkte, da solche einen von d verschiedenen Abstand haben. Also ist diese Kreislinie der Ort, welchen die Gleichung darstellt (vgl. § 7).

Wenn wir ferner von einem Punkte nur wissen, dafs er die Abscisse $x = a$ hat, so kann er, welches auch seine Ordinate sei, nur in der zur y-Axe parallelen Geraden liegen, welche die x-Axe in der Entfernung a vom Nullpunkt schneidet (§ 2). Wird also der Wert von y unbestimmt gelassen, so ist jene y-Parallele ($P'P$) der Ort der durch die eine Gleichung $x = a$ dargestellten Punkte $a \mid y$. So ist die y-Axe z. B. der Ort der Punkte von der Abscisse Null. Wir haben in der x-Axe auch schon zwei Punkte zugleich definirt durch eine Gleichung zweiten Grades in x (§ 15). Derselben Gleichung genügen also die Abscissen aller Punkte in den beiden y-Parallelen, welche durch jene beiden Punkte der x-Axe gehen. So erkennen wir allgemein: *eine Gleichung, welche die eine Coordinate y bez. x nicht enthält, definirt einen Ort, der aus parallelen Geraden zur y- bez. x-Axe besteht.*

19. Ist das Coordinatensystem und eine Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben, so können wir von dem durch sie definirten Ort so viele Punkte bestimmen, als wir nötig haben. Wir nehmen für die Abscisse einen beliebigen Wert an $x = a$ und suchen, welche Wertepaare $a \mid y$ der gegebenen Gleichung genügen, bestimmen also die Ordinaten y so, dafs $f(a, y) = 0$ wird. Die numerische Auflösung dieser Gleichung für die Unbekannte y gibt bestimmte Wurzeln $y = p, q, r, \ldots$

Jeder Punkt $a|p$, $a|q$, $a|r, \ldots$, dessen Abscisse der angenommene Wert und dessen Ordinate eine jener Wurzeln ist, gehört dem gesuchten Orte an, da seine Coordinaten die Gleichung desselben erfüllen. Sodann nehmen wir für x irgend einen anderen Wert a' und finden aus $f(a', y) = 0$ als Wurzeln die Ordinaten einer zweiten Reihe von Punkten $a'|p'$, $a'|q'$, $a'|r', \ldots$ desselben Ortes, u. s. w. Wir erhalten dergestalt beliebig viele getrennte (discrete) Punkte, die dem Orte angehören.



Nun soll aber y eine stetige Function von x sein, d. h. unendlich kleinen Änderungen von x sollen auch unendlich kleine Änderungen von y entsprechen vermöge $f(x, y) = 0$. Genauer gesprochen heifst dies: macht man die Abscissendifferenz $a' - a$ beliebig klein, so werden auch die Ordinatendifferenzen $p' - p$, $q' - q$, $r' - r, \ldots$ kleiner als jeder angebbare kleine Betrag. Denken wir also die Intervalle der aufeinanderfolgenden y-Parallelen von den Abscissen a, a', $a'', \ldots$ unmefsbar klein, so liegen auch die in ihnen enthaltenen Punkte des Ortes, in gewissen Folgen, einander unmefsbar nahe oder bilden continuirliche Reihen. Die Punkte des Ortes sind also durch einen stetigen Linienzug zu verbinden: *der durch die Gleichung definirte Ort ist eine Curve; $f(x, y) = 0$ heifst die Gleichung der Curve.* Die den Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $x = a$ gleichzeitig genügenden Punkte heifsen die Schnittpunkte der Curve mit dieser y-Parallelen.

Die reellen Punkte der Curve können so sofort in dem Axensystem graphisch eingetragen werden und bilden die *reellen Curvenzüge**). Wir sagen aber überhaupt: *die Curve*

---

*) Diese graphischen Darstellungen der Curven aus Gleichungen sind äufserst nützliche Übungen für den Anfänger. Für die Beispiele unten ist die Verwendung von Papier mit Quadrateinteilung zu empfehlen. Insbesondere findet obiges Verfahren häufige Anwendungen

geht durch den Punkt $x' \mid y'$, oder der Punkt liegt auf der Curve, wenn für seine Coordinaten $f(x', y') = 0$ ist. Daher gehören der Curve auch die imaginären Punkte an, deren complexe Coordinaten ihre Gleichung befriedigen und nach demselben Verfahren gefunden werden. Haben insbesondere die Coefficienten der Gleichung reelle Werte oder, kürzer gesagt, ist die Gleichung $f(x, y) = 0$ selbst reell, so gehören bekanntlich die complexen Wertepaare, welche ihr genügen, paarweise zusammen: befriedigen $x = u + vi$, $y = u' + v'i$ die Gleichung, so auch $\bar{x} = u - vi$, $\bar{y} = u' - v'i$. *Liegt also auf einer Curve von reeller Gleichung ein imaginärer Punkt, so geht sie auch durch den conjugirt imaginären Punkt.*

* *Zusatz.* Die Coordinaten eines nicht der Curve angehörigen Punktes geben, in $f(x, y)$ eingesetzt, einen von Null verschiedenen Functionswert; derselbe ist reell, wenn die Gleichung und $x \mid y$ reell sind. Bewegt sich der reelle Punkt $x \mid y$ in der Ebene, so geben die Coordinaten aller aufeinanderfolgenden Lagen Functionswerte $f(x, y)$ von unveränderlichem Vorzeichen, bis der bewegliche Punkt die Curve $f(x, y) = 0$ überschreitet oder ins Unendliche rückt. Denn nur durch die Werte 0 und ∞ hindurch kann ein Functionswert sein Vorzeichen wechseln; so geben also die Coordinaten von L und die von M in der Fig. den Functionswerten $f(x, y)$ entgegengesetzte Vorzeichen. *Die reellen Curvenzüge zerschneiden somit die Ebene in Felder, deren Begrenzung eventuell durch das Unendliche vervollständigt wird, so dafs für alle Punkte eines Feldes die Function $f(x, y)$ Werte von constantem Vorzeichen annimmt.* Dadurch kann man eine positive und eine negative Seite der Curve unterscheiden.

B. 1) Man verzeichne in einer Figur eine Reihe von Punkten, welche der Gleichung $y = 2x + 3$ genügen.

Für die Werte $x = -2, -1, 0, 1, 2$ etc. findet man die

---

in den Naturwissenschaften, um zu den auf experimentellem Weg gefundenen zusammengehörigen Werten zweier Gröfsen durch die interpolirte Curve das allgemeine Gesetz der Abhängigkeit zwischen denselben herzustellen.

Werte von y bez. gleich $-1, 1, 3, 5, 7$ etc.; die entsprechenden Punkte liegen alle in einer Geraden.

2) Man verzeichne den durch die Gleichung

$y = x^2 - 3x - 2$ dargestellten Ort.

Man findet für $x = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$ die bez. Werte $y = 2, -\frac{1}{4}, -2, -\frac{13}{4}, -4, -\frac{17}{4}, -4, -\frac{13}{4}, -2, -\frac{1}{4}, 2$. Wenn man diese Punkte aufträgt, so reichen sie hin, die Form der Curve anzudeuten, welche dann unbegrenzt fortgesetzt werden kann, indem man dem x gröfsere positive oder negative Werte gibt.

3) Man stelle die Curve $y = 3 \pm \sqrt{(20 - x - x^2)}$ dar. Jedem Werte von x entsprechen zwei Werte von y; kein reeller Zug der Curve liegt rechts von der Geraden $x = 4$ oder links von der Geraden $x = -5$, da für gröfsere positive oder negative Werte von x der Wert von y imaginär wird.

20. **Aus der gegebenen Gleichung eines Ortes kann eine unbegrenzte Anzahl anderer Gleichungen abgeleitet werden, die denselben Ort darstellen.** Hat die Curve in einem gegebenen Coordinatensystem die Gleichung $f(x, y) = 0$, so stellt offenbar zunächst auch jede Gleichung $cf(x, y) = 0$ denselben Ort dar, wenn c eine willkürliche von Null verschiedene Constante ist; denn die Functionen $f(x, y)$ und $cf(x, y)$ verschwinden nur gleichzeitig. *Jede Gleichung darf, ohne ihre geometrische Bedeutung zu ändern, mit beliebigen constanten Factoren multiplicirt werden.* Daher kann z. B. ein beliebiger Coefficient der Gleichung gleich Eins gemacht werden.

Wird ferner statt der Längeneinheit etwa der k^{te} Teil derselben als neue Einheit eingeführt, so lautet die Gleichung in den nach dem neuen Mafse gemessenen Coordinaten

$$f(kx', ky') = 0.$$

Die wichtigsten Umformungen einer Gleichung, welche ihre geometrische Bedeutung nicht beeinflussen, sind die Coordinatentransformationen. Nehmen wir als Axen der $x' | y'$ zwei Gerade, die mit der x-Axe die Winkel α, β machen und deren Schnittpunkt die Coordinaten $x_0 | y_0$ hat, so sind (§ 10) an die Stelle der alten Variabeln x, y einzusetzen die Ausdrücke:

$$x = x_0 + x' \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega} + y' \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin \omega}, \quad y = y_0 + x' \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} + y' \frac{\sin \beta}{\sin \omega}.$$

Die Coordinatentransformationen gehören so zu den *linearen Substitutionen, unter denen man die Ersetzung der Variabeln $x \mid y$ durch lineare Functionen zweier neuen Variabeln $x' \mid y'$ versteht.* Ordnet man die gegebene Gleichung, nach Ausführung obiger Substitution für $x \mid y$, nach Potenzen der neuen Variabeln $x' \mid y'$, so nimmt sie eine im allgemeinen ganz verschiedene Form an $f'(x', y') = 0$, aber $f(x, y) = 0$ und $f'(x', y') = 0$ stellen ein und dieselbe Curve, auf verschiedene Axen bezogen, dar. Alle diese geometrisch äquivalenten Gleichungsformen sind in $f(x, y) = 0$ enthalten, wenn man für die Variabeln die obigen linearen Ausdrücke eingesetzt und darin den vier Gröfsen x_0, y_0, α, β beliebige Werte beigelegt denkt.

Endlich erhält die ursprüngliche Gleichung noch andere Formen durch den Übergang zu anderen Arten von Coordinaten, z. B. von Parallel- zu Polarcoordinaten. Der Ausdruck dafür ist die Substitution (§ 7)

$$x = r \frac{\sin(\omega - \vartheta)}{\sin \omega}, \quad y = r \frac{\sin \vartheta}{\sin \omega}$$

und das Resultat derselben ist *die Gleichung der Curve* $f(x, y) = 0$ *in Polarcoordinaten* $\varphi(\vartheta, r) = 0$, wenn

$$f\left(r \frac{\sin(\omega - \vartheta)}{\sin \omega}, \ r \frac{\sin \vartheta}{\sin \omega}\right) = \varphi(\vartheta, r).$$

Umgekehrt kann jede vorgelegte Gleichung zwischen zwei Variabeln $f(x, y) = 0$ *in verschiedenen Coordinatensystemen interpretirt werden und stellt alsdann im allgemeinen verschiedene Örter dar.* So ist z. B. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = d^2$ in rechtwinkligen Coordinaten die Gleichung eines Kreises (§ 18), dagegen die Gleichung einer ganz anderen Curve, sobald wir die Coordinaten schiefwinklig denken. Denn bei beliebigem Axenwinkel ω drückt jene Gleichung nicht mehr aus, dafs die Punkte $x \mid y$ und $a \mid b$ den constanten Abstand d haben (vgl. § 5). Jedoch stehen die Punkte $x' \mid y'$ dieser neuen Curve zu den $x \mid y$ des Kreises in einer gewissen Abhängigkeit oder Beziehung, deren Ausdruck geliefert wird durch die Formeln der Transformation zwischen den beiden

Axensystemen, wenn man jene zweite Auffassung derselben gemäfs § 12 weiter ausbildet (vgl. Kap. IV).

B. 1) Die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes genügen der Relation $(y - \frac{1}{2})^2 + x^2 = \frac{1}{4}$; wenn die y-Axe als Nullaxe vor Polarcoordinaten mit denselben Nullpunkt genommen wird, so hat dieselbe Curve die Gleichung $r = \cos\vartheta$. (§ 7.)

2) Man transformire die Gleichung $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 4$ von Axen, welche unter dem Winkel von 60^0 geneigt sind, zu den Halbirungslinien der Winkel zwischen den alten Axen. Sie wird $x'^2 - 27\,y'^2 + 12 = 0$. (§ 11. 2)).

3) Man zeichne die Curve $(x - 2)^2 + y^2 = 9$, wenn die Gleichung auf Axen von dem Winkel $\omega = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ successive bezogen wird.

21. **Analytische Geometrie der Ebene.** Die reine Geometrie definirt ihre Gebilde durch gewisse geometrische Eigenschaften derselben. Offenbar können wir aber irgendwelche Lagenbeziehungen zwischen Punkten in Coordinatenausdrücken angeben, denn für die elementare Grundlage derselben, die Entfernung zweier Punkte, kennen wir schon eine allgemeine Coordinatenformel. Die geometrische Definition einer Curve können wir daher umsetzen in eine Gleichung zwischen Coordinatenausdrücken, derart dafs diese Gleichung von den Coordinaten aller Punkte erfüllt wird, die jene geometrischen Lageneigenschaften besitzen. Wenn z. B. der Kreis der Ort eines Punktes constanter Entfernung von einem festen Punkt ist, so ist seine Gleichung die Bedingung, dafs der Coordinatenausdruck der Distanz von jenem einer Constanten gleich sei.

Wenn umgekehrt eine Gleichung zwischen Coordinaten gegeben ist, so werden die geometrischen Eigenschaften der durch sie dargestellten Curve aus ihr abzuleiten sein. Zunächst drückt offenbar die gerade vorgelegte Gleichung gewisse Lageneigenschaften der Curvenpunkte gegenüber einem Axensystem aus, von dessen Wahl die geometrischen Eigenschaften der Curve selbst ihrem Wesen nach gänzlich unabhängig sind. Daraus schliefsen wir einerseits, dafs wir die Gleichung durch Transformation unter Umständen vereinfachen und zur Untersuchung gewisser Aufgaben geschickter machen können.

Hat z. B. die Curve eine Symmetrieaxe, so läfst sich dies aus der vorgelegten Gleichung $f(x, y) = 0$ zwar auch finden, aber man erkennt es unmittelbar, wenn man sie so zu rechtwinkligen Coordinaten transformirt, dafs jene Symmetrieaxe etwa zur x'-Axe wird. Denn die neue Gleichung enthält dann notwendig nur gerade Potenzen von y', gibt also zu jedem x' paarweise entgegengesetzt gleiche Wurzeln $\pm y'$ (vgl. § 11, 2)).

Anderseits folgern wir, dafs sich auch an der allgemeinen Form des Coordinatenausdrucks einer geometrischen Eigenschaft die Unabhängigkeit seiner Bedeutung irgendwie zeigen wird. Ein wichtiges Beispiel bietet uns dafür die Distanzformel:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega;$$

denn, transformiren wir sie zu Axen von dem Winkel ω' und werden $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ zu $x_1' | y_1'$, $x_2' | y_2'$, so kann die transformirte Formel so geschrieben werden, dafs sie aus der vorigen durch die angedeutete Substitution (Beisetzung der Accente) hervorgeht (vgl. § 10. 2). Das Kennzeichen geometrischer Bedeutung der rechten Seite ist diese Übereinstimmung ihrer Form in der ursprünglichen und der transformirten Gestalt.

Die Disciplin, welche die geometrischen Probleme auf Grund des Coordinatenbegriffs nach rechnenden Methoden behandelt, heifst analytische Geometrie. Gerade die Einführung der dem Wesen der geometrischen Untersuchung ganz fremden Coordinaten, die so die analytische Geometrie charakterisirt, scheint ein Umweg zu sein, da erst die Unabhängigkeit von der Coordinatenwahl geometrische Bedeutung geben kann. In Wahrheit verleiht ihr dieses Hilfsmittel jedoch einen enormen Vorteil vor der reinen oder *synthetischen Geometrie*, die nur mit den geometrischen Elementen unmittelbar operirt, denn es befähigt sie, die Theorien und Methoden der *Algebra* und *Analysis* im weitesten Umfange ihren geometrischen Zwecken dienstbar zu machen.

22. **Ordnung algebraischer Curven.** Man unterscheidet *transcendente und algebraische Curven*, je nachdem deren

Gleichung in Parallelcoordinaten $f(x, y) = 0$ transcendent oder algebraisch ist. Daher stellen Gleichungen in Polarcoordinaten algebraische Curven dar, wenn sie den Vector r und die trigonometrischen Functionen von ϑ in algebraischen Verbindungen enthalten. Fernerhin sollen *ausschliefslich* nur algebraische Curven in Betracht gezogen werden.

Eine algebraische Gleichung besitzt einen bestimmten *Grad* n, welcher den höchsten Wert der Exponentensumme der Variabeln in einem Glied darstellt. So ist z. B. die Gleichung $xy + 2x + 3y - 4 = 0$ vom zweiten Grad, wird aber vom ersten Grad, sobald das erste Glied fehlt.

*Der Grad n einer Gleichung wird durch Coordinatentransformation**) *nicht geändert.* Denn erstens kann eine solche den Grad n der Gleichung nicht erhöhen. Ist nämlich ein Glied mit der *höchsten* Exponentensumme $x^m y^{n-m}$, so geht dasselbe durch Transformation über in das Product der m^{ten} und $n - m^{\text{ten}}$ Potenz je einer linearen Function der neuen Variabeln $x' \mid y'$; dann kann offenbar in keinem Glied der Entwickelung nach Potenzen $x' \mid y'$ die Exponentensumme n überschreiten. Zweitens kann die Transformation den Grad auch nicht erniedrigen, weil man durch die umgekehrte, wiederum lineare Transformation der transformirten Gleichung die ursprüngliche Gleichung wieder herstellen, den allfällig verminderten Grad also wieder auf n erhöhen müfste, entgegen dem eben bewiesenen.

Der Grad der Gleichung ist somit eine von der Axenwahl unabhängige, also geometrische Eigenschaft der Curve selbst. *Man nennt eine Curve, deren Gleichung vom n^{ten} Grade ist, eine Curve n^{ter} Ordnung.*

*Eine allgemeine Gleichung n^{ten} Grades wie $f(x, y) = 0$, steigt auch in jeder einzelnen Variabeln bis zum n^{ten} Grade an, enthält also Glieder x^n, y^n. Zu jeder Abscisse $x = a$ gehören vermöge $f(a, y) = 0$ (§ 19) algebraisch wirklich auch n Wurzeln y. Dabei sind nicht nur die imaginären mitgerechnet, sondern eine Wurzel $y = p$ ist auch k mal ge-

*) Überhaupt durch lineare Substitution nicht (§ 88 ff.).

zählt, wenn die Zerlegung von $f(a, y)$ in lineare Factoren den Factor $(y-p)^k$, aber nicht $(y-p)^{k+1}$ enthält. Wenn wir nun die Schnittpunkte der Curve in der y-Parallelen in derselben Weise zählen, uns also auch den Begriff bilden, dafs mehrere Punkte in einen zusammenfallen können, so enthält jede y-Parallele genau n Curvenpunkte.

Nun können wir aber durch Transformation mit festem Nullpunkt und fester x-Axe zu jeder Geraden eine parallele y'-Axe finden, vermittelst der Substitution

$$x = x' + y' \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin \omega}, \quad y = y' \frac{\sin \beta}{\sin \omega} \quad (\S\ 10\ \alpha = 0).$$

Wenn dabei in der transformirten Gleichung der Coefficient von y'^n verschwinden soll, mufs β aus einer endlichen Zahl von bestimmten Werten genommen werden, denn jener Coefficient ist eine algebraische Function von $\sin \beta$, $\cos \beta$. In unendlich vielen Fällen ist also die transformirte Gleichung in y' wirklich vom n^{ten} Grad, wie für den obigen Satz vorausgesetzt war. In einer endlichen Anzahl von transformirten Gleichungen steigt y' nur bis zur $n - r^{\text{ten}}$ Potenz wirklich auf, und wir haben dieselben nach § 15 als Gleichungen n^{ten} Grades in y' anzusehen, die r Wurzeln $y' = \infty$ besitzen, können also wiederum n Curvenpunkte auf der y'-Parallelen zählen, wenn r derselben im Punkte ∞ zusammenfallen. Da wir aber jede Gerade zu einer y'-Parallelen machen können, *so hat jede Gerade der Ebene n Schnittpunkte mit der Curve n^{ter} Ordnung. Diese Schnittpunktzahl ist die geometrische Definition der Ordnungszahl n der Curve.*

23. **Bézout'sches Theorem.** Wenn die Function n^{ten} Grades $f(x, y)$ in ein Product mehrerer Functionen niederer Grade $g(x, y)$, $h(x, y) \ldots$ zerlegt werden kann, so sagt man, *die Gleichung $f(x, y) = 0$ zerfällt in die Gleichungen $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = 0, \ldots$ oder die Curve $f = 0$ degenerirt in die Curven* $g = 0$, $h = 0, \ldots$, denn alle Wertepaare $x \mid y$, die einen Factor $g(x, y)$, $h(x, y), \ldots$ zu Null machen, erfüllen die ursprüngliche Gleichung. Demnach bilden mehrere Curven zusammen eine zerfallende (singuläre) Curve n^{ter} Ordnung, wenn die Summe der Ordnungszahlen derselben n beträgt; denn multi-

plicirt man ihre Gleichungen $g = 0$, $h = 0, \ldots$ Seite für Seite, so ist $g \,.\, h \ldots = 0$ eine Gleichung n^{ten} Grades. Haben zwei Functionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ einen gemeinsamen Factor $g(x, y)$, so ist die Curve $g = 0$ eine Teilcurve der beiden durch $f = 0$, $\varphi = 0$ dargestellten zerfallenden Örter.

Dagegen bestimmen zwei Gleichungen $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, wenn f und φ keinen gemeinsamen Factor haben, *nur eine endliche Anzahl gemeinsamer Wertepaare.* Und zwar sagt das *Bézout'sche Theorem* aus: *zwei allgemeinen Gleichungen m^{ten} und n^{ten} Grades genügen gleichzeitig genau mn Wertepaare der Unbekannten.* Bei specieller Beschaffenheit der Coefficienten ist mn scheinbar nur die obere Grenze der Zahl gemeinsamer Wurzeln und es müssen die mehrfach erwähnten Zählmethoden von unendlich grofsen und von zusammenfallenden Wurzeln zu Hilfe genommen werden. Geometrisch interpretirt lautet dieser Fundamentalsatz: *zwei Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung haben stets mn reelle oder imaginäre, gesonderte oder zusammenfallende, endlich oder unendlich entfernte Schnittpunkte.*

Im früheren sind schon zahlreiche Specialfälle dieses Theorems enthalten. So ist durch $x = a$, $y = b$ ein einziger Punkt bestimmt, aber überhaupt auch durch irgend zwei Gleichungen ersten Grades, denn wir erhalten zwei Resultate der obigen Form, indem wir zwischen ihnen nach einander y und x eliminiren. So gibt die Einsetzung eines constanten Wertes für eine Variable in eine Gleichung n^{ten} Grades eine Gleichung n^{ten} Grades für die andere; dasselbe gilt aber noch, wenn wir zwischen der gegebenen und irgend einer linearen Gleichung eine Variable eliminiren. Ganz allgemein findet man die gemeinsamen Wurzeln zweier Gleichungen m^{ten} und n^{ten} Grades durch Elimination einer Variabeln, z. B. y, woraus *eine Resultante des Grades mn* in x entspringt. Setzen wir irgend eine Wurzel $x = a_k$, welche das Eliminationsresultat gleich Null macht, in die gegebenen Gleichungen ein, so müssen die beiden Gleichungen in y eine gemeinsame Wurzel b_k haben und dann genügt $a_k \,|\, b_k$ beiden Gleichungen. („Vorlesungen ü. d. Algebra d. lin. Transf." 2. Aufl. § 70.) —

Wir untersuchen nun hier die Form und die Eigenschaften der durch die *Gleichungen ersten und zweiten Grades* dargestellten Curven, wobei manche in diesen §§ zusammengestellten allgemeinen Begriffe ihre nochmalige elementare Begründung und Erläuterung finden werden*).

B. 1) Durch die Gleichungen $3x + 5y = 13$, $4x - y = 2$ ist der Punkt $1 \mid 2$ gegeben.

2) Um die durch die zwei Gleichungen $x^2 + y^2 = 5$, $xy = 2$ dargestellten Punkte zu finden, eliminiren wir y zwischen denselben und erhalten $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $x^2 = 1$, $x^2 = 4$, daher die vier Werte von x

$$x = +1, \quad -1, \quad +2, \quad -2.$$

Indem wir einen dieser Werte in die zweite Gleichung einsetzen, erhalten wir den correspondirenden Wert von y, nämlich bez.

$$y = +2, \quad -2, \quad +1, \quad -1.$$

Die zwei gegebenen Gleichungen repräsentiren daher die vier Punkte $1 \mid 2$, $-1 \mid 2$, $2 \mid 1$, $-2 \mid -1$.

3) Durch die Gleichungen $x - y = 1$, $x^2 + y^2 = 25$ sind die Punkte $4 \mid 3$, $-3 \mid -4$ gegeben.

4) Die Gleichungen

$$x^2 - 5x + y + 3 = 0, \quad x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = 0$$

bestimmen die Punkte $1 \mid 1$, $2 \mid 3$, $3 \mid 3$, $4 \mid 1$.

24. Wir beginnen mit der **Gleichung ersten Grades** und werden beweisen, *dafs dieselbe stets eine gerade Linie darstellt*, sowie umgekehrt, *dafs die Gleichung einer Geraden stets vom ersten Grade oder linear ist.*

Die beiden wichtigen einfachsten Fälle haben wir schon kennen gelernt. So haben wir in § 18 die Gleichung $x = a$ als die einer y-Parallelen interpretirt, während $y = b$ eine x-Parallele darstellt, welche die x-Axe in der Entfernung b vom Nullpunkt schneidet.

Der Fall, dafs eine Gerade *durch den Nullpunkt* geht, ist eigentlich durch § 7 schon erledigt. In der Tat, verschieben wir in einer solchen Geraden einen Punkt P, so ändern

*) Anfänger mögen sich daher damit begnügen, sich die in diesen §§ für bekannte algebraische Sätze eingeführte geometrische Redeweise zu merken.

sich zwar beide Coordinaten $P''P$, $P'P$, aber ihr Verhältnis ist constant, nämlich gleich dem Verhältnis

$$\sin P'OP : \sin POP'' = \sin\alpha : \sin(\omega - \alpha),$$

wenn α der *Neigungswinkel* (die Anomalie) der Geraden gegen die positive x-Axe ist. Demnach besteht zwischen allen $x \mid y$, welche zu Punkten dieser Geraden gehören, die Relation

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)} \cdot x$$

oder diese ist die Gleichung dieser Geraden.

Umgekehrt verlangt die Bestimmung des durch die Gleichung

$$y = mx$$

dargestellten Ortes, den Ort des Punktes P so zu finden, dafs $x : y = OP' : P'P = 1 : m$ ist. Nach der Eigenschaft ähnlicher Dreiecke $OP'P$ ist dieser Ort eine durch den Axenschnittpunkt gehende Gerade OP, welche den Axenwinkel ω so teilt, dafs $\sin P'OP = m \sin OPP'$ ist.

Bei rechtwinkligen Axen ist $\sin OPP' = \cos P'OP$, also $m = \tan P'OP$. Die durch $y = mx$ dargestellte Gerade ist also diejenige Gerade durch den Nullpunkt, deren Neigungswinkel $\alpha = \operatorname{arc}\tan m$ ist.

Je nachdem m positiv oder negativ ist, liegt die Gerade in den Feldern XOY, $X'OY'$ oder YOX', $Y'OX$. Denn aus $y = +mx$ folgt, dafs für positive x auch y positiv, für negative x auch y negativ ist; um dagegen der Gleichung $y = -mx$ zu genügen, mufs y für positive x negativ, für negative x positiv sein (§ 3).

25. **Sinusteilverhältnis.** Man nennt die Verhältniszahl $m = \sin XOP : \sin POY$, welche die Lage einer Geraden durch den Nullpunkt bestimmt, den *Richtungscoefficienten* derselben. Allgemein gesprochen, hat dieses Verhältnis in dem *Strahlbüschel* O, d. h. in der Gesammtheit der durch den Punkt O gehenden Strahlen, analoge Bedeutung, wie in der Punktreihe das Teilverhältnis (§ 7). Daher heifst der Quotient der Sinus der Teilwinkel XOP, POY, in welche der Strahl OP den Winkel XOY teilt, das *Sinusteilverhältnis* des Strahles OP im Winkel XOY. Die Teilwinkel sollen wie-

derum in dem Sinne gemessen werden, dafs die Relation besteht, $\sphericalangle XOP + POY = XOY$, so dafs das Sinusteilverhältnis positiv ist für Teilstrahlen innerhalb der Felder XOY, $X'OY'$, negativ für Teilstrahlen in den Nebenfeldern.

Die Bestimmung der Strahlen eines Büschels durch ihre Teilverhältnisse*) in Bezug auf zwei feste Strahlen ist selbstverständlich unabhängig davon, dafs die letzteren zu Coordinatenaxen gewählt waren. Um die Wertänderungen der Zahl m zu übersehen, genügt die Bemerkung, dafs die beiden Sinus, absolut genommen, sich verhalten wie die Längen der aus einem Punkte P des Teilstrahls OP auf die festen Strahlen OX, OY gefällten Perpendikel. Ist also m gegeben, so ziehe man in Abständen, die sich verhalten wie $m:1$, Parallele zu den festen Strahlen OX, OY; ihr Schnittpunkt P bestimmt den Teilstrahl. Für $m = 0$ fällt derselbe mit dem Anfangsstrahl OX, für $m = \infty$ mit dem Endstrahl OY zusammen, für $m = 1$ mit der inneren, für $m = -1$ mit der äufseren Halbirungslinie des Winkels XOY.

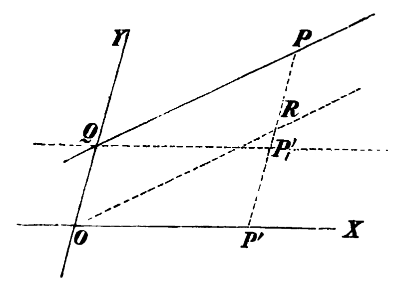
Zwei Strahlen, deren Sinusteilverhältnisse mit dem festen Strahlenpaar entgegengesetzt gleich sind, bilden ein zu jenem *harmonisches Strahlenpaar.* Von zwei harmonisch conjugirten Strahlen $\pm m$ ist also stets einer ein innerer, der andere ein äufserer Teilstrahl. Insbesondere ist zu einem Strahlenpaar das (rechtwinklige) Paar ihrer Halbirungslinien harmonisch ($m = \pm 1$). Umgekehrt sind zu zwei rechtwinkligen Strahlen immer die in Bezug auf sie symmetrisch gelegenen Strahlen harmonisch conjugirt. So sind also die Geraden von den Gleichungen $y = mx$, $y = -mx$ in Bezug auf die Coordinatenaxen conjugirt harmonisch, insbesondere $y = x$ und $y = -x$ die beiden Halbirungslinien des Axenwinkels.

26. Um nun zu untersuchen, wie eine in Bezug auf die Axen völlig willkürlich gelegene Gerade QP zu repräsentiren ist, ziehen wir durch den Nullpunkt OR parallel und gleich QP. Hat ein Punkt P von QP die Coordinaten $x|y$, so hat der Punkt R von OR die Coordinaten $x|y - b$,

---

*) Immer Sinusteilverhältnisse darunter verstanden.

falls wir die constante Länge $RP = OQ = b$ nennen; und ist m der Richtungscoefficient des zur Geraden parallelen Vectors, so ist $P'R = P'P - RP = m \cdot OP'$ oder



$$y - b = mx.$$

Diese für die Coordinaten jedes Punktes von QP erfüllte Relation $y = mx + b$ heifst die Gleichung dieser Geraden. Die Constante b ist die Ordinate des Schnittpunktes Q der Geraden mit der y-Axe. Den Richtungscofficienten m des zur Geraden parallelen Vectors nennen wir auch *Richtungscoefficienten der Geraden* selbst.

Diese Überlegung erweist sich unmittelbar als die Ausführung einer Paralleltransformation (§ 9) der auf Q als Anfangspunkt bezogenen Gleichung $y' = mx$ von QP zum Nullpunkt O durch die Substitution $y' = y - b$. Daher definirt auch umgekehrt die Gleichung $y = mx + b$ oder $y - b = mx$ eine Gerade, welche die x-Axe unter dem durch m gegebenen Winkel schneidet und in der y-Axe den Abschnitt b bestimmt, denn sie ist, in der Form $y' = mx$ geschrieben, die Gleichung des Vectors vom Richtungscoefficienten m im parallelen Coordinatensystem vom Anfangspunkt Q.

Zugleich ergibt sich: Gerade, deren Gleichungen sich in den Formen $y = mx + b$, $y = mx + b'$ nur im constanten Glied unterscheiden, sind parallel. *Parallele oder gleichgerichtete Gerade haben einen gemeinsamen unendlich fernen Schnittpunkt*, und dieser Punkt (§ 13) soll consequent als ihre *Richtung* bezeichnet werden.

27. **Die allgemeinste Gleichung des ersten Grades**

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$$

repräsentirt stets eine Gerade. Denn sie kann auf die Form $y = mx + b$ reducirt werden durch Division mit a_2, nämlich auf

$$y = -\frac{a_1}{a_2}x - \frac{a_3}{a_2}.$$

Daraus folgt *die geometrische Bedeutung der Constanten* in der allgemeinen Gleichung einer Geraden. Ist der Neigungswinkel der Geraden gegen die x-Axe α, so ist (§ 24)

$$m = -\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}; \text{ für } \omega = \frac{\pi}{2}, \quad m = \frac{-a_1}{a_2} = \tan\alpha.$$

Ferner ist der Abschnitt b der Geraden in der y-Axe (§ 26)

$$b = -\frac{a_3}{a_2}.$$

Nur diese Coefficientenquotienten haben geometrische Bedeutung, weil die Coefficienten selbst nur bis auf gemeinsame Factoren bestimmt sind (§ 20). In der Tat stellt eine zweite Gleichung $a_1'x + a_2'y + a_3' = 0$ nur dann dieselbe Gerade dar wie die gegebene, wenn

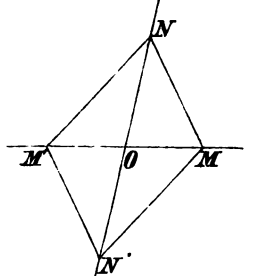
$$-\frac{a_1'}{a_2'} = -\frac{a_1}{a_2}, \quad -\frac{a_3'}{a_2'} = -\frac{a_3}{a_2}, \text{ also } \frac{a_1}{a_1'} = \frac{a_2}{a_2'} = \frac{a_3}{a_3'}.$$

Zwei Gerade $a_1x + a_2y + a_3 = 0$, $a_1'x + a_2'y + a_3' = 0$ *sind parallel, wenn* $a_1 : a_2 = a_1' : a_2'$ ist,

denn sie haben dann denselben Richtungscoefficienten. *Der Parallelismus erfordert also Proportionalität der Coefficienten entsprechender Variabeln.*

Aufser der speciellen Form $y = mx + b$ gibt es noch zwei gebräuchliche besondere Gleichungsformen der Geraden, die zunächst abgeleitet und mit der allgemeinen in Beziehung gesetzt werden sollen.

28. **Die Gleichung einer Geraden** *MN, mittelst der Abschnitte $OM = a$, $ON = b$ ausgedrückt, welche sie in den Axen bestimmt,* **lautet**



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Wir leiten diese Gleichung ab aus der allgemeinen

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_2}{a_3}y + 1 = 0.$$

Dieselbe mufs durch die Coordinaten jedes Punktes der Geraden MN, also auch durch diejenigen von M, d. h. $a \mid 0$ erfüllt werden; daraus folgt

$\frac{a_1}{a_3}a + 1 = 0$, oder $\frac{a_1}{a_3} = -\frac{1}{a}$; ebenso findet man auch $\frac{a_2}{a_3} = -\frac{1}{b}$ (§ 27), weil die Gleichung durch die Coordinaten $0 \mid b$ von N erfüllt werden mufs. Durch Substitution dieser Werte geht aus der allgemeinen Form die oben verlangte hervor, welche nach dieser ihrer Herkunft ebenso *für rechtwinklige als für schiefwinklige Axen gültig* ist.

Die Lage der Geraden ändert sich mit den Vorzeichen von a und b. Wenn z. B. die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, welcher in beiden Axen positive Abschnitte a, b entsprechen, die Linie MN der Figur darstellt, so gibt die Gleichung $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ die Gerade MN', $-\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ist der Ausdruck von $M'N$ und $-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ der von $M'N'$.

Jede Gleichung vom ersten Grade, deren constantes Glied nicht Null ist, kann durch die Division mit demselben auf eine dieser vier Formen reducirt werden. So entsteht z. B. die Gleichung einer y-Parallelen wieder, wenn $b = \infty$, $\frac{1}{b} = 0$ gesetzt wird.

B. 1) Man soll die Lage der folgenden Geraden untersuchen und die von ihnen in den Axen gebildeten Abschnitte bestimmen:

$$2x - 3y = 7; \quad 3x + 4y + 9 = 0; \quad 3x + 2y = 6.$$

2) Unter der Voraussetzung, dafs zwei Seiten eines Dreiecks als Coordinatenaxen genommen werden, ist die Verbindungslinie der Punkte, welche den m^{ten} Teil von jeder derselben abschneiden,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{m},$$

also der Basis des Dreiecks parallel.

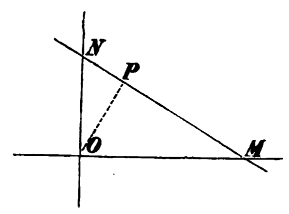
29. **Als Hesse'sche Normalform der Gleichung der Geraden** *gilt*

$$x \cos\alpha + y \cos(\omega - \alpha) - p = 0,$$

wo p die positive Länge der auf sie vom Nullpunkt gefällten Normale und α deren Neigungswinkel gegen die x-Axe bedeutet.

Sei $OP = p$, $OM = a$, $ON = b$, $\sphericalangle MOP = \alpha$, also

$\sphericalangle\, PON = \omega - \alpha$, so lautet die Gleichung der Geraden MN $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Indem wir diese mit p multipliciren, erhalten wir $\frac{p}{a}x + \frac{p}{b}y - p = 0$, wo aber noch gesetzt werden kann $\frac{p}{a} = \cos\alpha$, $\frac{p}{b} = \cos(\omega - \alpha)$, um in der Tat auf die obige Form zu kommen.



Bei rechtwinkligen Coordinaten, wie wir sie zumeist gebrauchen, wird wegen $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ die Normalform

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Diese Gleichung schliefst die vier Fälle des § 28 ein, wenn wir voraussetzen, dafs α jeden beliebigen Wert zwischen 0 und 2π annehme; so ist für die Lage NM' α zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, der Coefficient von x negativ; für die Lage $M'N'$ ist α zwischen π und $\frac{3\pi}{2}$ oder $-\pi$ und $-\frac{\pi}{2}$, beide Coefficienten sind negativ; für MN' ist α zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und 0 und nur der Coefficient von y negativ. Die vier Geraden sind also völlig unterschieden, wenn wir p als eine wesentlich positive Gröfse definiren, d. h. stets den Abstand des Nullpunktes von der Geraden positiv nennen. Die Bestimmung der Geraden aus der Hesse'schen Normalform ist also eigentlich identisch mit der Angabe des Fufspunktes P des von O auf dieselbe gefällten Perpendikels in Polarcoordinaten $\alpha \,|\, p$ (§ 6)*).

30. **Reduction der allgemeinen linearen Gleichung $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$ auf die Normalform.** Unter Annahme *rechtwinkliger Coordinaten* gelangen wir zu der Form $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, indem wir die gegebene durch $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ dividiren. Sie lautet dann

*) Wir können daher auch ein negatives Vorzeichen von p zulassen, wenn wir den Neigungswinkel α durch den der verlängerten Normale $\alpha + \pi$ ersetzen.

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\,x+\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\,y+\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=0$$

und wir können die Coefficienten von x und y gleich $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ bez. setzen, weil die Summe der Quadrate dieser zwei ächten Brüche gleich Eins ist. Also bestimmen $\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=\cos\alpha$, $\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=\sin\alpha$ den Neigungswinkel α der Normalen zur gegebenen Geraden und $p=\frac{-a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$ den Abstand des Nullpunktes von ihr. Um dieses p positiv zu erhalten, haben wir also der Quadratwurzel der Nenner dasjenige Vorzeichen zu geben, welches dem des constanten Gliedes a_3 entgegengesetzt ist.

Um die *in schiefwinkligen Coordinaten* geschriebene allgemeine Gleichung auf $x\cos\alpha+y\cos(\omega-\alpha)-p=0$ zu reduciren, suchen wir letztere Form durch Multiplication mit einer gewissen Constanten, die wir R nennen wollen, mit der ersteren identisch zu machen. Also haben wir zu setzen $a_1=R\cos\alpha$, $a_2=R\cos(\omega-\alpha)$. Hieraus folgt vermittelst der Identität

$$\cos^2\alpha+\cos(\omega-\alpha)^2-2\cos\alpha\cos(\omega-\alpha)\cos\omega=\sin^2\omega,$$
$$a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\omega=R^2\sin^2\omega,$$

also die Normalform

$$\frac{a_1}{R}\,x+\frac{a_2}{R}\,y+\frac{a_3}{R}=0$$

mit $$\frac{1}{R}=\frac{\sin\omega}{\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\omega}}.$$

Somit sind $\cos\alpha:\cos(\omega-\alpha):p:1$

$$=a_1\sin\omega:a_2\sin\omega:-a_3\sin\omega:\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\omega}.$$

Die Länge p kann auch direct gefunden werden, indem man den doppelten Inhalt des Dreiecks NOM durch die Länge MN dividirt. Übrigens ist wiederum die Quadratwurzel R eines doppelten Zeichens fähig, d. h. die Gleichung kann auf zwei Formen gebracht werden, von denen wir die mit positivem p bevorzugen.

31. **Der Winkel δ zweier Geraden** $a_1x+a_2y+a_3=0$, $b_1x+b_2y+b_3=0$ ist einem der Winkel gleich, welche die vom Punkte O aus auf sie gefällten Normalen mit einander ein-

schliefsen. Wenn wir deren Neigungswinkel gegen die x-Axe α, β nennen, so ist $\delta = \alpha - \beta$ und unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, wegen

$$\cos\alpha : \sin\alpha : 1 = a_1 : a_2 : \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

$$\cos\beta : \sin\beta : 1 = b_1 : b_2 : \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

$$\sin\delta = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)} \cdot \sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}},$$

$$\cos\delta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)} \cdot \sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}},$$

daher

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan\delta = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 b_1 + a_2 b_2}.$$

Wenn die beiden Geraden durch die Gleichungen $y = mx + b$, $y = m'x + b'$ gegeben sind, so ergibt sich aus den Richtungscoefficienten der eingeschlossene Winkel vermöge

$$\tan\delta = \frac{m - m'}{1 + mm'},$$

oder auch direct, weil $\delta = \operatorname{arc\,tan} m - \operatorname{arc\,tan} m'$.

Ganz analog verfahren wir bei schiefwinkligen Coordinaten, setzen $R \sin\omega = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos\omega)}$, $R' \sin\omega = \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 - 2 b_1 b_2 \cos\omega)}$ und finden, aus

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{R}, \quad \cos\beta = \frac{b_1}{R'}, \quad \sin\alpha = \frac{a_2 - a_1 \cos\omega}{R \sin\omega},$$

$$\sin\beta = \frac{b_2 - b_1 \cos\omega}{R' \sin\omega}, \quad \sin\delta = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{RR' \sin\omega},$$

$$\cos\delta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)\cos\omega}{RR' \sin^2\omega},$$

also

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan\delta = \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)\sin\omega}{a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)\cos\omega}.$$

Nun ist $\tan\delta = 0$, wenn die beiden Geraden parallel, $\tan\delta = \infty$, wenn sie zu einander normal sind. Daher ergibt sich wieder wie in § 31

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

als Bedingung des Parallelismus. Dagegen ist *die Bedingung der Orthogonalität zweier Geraden*

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a_1 b_2 + a_2 b_1)\cos\omega;$$

in rechtwinkligen Coordinaten lautet sie einfacher

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

und für die specielle Gleichungsform

$$mm' = -1.$$

32. **Schnittpunkt zweier Geraden.** Jede der linearen Gleichungen drückt eine Bedingung aus, welcher von den Coordinaten des geforderten Punktes genügt werden mufs. Deshalb finden wir seine Coordinaten, indem wir die beiden Gleichungen für die Unbekannten x und y auflösen. Dies liefert als äquivalentes Gleichungspaar

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)x + a_3 b_2 - a_2 b_3 = 0, \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1)y + a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0$$

und hieraus die Auflösung

$$x = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Diese Werte werden nur dann unendlich grofs, wenn der Nenner verschwindet, d. h. wenn die Bedingung des Parallelismus $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ erfüllt ist; doch bleibt ihr Verhältnis endlich, nämlich gleich dem der Zähler. Einen unendlich fernen Punkt geben wir überhaupt an durch den Richtungscoefficienten der nach ihm gehenden Parallelstrahlen. Der Schnittpunkt wird nur dann unbestimmt, wenn aufser dem Nenner noch ein Zähler, infolge dessen auch der andere verschwindet; dann ist aber die Bedingung der Identität erfüllt (§ 27).

Damit ist dem Satz des § 23, dafs irgend zwei lineare Gleichungen einen Punkt eindeutig bestimmen, die geometrische Interpretation gegeben. Jeder Punkt ist durch irgend zwei Gerade bestimmt (unter andern durch zwei Axenparallele); wie auch jede Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist.

Auf einer dritten Geraden $c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$ liegt der Schnittpunkt der beiden gegebenen, wenn seine Coordinaten auch der letzten Gleichung genügen. Demnach ist *die Bedingung, unter welcher drei Gerade sich in einem Punkte schneiden:*

$$c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0;$$

sie kann auch in einer der folgenden Formen geschrieben werden

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = 0,$$
$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0.$$

Dieser Ausdruck wird sich auch als Bedingung dafür erweisen müssen, dafs das von den drei Geraden gebildete Dreieck die Fläche Null hat (vgl. § 38. 4)).

B. 1) Die Coordinaten der Ecken des Dreiecks von den Seiten $x + y = 2$, $x - 3y = 4$, $3x + 5y + 7 = 0$ sind $-\frac{1}{14} \mid -\frac{19}{14}$, $\frac{17}{2} \mid -\frac{13}{2}$, $\frac{5}{2} \mid -\frac{1}{2}$.

2) Die Coordinaten der Punkte, in welchen die Geraden $3x + y - 2 = 0$, $x + 2y - 5 = 0$, $2x - 3y + 7 = 0$ sich schneiden, sind $\frac{1}{7} \mid \frac{17}{7}$, $-\frac{1}{11} \mid \frac{25}{11}$, $-\frac{1}{5} \mid \frac{13}{5}$.

3) $2x + 3y - 13 = 0$, $5x - y - 7 = 0$, $x - 4y + 10 = 0$ schneiden sich in $2 \mid 3$.

4) Das Viereck, dessen Seiten durch die Gleichungen $3x - 2y + 10 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$, $16x - 10y - 33 = 0$, $12x + 14y + 29 = 0$ gegeben sind, hat die Ecken $-1 \mid \frac{7}{2}$, $3 \mid \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \mid -\frac{5}{2}$, $-3 \mid \frac{1}{2}$ und als die Schnittpunkte der Gegenseiten $83 \mid \frac{259}{2}$, $-\frac{71}{5} \mid \frac{101}{10}$.

33. Eine Gerade kann stets so bestimmt werden, dafs sie zwei Bedingungen genügt.

Jede der Formen, welche wir der Gleichung der Geraden gegeben haben, enthält zwei Constanten; so die Formen

$$y = mx + b, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$$

die Constanten m, b, bez. a, b, bez. α, p. Nur die allgemeine Form $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ enthält drei Constanten, aber nur scheinbar, denn von geometrischer Bedeutung sind in ihr nicht die absoluten Werte, sondern nur zwei unter den Verhältnissen von a_1, a_2, a_3. Nach Division durch a_3 wird die Gleichung z. B. mit der zweiten speciellen Form identisch, enthält nur die beiden Constanten $\frac{a_1}{a_3} = \frac{-1}{a}$, $\frac{a_2}{a_3} = \frac{-1}{b}$. Die Gerade ist also durch die zwei Constanten ihrer Gleichung bestimmt; wir erhalten alle möglichen Geraden der Ebene, wenn wir den Constanten unabhängig von einander alle Werte geben. Wir könnten die durch sie gegebenen geome-

trischen Gröfsen, z. B. die negativen Reciproken der Axenabschnitte, geradezu als die beiden Bestimmungselemente der Geraden ansehen, in demselben Sinne, wie $x \mid y$ die beiden Coordinaten eines Punktes sind (vgl. § 75).

Wie der Punkt (§ 23), so kann auch die Gerade zwei Bedingungen erfüllen, falls diese sich nicht widersprechen. Denn, betrachten wir die beiden Constanten m, b oder a, b oder α, p als Unbekannte, so können wir deren Werte bestimmen, wenn ihnen irgend zwei Bedingungen auferlegt sind. Ein solches Wertepaar entspricht dann einer speciellen Geraden, die diesen Bedingungen genügt. Man nennt eine Bedingung linear, insofern sie jeden Coefficienten der Gleichung nur im ersten Grade enthält. *Also ist eine Gerade durch zwei (für die Constanten ihrer Gleichung) lineare Bedingungen eindeutig fixirt,* analog wie der Punkt durch zwei lineare Gleichungen bestimmt ist. Diese Determination der Geraden durch Bedingungen wird durch die §§ 34, 35, 36 hinreichend erläutert.

34. **Die Gleichung einer Geraden durch einen gegebenen Punkt $x_1 \mid y_1$ und parallel zu einer gegebenen Geraden lautet $y - y_1 = m(x - x_1)$.**

Wenn die Gerade $y = mx + b$ einer gegebenen Geraden parallel ist, so ist nach §§ 26, 27 die Constante m bekannt. Und wenn sie durch einen festen Punkt $x_1 \mid y_1$ geht, so mufs die Gleichung, als für jeden Punkt der Linie erfüllt, auch für ihn wahr sein; man erhält also $y_1 = mx_1 + b$ und damit die Bestimmung von b, so dafs die Elimination von b die Gleichung gibt

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Betrachten wir in dieser Gleichung den Richtungscoefficienten m als unbestimmt, so ist sie die allgemeine Gleichung einer durch den Punkt $x_1 \mid y_1$ gehenden Geraden und zwar kann jede Gerade durch $x_1 \mid y_1$ in derselben dargestellt werden. In der Tat geht sie auch hervor aus der Gleichungsform der durch den Nullpunkt gehenden Vectoren $y' = mx'$ durch Paralleltransformation zu $x_1 \mid y_1$ als neuem Anfangspunkt.

35. **Die Gleichung der Verbindungsgeraden zweier gegebener Punkte $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$ lautet**

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Nach dem vorigen Artikel ist die Gleichung einer Geraden durch $x_1 \mid y_1$, $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$. Da aber die verlangte Gerade auch durch den Punkt $x_2 \mid y_2$ gehen mufs, so mufs diese Gleichung auch erfüllt bleiben, wenn man für $x \mid y$ einsetzt $x_2 \mid y_2$. Demnach ist $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$, und durch Substitution für m daher die Gleichung der verlangten Geraden $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ oder die obige.

In dieser Form scheint die Gleichung am leichtesten zu behalten; durch die Befreiung von Brüchen bringen wir sie jedoch in eine Form, in der sie zumeist brauchbarer ist, nämlich

$$(y_1 - y_2)\,x - (x_1 - x_2)\,y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

oder auch $(x - x_1)(y - y_2) = (x - x_2)(y - y_1)$.

Auch letztere ist die Gleichung einer Geraden, weil die Glieder xy, welche auf ihren beiden Seiten auftreten, einander aufheben; sie verbindet die gegebenen Punkte, denn sie wird sowol durch die Werte $x = x_1$, $y = y_1$ als $x = x_2$, $y = y_2$ erfüllt. Ihre Entwickelung gibt auch das vorige Resultat.

Insbesondere ist die Gleichung der Geraden, die den Punkt $x_1 \mid y_1$ mit dem Anfangspunkt verbindet, $y_1 x - x_1 y = 0$.

Wir können diese Gleichung der Verbindungslinie auch interpretiren als den Ausdruck der *Bedingung, dafs drei Punkte in einer Geraden liegen.* Denn, nennen wir den dritten Punkt $x_3 \mid y_3$, so mufs er der Gleichung genügen

$$(y_1 - y_2)\,x_3 - (x_1 - x_2)\,y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

Man kann diese Bedingung in der cyklisch-symmetrischen Form*) schreiben

$$x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2) = 0.$$

*) Beim Gebrauch dieser und ähnlicher Formeln (z. B. § 32) ist es nützlich, die Coordinaten oder überhaupt durch einen Index unter-

B. 1) Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks, dessen Eckpunkte sind: $2 \mid 3$, $4 \mid -5$, $-3 \mid -6$, lauten

$$x - 7y = 39, \quad 9x - 5y = 3, \quad 4x + y = 11.$$

2) Die Gleichung der Verbindungsgeraden der Punkte

$$x_1 \mid y_1 \quad \text{und} \quad \frac{n_2 x_1 + n_1 x_2}{n_1 + n_2} \left| \frac{n_2 y_1 + n_1 y_2}{n_1 + n_2} \right. \quad \text{ist (§ 13)}$$

$$(y_1 - y_2)\, x - (x_1 - x_2)\, y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

3) Die Gleichung der Verbindungsgeraden der Punkte

$$x_1 \mid y_1 \quad \text{und} \quad \frac{x_2 + x_3}{2} \left| \frac{y_2 + y_3}{2} \right. \quad \text{ist}$$

$$(y_2 + y_3 - 2y_1)x - (x_2 + x_3 - 2x_1)y + x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 = 0.$$

4) Die Geraden, welche die Ecken des Dreiecks in 1) mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbinden, haben die Gleichungen

$$17x - 3y = 25; \quad 7x + 9y + 17 = 0; \quad 5x - 6y = 21.$$

5) Die Gleichung der Verbindungsgeraden der Punkte

$$\frac{lx_1 - mx_2}{l - m} \left| \frac{ly_1 - my_2}{l - m} \right. \quad \text{und} \quad \frac{lx_1 - nx_3}{l - n} \left| \frac{ly_1 - ny_3}{l - n} \right. \quad \text{ist}$$

$$x\,[l\,(m - n)\,y_1 + m\,(n - l)\,y_2 + n\,(l - m)\,y_3] -$$
$$y\,[l\,(m - n)\,x_1 + m\,(n - l)\,x_2 + n\,(l - m)\,x_3] =$$
$$lm\,(y_1 x_2 - y_2 x_1) + mn\,(y_2 x_3 - y_3 x_2) + nl\,(y_3 x_1 - y_1 x_3).$$

6) Die Diagonalen des durch die Geraden $x = a$, $x = a'$, $y = b$, $y = b'$ gebildeten Parallelogramms sind

$$(b - b')x - (a - a')y = a'b - ab', \quad (b - b')x + (a - a')y = ab - a'b'.$$

7) Wenn von einem Dreieck die Basis $x' \mid 0$, $-x' \mid 0$ und die Verbindungslinie ihres Mittelpunktes mit der Spitze $0 \mid y'$ zu Coordinatenaxen gewählt sind, so sind die Gleichungen der Linien, die von den Basisecken nach den Mittelpunkten der Seiten $x' \mid 0$, $0 \mid y'$ bez. $-x' \mid 0$, $0 \mid y'$ gehen

$$3x'y - y'x - x'y' = 0, \quad 3x'y + y'x - x'y' = 0$$

und die Coordinaten ihres Schnittpunktes $0 \mid \frac{1}{3} y'$.

8) Zwei Gegenseiten eines Vierecks sind zu Coordinatenaxen gewählt, die andern haben die Gleichungen

---

schiedene Buchstaben in einer festen Aufeinanderfolge zu denken, z. B. nimmt im zweiten Glied der eben gegebenen Formel y_2 die Stelle von y_1, x_3 die von x_2 und x_1 die von x_3 im ersten Gliede ein und im dritten gehen wir von y_2 zu y_3, von x_3 zu x_1, und von x_1 zu x_2 über. Man kann dies Verfahren kurz als eine cyklische Vertauschung der Indices bezeichnen.

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1, \quad \frac{x}{2a'} + \frac{y}{2b'} = 1.$$

Die Mittelpunkte der Diagonalen sind $a \mid b'$, $a' \mid b$.

9) In demselben Fall ist der Mittelpunkt der Geraden, welche die Schnittpunkte der Gegenseiten verbindet,

$$\frac{a'b \cdot a - ab' \cdot a'}{a'b - ab'} \,\Big|\, \frac{a'b \cdot b' - ab' \cdot b}{a'b - ab'}.$$

Nach § 13 zeigt diese Form der Coordinatenwerte, dafs dieser Punkt die Verbindungslinie der beiden ersten Mittelpunkte äufserlich im Verhältnis $a'b : ab'$ teilt.

36. **Normale aus einem gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden.** Ist $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$ die Gleichung der gegebenen Geraden in rechtwinkligen Coordinaten, so sind infolge der Orthogonalitätsbedingung $a_1 : a_2 = -b_2 : b_1$ (§ 31) alle Normalen derselben in der Gleichungsform enthalten $-a_2 x + a_1 y + b_3 = 0$. Die durch den Punkt $x_1 \mid y_1$ gehende Normale hat also nach § 34 die Gleichung

$$a_2 (x - x_1) - a_1 (y - y_1) = 0.$$

Aus der Gleichung der zur gegebenen parallelen Geraden durch $x_1 \mid y_1$, $a_1 (x - x_1) + a_2 (y - y_1) = 0$ wird die der Normale also erhalten durch Vertauschung der Coefficienten von x und y und Änderung des Vorzeichens von einem derselben. Ebenso ergibt sich zu $y = mx$, wegen $m' = -1 : m$, die Normale $y = \frac{-1}{m} x$ durch den Nullpunkt, somit zu $y = mx + b$ durch $x_1 \mid y_1$ die Normale $y - y_1 = \frac{-1}{m} (x - x_1)$.

In schiefwinkligen Coordinaten folgt auf dieselbe Weise als Gleichung der Normale

$$(a_2 - a_1 \cos \omega)(x - x_1) - (a_1 - a_2 \cos \omega)(y - y_1) = 0.$$

Ganz ebenso bildet man die Gleichung der Geraden, welche durch einen Punkt $x_1 \mid y_1$ geht und mit einer gegebenen Geraden einen vorgeschriebenen Winkel δ einschliefst. Denn, ist m der Richtungscoefficient der gegebenen Geraden, so folgt derjenige der geforderten Geraden aus der Formel des § 31 für $\tan \delta = \mu$, nämlich unter Annahme rechtwinkliger Coordinaten als

$$m' = \frac{m - \mu}{1 + m\mu}.$$

Mit diesem Wert von m' ist dann die geforderte Gleichung $y - y_1 = m'(x - x_1)$. Diejenige Gerade, welche mit ihr zur Normalen symmetrisch liegt, erhält man, indem man $\tan\delta$ durch $-\tan\delta$ ersetzt. Die Länge des in einer der gleichgeneigten Geraden gemessenen schiefen Abstands des Punktes von der Geraden folgt aus dem senkrechten Abstand derselben (§ 37) mittelst Division durch $\sin\delta$.

B. 1) Das Dreieck $2\,|\,1$, $3\,|-2$, $-4\,|-1$ besitzt die Seiten $x + 7y + 11 = 0$, $3y - x = 1$, $3x + y = 7$ und die Höhen (Perpendikel aus den Ecken)

$$7x - y = 13,\quad 3x + y = 7,\quad 3y - x = 1;$$

demnach ist es rechtwinklig.

2) Die Seitenmittelpunkte sind $-\frac{1}{2}\,|-\frac{3}{2}$, $-1\,|\,0$, $\frac{5}{2}\,|-\frac{1}{2}$; die Perpendikel in ihnen zu den Dreieckseiten sind

$$7x - y + 2 = 0,\quad 3x + y + 3 = 0,\quad 3y - x + 4 = 0;$$

sie durchschneiden sich in $-\frac{1}{2}\,|-\frac{3}{2}$, dem Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises.

3) Die Gleichungen der Höhen des Dreiecks $2\,|\,3$, $4\,|-5$, $-3\,|-6$ (§ 35, 1)) sind

$$7x + y = 17,\quad 5x + 9y + 25 = 0,\quad x - 4y = 21;$$

sie schneiden sich in $\frac{89}{29}\,|-\frac{130}{29}$, dem Höhenschnittpunkte.

4) Die Gleichungen der Mittelsenkrechten der Seiten desselben Dreiecks sind (vgl. 2))

$$7x + y + 2 = 0,\quad 5x + 9y + 16 = 0,\quad x - 4y = 7;$$

ihr Schnittpunkt ist $-\frac{1}{29}\,|-\frac{51}{29}$.

5) Aus den Coordinaten der Ecken eines Dreiecks folgen die allgemeinen *Gleichungen der Höhen* als

$$\begin{aligned}
(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y + (x_1x_3 + y_1y_3) - (x_1x_2 + y_1y_2) &= 0,\\
(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y + (x_2x_1 + y_2y_1) - (x_2x_3 + y_2y_3) &= 0,\\
(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + (x_3x_2 + y_3y_2) - (x_3x_1 + y_3y_1) &= 0.
\end{aligned}$$

6) Die *Gleichungen der Mittelsenkrechten* der Seiten des Dreiecks sind

$$\begin{aligned}
(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y &= \tfrac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2) + \tfrac{1}{2}(y_2^2 - y_3^2),\\
(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y &= \tfrac{1}{2}(x_3^2 - x_1^2) + \tfrac{1}{2}(y_3^2 - y_1^2),\\
(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y &= \tfrac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \tfrac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2).
\end{aligned}$$

7) Die Basis $x_2\,|\,0$, $x_3\,|\,0$ eines Dreiecks und die von der Spitze $0\,|\,y_1$ auf dieselbe gefällte Senkrechte sind als Coordinaten-

axen gewählt; die Gleichungen der von den Basisecken auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel sind

$$x_3(x - x_2) + y_1 y = 0, \quad x_2(x + x_3) - y_1 y = 0$$

und die Coordinaten ihres Schnittpunktes $0 \left| \frac{x_2 x_3}{y_1} \right.$.

8) Für dieselben Axen sind die Gleichungen der in den Mittelpunkten der Seiten errichteten Perpendikel

$2(x_3 x + y_1 y) = y_1^2 - x_3^2$; $2(x_2 x - y_1 y) = x_2^2 - y_1^2$, $2x = x_2 - x_3$; und ihr Schnittpunkt ist

$$\frac{x_2 - x_3}{2} \left| \frac{y_1^2 - x_2 x_3}{2 y_1} \right. .$$

9) Die Gleichung der Normale von $x_1 | y_1$ auf die Linie $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ ist $y - y_1 = (x - x_1)\tan\alpha$, und die Coordinaten ihres Fufspunktes in derselben sind

$x_1 + \cos\alpha(p - x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha) \,|\, y_1 + \sin\alpha(p - x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha)$.

Daher ist die Entfernung dieses Schnittpunktes vom Punkte $x_1 | y_1 \pm (x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha - p)$, in Bestätigung der Ableitung des § 31.

37. **Der Abstand eines Punktes $x_0 | y_0$ von der Geraden**

$$x\cos\alpha + y\cos(\omega - \alpha) - p = 0 \text{ ist}$$
$$s = -(x_0\cos\alpha + y_0\cos(\omega - \alpha) - p).$$

Die Hesse'sche Normalform der linearen Gleichung gibt zugleich die geometrische Bedeutung der Werte, welche ihre linke Seite annimmt, falls die Coordinaten *irgend* eines Punktes in dieselbe substituirt werden. Transformiren wir nämlich die Gleichung zu parallelen Axen durch den Punkt $x_0 | y_0$, substituiren also $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, so geht sie über in

$$x'\cos\alpha + y'\cos(\omega - \alpha) + x_0\cos\alpha + y_0\cos(\omega - \alpha) - p = 0;$$

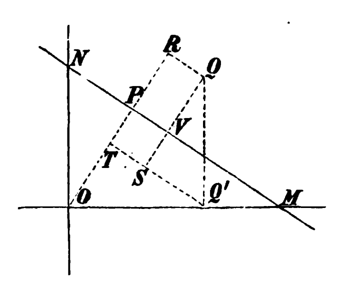
das neue constante Glied

$$-p' = x_0\cos\alpha + y_0\cos(\omega - \alpha) - p$$

gibt also den normalen Abstand des neuen Nullpunkts von der Geraden, wenn wir zunächst vom Vorzeichen absehen.

Geometrisch finden wir dies folgendermafsen. Sind OP, QV die Perpendikel von O und von Q auf die Gerade MN, $OQ' = x_0$, $Q'Q = y_0$, $Q'T$ und QR Parallelen zu MN, so ist $OT = x_0\cos\alpha$, $TR = SQ = y_0\cos(\omega - \alpha)$, also $OR = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta$ und endlich $PR = OR - p = VQ$.

Läge aber Q auf derselben Seite der Geraden wie der Nullpunkt, etwa in S, so wäre $SV = p - OT$ erhalten worden.



Wir sehen daraus, dafs der Abstand sein Vorzeichen wechselt, wenn wir von einer Seite der Geraden auf die andere übergehen. So lange wir nur den Abstand *eines* Punktes von der Geraden betrachten, ist es unnötig ihm ein Vorzeichen zu geben, da es sich allein um seine absolute Gröfse handelt. Wenn wir aber die Abstände von zwei verschiedenen Punkten wie Q und S mit einander vergleichen, so müssen offenbar die Distanzen QV, SV als solche von entgegengesetztem Sinn unterschieden werden (§ 4).

Dasselbe folgt für die linke Seite der Gleichung der Geraden schon aus dem Zusatz zu § 19, dafs nämlich das Resultat der Substitution der Coordinaten $x_0 | y_0$ so lange unveränderliches Vorzeichen hat, als der Punkt $x_0 | y_0$ sich in einem der beiden Felder befindet, in welche die Gerade die Ebene zerlegt. Nun haben wir p selbst als positiv angenommen, daher müssen wir das Vorzeichen so wählen, dafs der Ausdruck des Abstandes s von $x_0 | y_0$ bei Einsetzung von $0 | 0$ positiv ist. *Der Abstand s eines beliebigen Punktes $x_0 | y_0$ von der Geraden $x \cos \alpha + y \cos (\omega - \alpha) - p = 0$ wird als das Substitutionsresultat von $x_0 | y_0$ in die linke Seite der Gleichung mit umgekehrtem Vorzeichen erhalten.*

Ist die Gleichung der Geraden in der Form gegeben $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$, so reduciren wir sie mittelst Division durch R (§ 30) auf die Normalform und erhalten als den Abstand eines Punktes $x_0 | y_0$

$$s = -\frac{a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \text{ bez. } -\frac{(a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3) \sin \omega}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos \omega)}},$$

je nachdem die Axen recht- oder schiefwinklig sind. Durch Vergleichung dieses Ausdrucks für den Abstand von $x_0 | y_0$ mit dem für den Abstand von O sehen wir, dafs $x_0 | y_0$ mit dem Nullpunkt auf derselben Seite der Geraden liegt, wenn

$a_1x_0 + a_2y_0 + a_3$ mit a_3 dasselbe Vorzeichen hat, und umgekehrt.

Die Bedingung, dafs irgend ein Punkt $x_0 | y_0$ in der Geraden $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ liege, besteht darin, dafs $a_1x_0 + a_2y_0 + a_3 = 0$ sei. Der gegenwärtige Artikel zeigt, dafs diese Bedingung nur der algebraische Ausdruck der geometrischen Wahrheit ist, dafs der Abstand von einem Punkte $x_0 | y_0$ in einer Geraden auf dieselbe gleich Null ist.

B. 1) Der Abstand des Anfangspunktes von der Linie $3x + 4y + 20 = 0$ ist bei rechtwinkligen Axen $p = 4$.

2) Der Abstand des Punktes $2 | 3$ von der Geraden $2x + y - 4 = 0$ ist $s = \frac{-3}{\sqrt{5}}$; also sind $2 | 3$ und $0 | 0$ durch die Gerade getrennt.

3) Die Längen der Senkrechten von den Eckpunkten des Dreiecks $2 | 1$, $3 | -2$, $-4 | -1$ auf die Gegenseiten sind $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$; der Anfangspunkt liegt innerhalb des Dreiecks.

4) Der Abstand des Punktes $3 | -4$ von der Geraden $4x + 2y - 7 = 0$ ist unter Voraussetzung eines Axenwinkels von 60^0 $s = \frac{1}{2}$; der Punkt liegt auf der Seite des Anfangspunktes.

5) Der Abstand des Anfangspunktes von der Geraden $a(x - a) + b(y - b) = 0$ ist $p = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

38. **Inhalt des Dreiecks und Vielecks.** Wir erhalten den doppelten Inhalt $2F$ eines Dreiecks, indem wir die Länge der Verbindungslinie zweier Eckpunkte mit der Länge der vom dritten Eckpunkt auf dieselbe gefällten Normalen, der zugehörigen Dreieckshöhe, multipliciren.

Unter Voraussetzung rechtwinkliger Axen ist der Abstand von $x_3 | y_3$ von der Verbindungslinie von $x_1 | y_1$ und $x_2 | y_2$ oder die Höhe (§§ 35, 37)

$$h_3 = \frac{(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{[(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2]}};$$

in diesem Bruche stellt der Nenner die Länge der Verbindungslinie von $x_1 | y_1$ mit $x_2 | y_2$ dar. Daher bezeichnet der Zähler

$$2F = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$
$$= y_3(x_2 - x_1) + y_2(x_1 - x_3) + y_1(x_3 - x_2)$$

den doppelten Inhalt des von den drei Punkten gebildeten

Dreiecks. Die Bedingung, unter welcher drei Punkte in einer Geraden liegen (§ 35), drückt also aus, dafs der Inhalt des durch die drei Punkte gebildeten Dreiecks gleich Null ist. Insbesondere folgt der doppelte Inhalt des von den Punkten $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ mit dem Nullpunkt gebildeten Dreiecks aus dem allgemeinen Ausdruck als $x_1 y_2 - x_2 y_1$, indem man darin setzt $x_3 = 0$, $y_3 = 0$.

Für schiefwinklige Axen findet man durch Wiederholung der Untersuchung mit den auf sie bezüglichen Formeln, dafs die einzige Veränderung des Resultats in dem Hinzutreten des Factors $\sin \omega$ auf der rechten Seite des oben erhaltenen Ausdruckes besteht.

Genau gesprochen haben wir übrigens diesen Ausdrücken das doppelte Zeichen vorzusetzen, welches aus der Quadratwurzel entspringt, die in der Entwickelung gebraucht wird. So lange wir es jedoch nur mit *einer* Dreiecksfläche zu tun haben, handelt es sich nur um ihre absolute Gröfse. Wenn aber z. B. die Inhalte zweier Dreiecke verglichen werden, deren Spitzen $x_3 | y_3$, $x_4 | y_4$ oder P_3, P_4 auf entgegengesetzten Seiten der Basis $P_1 P_2$ liegen, so müssen ihnen entgegengesetzte Vorzeichen gegeben werden. Die beiden Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ und $P_1 P_2 P_4$ unterscheiden sich wesentlich in dem Umfahrungssinn ihrer Begrenzung, wie denselben die Eckenfolge bez. die Indexfolge angibt (vgl. Anm. zu § 4). Unsere Formel ergibt auch für die Dreiecke $P_1 P_2 P_3$, $P_1 P_3 P_2$ entgegengesetzt gleiche Werte, einer Vertauschung der Indices 2 und 3 entsprechend; also hängt das Vorzeichen des durch die obige Formel definirten Inhaltes vom Umfahrungssinn des Dreiecks ab. Und zwar überzeugt man sich leicht durch Betrachtung der drei Rechtecke, welche die einzelnen Producte definiren, dafs *die Formel für ein Dreieck von positivem Umfahrungssinn* $P_1 P_2 P_3$ *einen positiven Inhalt ergibt*, wenn bei positiver Umlaufung das Dreiecksinnere zur Linken bleiben soll.

Unter dieser Festsetzung ist nun das Viereck $P_1 P_4 P_2 P_3$ nicht die Summe der Dreiecke $P_1 P_2 P_4$, $P_1 P_2 P_3$, sondern von $P_1 P_4 P_2$, $P_1 P_2 P_3$.

Wir finden allgemein den Inhalt eines Polygons aus den Coordinaten seiner Eckpunkte folgendermafsen.

Wenn wir innerhalb des Polygons einen Punkt $x|y$ wählen und ihn mit allen Eckpunkten desselben $x_1|y_1$, $x_2|y_2, \ldots x_n|y_n$ durch Gerade verbinden, so ist der Inhalt des Polygons die Summe der Inhalte aller der Dreiecke, in welche dasselbe dadurch geteilt worden ist. Diese doppelten Inhalte sind nach dem letzten Paragraphen, eventuell erst durch $\sin\omega$ dividirt,

$$\begin{array}{l} x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-x_2y_1, \\ x(y_2-y_3)-y(x_2-x_3)+x_2y_3-x_3y_2, \\ \quad\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ x(y_{n-1}-y_n)-y(x_{n-1}-x_n)+x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}, \\ x(y_n-y_1)-y(x_n-x_1)+x_ny_1-x_1y_n. \end{array}$$

Durch Addition derselben verschwinden alle die Glieder, welche x und y als Factoren enthalten, wie auch nötig, weil der Wert des Totalinhalts von der Art unabhängig sein mufs, in welcher das Polygon in Dreiecke zerlegt wird; wir erhalten für den doppelten Inhalt $2F$, eventuell $2F : \sin\omega =$

$$(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\ldots+(x_ny_1-x_1y_n).$$

Derselbe kann auch geschrieben werden:

$$x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+\ldots+x_n(y_1-y_{n-1}),$$
$$y_1(x_n-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_4)+\ldots+y_n(x_{n-1}-x_1).$$

Der doppelte Polygoninhalt resultirt aus den Coordinaten der Ecken, indem man die Ordinate jeder Ecke mit der Differenz der Abscissen der vorangehenden und der nachfolgenden Ecke multiplicirt und die Producte summirt.

B. 1) Der Inhalt des Dreiecks $2|1$, $3|-2$, $-4|-1$ ist $= 10$.

2) Der Inhalt des Dreiecks $2|3$, $4|-5$, $-3|-6$ ist $= 29$.

3) Der Inhalt des Vierecks $1|1$, $2|3$, $3|3$, $4|1$ ist $= 4$.

4) Sind im Dreieck $A_1A_2A_3$ die Höhen h_1, h_2, h_3, so sind die Abstände p_1, p_2, p_3 eines Punktes P von den Seiten durch die Relation verbunden

$$\frac{p_1}{h_1}+\frac{p_2}{h_2}+\frac{p_3}{h_3}=1;$$

denn die doppelten Teildreiecke $p_1 . A_2A_3$, $p_2 . A_3A_1$, $p_3 . A_1A_2$ haben die Summe $A_1A_2A_3 = h_1 . A_2A_3 = h_2 . A_3A_1 = h_3 . A_1A_2$.

5) *Inhalt des durch die Geraden* $a_1x + a_2y + a_3 = 0$, $b_1x + b_2y + b_3 = 0$, $c_1x + c_2y + c_3 = 0$ *gebildeten Dreiecks.*

Wenn wir die Coordinaten der Ecken berechnen (§ 32) und ihre Werte in die obige Formel einsetzen, so erhalten wir für den doppelten Inhalt den Ausdruck $2F : \sin\omega =$

$$\frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\left(\frac{b_1c_3 - b_3c_1}{c_1b_2 - c_2b_1} - \frac{c_1a_3 - c_3a_1}{a_1c_2 - a_2c_1}\right) +$$
$$\frac{b_2c_3 - b_3c_2}{b_1c_2 - b_2c_1}\left(\frac{c_1a_3 - c_3a_1}{a_1c_2 - a_2c_1} - \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{b_1a_2 - b_2a_1}\right) +$$
$$\frac{c_2a_3 - c_3a_2}{c_1a_2 - c_2a_1}\left(\frac{a_1b_3 - a_3b_1}{b_1a_2 - b_2a_1} - \frac{b_1c_3 - b_3c_1}{c_1b_2 - c_2b_1}\right).$$

Wir reduciren diesen Ausdruck auf einen gemeinsamen Nenner und bemerken, dafs der Zähler des zwischen den ersten Klammern enthaltenen Teils die mit c_1 multiplicirte Gröfse

$$c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2)$$

ist, und dafs die in den beiden folgenden Klammern enthaltenen Teile des Ausdrucks die Producte derselben Gröfse mit bez. a_1, b_1 sind; dadurch erhalten wir für den doppelten Inhalt des Dreiecks den Wert $2F : \sin\omega =$

$$\frac{[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)]^2}{(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1)(c_1a_2 - c_2a_1)}.$$

Wenn die drei Geraden sich in einem Punkte schneiden, so wird dieser Ausdruck für den Flächeninhalt Null (§ 32); wenn irgend zwei von ihnen parallel sind, so wird er unendlich grofs (§ 34).

39. Gleichungen der Halbirungslinien des Winkels der Geraden

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0,\quad x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0.$$

Wir finden die Gleichung einer dieser Geraden am einfachsten, indem wir algebraisch ausdrücken, dafs die von irgend einem Punkte $x|y$ in ihr auf die beiden Winkelschenkel gefällten Perpendikel gleich sind. Dies gibt unmittelbar die Gleichungen beider Winkelhalbirungslinien als

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = \pm(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2),$$

weil jede Seite derselben einen von diesen Abständen bezeichnet (§ 31).

Wenn die Gleichungen in der Form gegeben sind

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0, \quad b_1 x + b_2 y + b_3 = 0,$$

so sind die Gleichungen der Winkelhalbirenden

$$\frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}} = \pm \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}}.$$

Das doppelte Vorzeichen zeigt an, dafs von den Winkelhalbirungslinien die eine so liegt, dafs die Abstände ihrer Punkte von der einen der beiden Geraden nach § 37 als positiv und die von der anderen als negativ zu betrachten sind; die andere dagegen so, dafs diese Abstände von beiden Geraden gleichzeitig positiv oder negativ sind.

Wenn wir das Vorzeichen wählen, welches den beiden constanten Gliedern einerlei Vorzeichen gibt, so drücken wir (§ 37) durch die Gleichung die Halbirungslinie *des* Winkels aus, in welchem der Anfangspunkt liegt; und wenn wir den constanten Gliedern entgegengesetzte Zeichen geben, so haben wir die Gleichung der Halbirungslinie des Supplementwinkels.

Ganz in derselben Weise können wir den Ort eines Punktes bestimmen, dessen Abstände von zwei Geraden das constante Verhältnis $\lambda = s_1 : s_2$ haben. Je nachdem dasselbe positiv oder negativ ist, liegt der Punkt in dem Felde des Nullpunktes eventuell seinem Scheitelfeld, oder in einem der Nebenfelder (§ 37). Der Ort ist in jedem Falle eine Gerade durch den Schnittpunkt der gegebenen, welche denjenigen ihrer Winkel, welcher den Nullpunkt zwischen seinen Schenkeln hat, im Sinusverhältnis λ teilt (§ 25). In der Tat ist die Gleichung des Ortes*)

$$s_2 (x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1) = \pm s_1 (x \cos \alpha_2 + y \cos \alpha_2 - p_2)$$

$$\text{oder } s_2 \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \pm s_1 \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}},$$

wo dasjenige Vorzeichen dem inneren Teilstrahl des oben bezeichneten Winkels angehört, welches den constanten Gliedern gleiches Zeichen gibt. Die beiden Vorzeichen ent-

*) Die Gerade geht durch den gegebenen Schnittpunkt, weil die Gleichung erfüllt wird durch das Wertepaar, welches die gegebenen gleichzeitig befriedigt.

sprechenden Strahlen bilden ein in Bezug auf die gegebenen harmonisches Paar (§ 25).

B. 1) Die Gleichungen der Halbirungslinien des Winkels zwischen zwei Geraden, auf die Form $x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0$ reducirt, lauten

$$x \cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\pi}{2}\right] + y \sin\left[\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{p_1 - p_2}{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$x \cos \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + y \sin \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{p_1 + p_2}{2 \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

2) Die Gleichungen der Winkelhalbirungslinien für

$$3x + 4y - 9 = 0, \quad 12x + 5y - 3 = 0 \text{ sind}$$

$$7x - 9y + 34 = 0, \quad 9x + 7y = 12.$$

40. **Aus den Gleichungen zweier Geraden**

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0, \quad b_1 x + b_2 y + b_3 = 0$$

folgt die jeder dritten durch ihren Schnittpunkt gehenden in der Form $a_1 x + a_2 y + a_3 + k(b_1 x + b_2 y + b_3) = 0$.

Die zunächstliegende Methode zur Bestimmung einer solchen Geraden besteht darin, nach § 32 die Coordinaten $x_0 | y_0$ des Schnittpunktes der zwei Geraden zu berechnen und ihre Werte in die Gleichung des § 34, $y - y_1 = m(x - x_1)$ einzusetzen.

Zu einem einfacheren Verfahren führt jedoch folgende Überlegung. Die gesuchte Gleichung mufs linear sein und erfüllt werden, sobald die gegebenen gleichzeitig von einem Wertepaar $x_0 | y_0$ befriedigt werden. Diesen Anforderungen entspricht nun, für ganz beliebige Werte einer Constanten k, die Gleichung

$$a_1 x + a_2 y + a_3 + k(b_1 x + b_2 y + b_3) = 0;$$

sie stellt eine Gerade durch den Punkt $x_0 | y_0$ dar, der bestimmt ist durch die beiden Gleichungen $a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3 = 0$, $b_1 x_0 + b_2 y_0 + b_3 = 0$, denn für dessen Coordinaten verschwindet jeder Teil des *Aggregates* links einzeln. Für jeden Wert von k stellt die Gleichung eine Gerade durch den Schnittpunkt dar.

Umgekehrt ist auch jede Gerade durch diesen Schnittpunkt in obiger Form darstellbar; denn um diejenige Gerade zu finden, welche $x_0 | y_0$ mit einem beliebigen Punkte $x_1 | y_1$ ver-

bindet, haben wir k nur aus der Bedingung zu berechnen, dafs das Aggregat links für $x = x_1$, $y = y_1$ zu Null werde. Die verlangte Gleichung wird so

$$(b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3)(a_1 x + a_2 y + a_3) \\ = (a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3)(b_1 x + b_2 y + b_3).$$

Man bemerkt, dafs die Gleichungsform des § 34 lediglich ein specieller Fall der obigen ist, denn bestimmen wir einen Punkt durch die Geraden $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, so ist jede weitere Gerade durch denselben in der Form enthalten $y - y_1 - m(x - x_1) = 0$, wenn m eine verfügbare Constante ist.

B. 1) Die Gleichung der Geraden, welche den Anfangspunkt mit dem Schnittpunkt der obigen Geraden verbindet, lautet

$$(a_1 b_3 - a_3 b_1)\, x + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, y = 0.$$

Denn wir erhalten sie, indem wir die erste Gleichung mit b_3, die zweite mit a_3 multipliciren und die Producte von einander abziehen. Durch den Anfangspunkt geht die Gerade nach § 18.

2) Die Gleichung der durch den Schnittpunkt derselben Geraden gezogenen x-Parallelen ist

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2)\, y + a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0.$$

3) Die Gleichung der Geraden, die den Punkt $2 \mid 3$ mit dem Schnittpunkt von $2x + 3y + 1 = 0$ und $3x - 4y = 5$ verbindet, ist

$$11(2x + 3y + 1) + 14(3x - 4y - 5) = 0 \text{ oder } 64x - 23y = 59.$$

41. Das im letzten Paragraphen begründete Princip liefert für drei sich in demselben Punkt schneidende Gerade ein Kennzeichen, welches häufig bequemer ist, als das in § 32 angegebene. *Drei Gerade gehen durch denselben Punkt, wenn ihre Gleichungen je mit einer Constanten so multiplicirt werden können, dafs sie Null identisch zur Summe geben;* d. h. wenn für alle x und y die Relation besteht

$$l(a_1 x + a_2 y + a_3) + m(b_1 x + b_2 y + b_3) + n(c_1 x + c_2 y + c_3) = 0.$$

Denn in diesem Fall müssen die Werte der Coordinaten, welche die beiden ersten Teile der Gleichung einzeln mit Null identisch machen, auch den dritten Teil gleich Null machen.

B. 1) Die drei *Mittellinien des Dreiecks*, welche die Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

Die Gleichungen dieser Geraden sind nach § 35, 4)

$$(y_2+y_3-2y_1)x-(x_2+x_3-2x_1)y+x_2y_1-x_1y_2+x_3y_1-x_1y_3=0,$$
$$(y_3+y_1-2y_2)x-(x_3+x_1-2x_2)y+x_3y_2-x_2y_3+x_1y_2-x_2y_1=0,$$
$$(y_1+y_2-2y_3)x-(x_1+x_2-2x_3)y+x_1y_3-x_3y_1+x_2y_3-x_3y_2=0.$$

Da die Summe dieser drei Gleichungen identisch Null ist, so gehen die durch sie dargestellten Geraden durch einen Punkt. Nach § 32 findet man die Coordinaten des Schwerpunktes

$$\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \mid \tfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

2) Derselbe Satz ist evident unter der Voraussetzung, dafs zwei Seiten des Dreiecks von den Längen a und b zu den Axen genommen sind, denn dann sind die Gleichungen der Halbirungslinien

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1=0, \quad \frac{x}{a}+\frac{2y}{b}-1=0, \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

3) Die drei Höhen eines Dreiecks und die drei Mittelsenkrechten zu den Seiten schneiden sich je in einem Punkte, denn die Gleichungen § 36, 5) u. 6) geben Null identisch zur Summe.

4) *Die Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks* schneiden sich in einem Punkte, denn ihre Gleichungen sind

$$(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1)-(x\cos\beta+y\sin\beta-p_2)=0,$$
$$(x\cos\beta+y\sin\beta-p_2)-(x\cos\gamma+y\sin\gamma-p_3)=0,$$
$$(x\cos\gamma+y\sin\gamma-p_3)-(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1)=0.$$

Von den Halbirungslinien je zweier äusseren Winkel mit der des dritten innern gilt ein analoger Satz.

42. **Imaginäre Strahlen.** Jede reelle lineare Gleichung definirt eine reelle Gerade, d. h. eine Gerade mit unendlich vielen reellen Punkten. Aufser diesen enthält aber eine reelle Gerade auch unendlich viele imaginäre Punkte, denn ein Punkt $u+iv \mid u'+iv'$ (§ 17) liegt in der Geraden $a_1x+a_2y+a_3=0$, wenn für die vier reellen Gröfsen u, v, u', v' die beiden reellen Bedingungen erfüllt sind

$$a_1u+a_2u'+a_3=0, \quad a_1v+a_2v'=0;$$

man erhält dieselben durch die Einsetzung der complexen Werte in die gegebene Gleichung, weil dann sowol der reelle als der imaginäre Teil der Function der linken Seite für sich verschwinden mufs. Alsdann liegt aber gleichzeitig auch der conjugirt imaginäre Punkt $u-iv \mid u'-iv'$ in der reellen Geraden (§ 19), denn er liefert dieselben Bedingungen. Aus diesem Grunde ist durch die Angabe eines imaginären

Punktes eine reelle Gerade, die ihn enthalten soll, bestimmt, weil sie ihn mit seinem conjugirt imaginären Punkt verbinden mufs. *Die Gleichung der Verbindungsgeraden oder des Trägers des imaginären Punktepaares ist* (§ 35)

$$v'x - uy + u'v - uv' = 0 \quad (\text{vgl. § 17}).$$

Eine lineare Gleichung mit complexen Coefficienten können wir durch Trennung des reellen und des imaginären Teils stets in der Form schreiben

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 + i(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3) = 0.$$

Sie repräsentirt daher eine imaginäre Gerade, denn sie enthält aufser unendlich vielen imaginären Punkten nur einen einzigen reellen Punkt. Ein reelles Wertepaar $x \mid y$ genügt der complexen Gleichung nämlich nur, wenn es gleichzeitig die reellen Gleichungen befriedigt

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 = 0, \quad \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 = 0.$$

Diese beiden reellen Geraden bestimmen also in ihrem Schnittpunkt (§ 32) den reellen Punkt, der auch auf der imaginären Geraden liegt. Derselbe Punkt liegt aber auch auf der conjugirt imaginären Geraden

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 - i(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3) = 0.$$

Somit ist der Schnittpunkt conjugirt imaginärer Geraden stets reell und heifst der Träger des imaginären Paares. Ein reeller Punkt ist also durch die Angabe einer durch ihn gehenden imaginären Geraden bestimmt. Eine reelle oder imaginäre Gerade schneidet eine imaginäre nur dann reell, wenn sie durch ihren Träger geht; in allen andern Fällen ist der Schnittpunkt imaginär.

Auf die imaginären Geraden sind nun wiederum gewisse reelle geometrische Eigenschaften zu übertragen, indem die analytischen Ausdrücke derselben als Definitionen fortbestehend genommen werden. Vor allem erinnere man sich der allgemeinen analytischen Definitionen der goniometrischen Functionen, nach welchen für imaginäre und complexe Argumente

$$\sin i\eta' = i\,\frac{e^{\eta'} - e^{-\eta'}}{2},\quad \cos i\eta' = \frac{e^{\eta'} + e^{-\eta'}}{2},$$

$$\sin(\eta + i\eta') = \frac{e^{\eta'} + e^{-\eta'}}{2}\sin\eta + i\,\frac{e^{\eta'} - e^{-\eta'}}{2}\cos\eta,$$

$$\cos(\eta + i\eta') = \frac{e^{\eta'} + e^{-\eta'}}{2}\cos\eta - i\,\frac{e^{\eta'} - e^{-\eta'}}{2}\sin\eta.$$

Wir werden nun die Ausdrücke des § 31 für die Functionen des Winkels reeller Geraden auch für complexe Gleichungscoefficienten noch gelten lassen und durch sie den *Winkel zwischen imaginären Geraden* definiren. Fernerhin werden wir namentlich auch complexe Richtungscoefficienten und complexe Sinusteilverhältnisse (§ 25) in Betracht zu ziehen haben.

*43. Die imaginäre Gerade können wir geometrisch ebenso wenig direct veranschaulichen, als den imaginären Punkt, sondern wir müssen an ihrer Stelle reelle Gerade anzugeben suchen, durch welche sie völlig definirt werden kann (vgl. § 17).

Ist in der vorgelegten imaginären Gleichung die Summe der Coefficientenquadrate $(\alpha_1 + i\beta_1)^2 + (\alpha_2 + i\beta_2)^2$ von Null verschieden, so können wir die Gleichung mittelst Division durch die Quadratwurzel aus derselben gemäfs § 30 auf die *Normalform* bringen. Aber *die Gleichungen von zwei conjugirt imaginären Geraden*

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 \pm i(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3) = 0$$

besitzen stets gleichzeitig die Normalform, wenn

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_2^2 = 1,\quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0,$$

denn diese Bedingungen sind identisch mit

$$(\alpha_1 \pm i\beta_1)^2 + (\alpha_2 \pm i\beta_2)^2 = 1.$$

Unter Voraussetzung dieser Normalform erhalten wir die Gleichungen der Halbirungslinien h_1, h_2 des von ihnen eingeschlossenen Winkels, nach § 39 die eine als die Summe, die andere als die Differenz der complexen Gleichungen. Diese Operationen ergeben aber die Gleichungen

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 = 0,\quad \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 = 0,$$

d. h. *ein Paar conjugirt imaginärer Geraden besitzt stets ein reelles Paar von Winkelhalbirenden.*

Dieselben Winkelhalbirenden besitzen auch die Geraden j_1, j_2 oder

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 \pm (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3) = 0,$$

denn beide Gleichungen kommen gleichzeitig auf die Normalform durch Division durch

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2}.$$

Wir nennen in offenbarer Analogie zu § 17 j_1, j_2 *die reellen Stellvertreter der imaginären Geraden. In Bezug auf dieses Stellvertreterpaar sind die imaginären Geraden harmonisch conjugirt,* denn die Gleichungen derselben lassen sich auch in den Formen schreiben

$$(\alpha_1 + \beta_1) x + (\alpha_2 + \beta_2) y + \alpha_3 + \beta_3$$
$$= \pm i \{(\alpha_1 - \beta_1) x + (\alpha_2 - \beta_2) y + \alpha_3 - \beta_3\},$$

wie die Ausrechnung und Reduction sofort lehrt.

Diese Rechnungsvorschrift liefert zu einem gegebenen Linienpaar j_1, j_2 unzweideutig die Gleichungen der imaginären Geraden, deren Stellvertreter j_1, j_2 sein sollen und deren Winkelhalbirende h_1, h_2 mit denen jener zusammenfallen. Daraus folgern wir: *Ein Paar conjugirt imaginärer Geraden ist analytisch und geometrisch eindeutig definirt durch das reelle Stellvertreterpaar, nämlich als das gemeinsame harmonische Linienpaar* (vgl. § 57) *zu diesem und dem Paar seiner Winkelhalbirenden.*

Endlich werden wir, da auch hierin die Analogie zu § 17 unverkennbar durchzuführen ist, *die beiden imaginären Strahlen des Paares unterscheiden durch die beigefügte Angabe eines Drehungssinnes,* somit als $\{j_1 j_2\}$ und $\{j_2 j_1\}$.

Diese Definition wird sich (§ 96) auch auf den anfänglich ausgeschlossenen Fall ausdehnen lassen, daſs

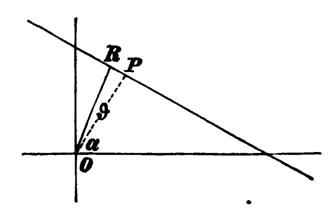
$$(\alpha_1 \pm i\beta_1)^2 + (\alpha_2 \pm i\beta_2)^2 = 0 \text{ oder } \frac{\alpha_1 \pm i\beta_1}{\alpha_2 \pm i\beta_2} = \pm i.$$

Für die Geraden der Richtungscoefficienten $\pm i$ werden infolge $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 0$ die Stellvertreter zu einander rechtwinklig, aber zugleich unbestimmt (vgl. § 58).

44. **Die Polargleichung einer Geraden** ist

$$r \cos(\vartheta - \alpha) = p \qquad (§ 12)$$

Wenn wir das Perpendikel OP auf die gegebene Gerade als Nullaxe voraussetzen, und $OR = r$ irgend ein durch den Pol nach einem ihrer Punkte gezogener Vector ist, so folgt für $\sphericalangle POR = \vartheta$, $OR . \cos\vartheta = OP$, d. h. die gesuchte Gleichung



$$r \cos\vartheta = p.$$

Bildet die Nullaxe mit dem Perpendikel den Winkel α, so ist die Gleichung (§ 7) $r\cos(\vartheta - \alpha) = p$. Diese Gleichung kann auch durch Transformation der Gleichung für rechtwinklige Coordinaten $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ erhalten werden; denn indem man für $x \mid y$ bez. $r\cos\vartheta \mid r\sin\vartheta$ (§ 7) substituirt, wird diese Gleichung $r(\cos\vartheta\cos\alpha + \sin\vartheta\sin\alpha) = p$, d. h. $r\cos(\vartheta - \alpha) = p$.

Eine Gleichung von der Form

$$r(a_1\cos\vartheta + a_2\sin\vartheta) + a_3 = 0$$

kann auf die Form $r\cos(\vartheta - \alpha) = p$ reducirt werden, indem man sie durch $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}$ dividirt und dann wie in § 30 setzt

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}}, \quad \sin\alpha = \frac{a_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}}, \quad p = \frac{-a_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}}.$$

B. 1) Die Gleichung $r = 2a\sec\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right)$ in eine solche zwischen rechtwinkligen Coordinaten umzuwandeln.

2) Die Polarcoordinaten des Schnittpunktes der Geraden

$$r\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) = 2a, \quad r\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{6}\right) = a$$

sind $r = 2a$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; der eingeschlossene Winkel ist $= \frac{\pi}{3}$.

3) Die Polargleichung der Verbindungsgeraden der Punkte $r_1 \mid \vartheta_1$, $r_2 \mid \vartheta_2$ ist (vgl. § 40)

$$r_1 r_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + r_2 r \sin(\vartheta_2 - \vartheta) + r r_1 \sin(\vartheta - \vartheta_1) = 0.$$

4) Die Polargleichung der Normale au. $r\cos(\vartheta - \alpha) = p$ aus $r_1 \mid \vartheta_1$ ist $r\sin(\vartheta - \alpha) = r_1\sin(\vartheta_1 - \alpha)$.

5) Der Abstand des Punktes $r_1 \mid \vartheta_1$ von der Geraden $r\cos(\vartheta - \alpha) = p$ ist $\pm(r_1\cos(\vartheta_1 - \alpha) - p)$.

Drittes Kapitel.

Aufgaben über Gerade und Linienpaare.

45. Nachdem wir im vorigen Kapitel die Principien dargelegt haben, auf welche gestützt wir die Lage eines Punktes oder einer Geraden algebraisch auszudrücken im Stande sind, wollen wir einige weitere Beispiele von der Anwendung dieser Methode zur Auflösung geometrischer Aufgaben hinzufügen. Der Anfänger mufs sich in der Anwendung der Methode zur Lösung solcher Aufgaben üben, bis er Sicherheit und Schnelligkeit in ihrem Gebrauche erlangt hat.

Bei den Auflösungen geometrischer Aufgaben können im allgemeinen die Gleichungen durch eine geschickte Wahl der Coordinatenaxen vereinfacht werden; indem man zwei der wichtigsten Linien der Figur zu Coordinatenaxen wählt, werden die analytischen Ausdrücke wesentlich verkürzt (vgl. § 35. 7), 8), 9), § 36. 7)). Anderseits geschieht es freilich oft, dafs durch die Annahme von Coordinatenaxen, welche mit der Figur nicht in einer solchen besondern Verbindung stehen, die Gleichungen an Symmetrie das gewinnen, was ihnen an Einfachheit abgeht. Der Leser kann dies aus den zwei in § 41 1), 2) gegebenen Auflösungen derselben Aufgabe erkennen, wo die erste Auflösung, obgleich die längere, den Vorzug hat, dafs man aus der entwickelten Gleichung der einen Seitenhalbirungslinie sogleich die der beiden andern ohne Rechnung ableiten kann.

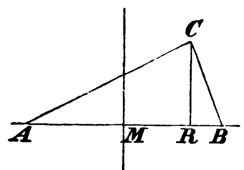
Weil Ausdrücke, welche Winkel enthalten, durch die Anwendung schiefwinkliger Coordinaten complicirter werden,

ist es im allgemeinen ratsam, für solche Aufgaben rechtwinklige Axen vorauszusetzen.

Die analytische Geometrie eignet sich mit vorzüglicher Leichtigkeit zur Untersuchung *geometrischer Örter*. Wir haben nur die Relation aufzusuchen, welche die Bedingungen der Aufgabe zwischen den Coordinaten des Punktes fordern, dessen Ort gesucht wird; der algebraische Ausdruck dieser Relation liefert uns sofort die *Gleichung* des verlangten Ortes (§ 21).

B. 1) Ort der Spitze eines Dreiecks, von dem die Basislänge $2c$ und die Differenz der Quadrate der Seiten gegeben sind.

Wir nehmen die Basis und die rechtwinklige Halbirungslinie derselben zu Coordinatenaxen, und nennen die Coordinaten des Scheitels $x \mid y$. Dann ist



$$\overline{AC}^2 = y^2 + (c+x)^2,\ \overline{BC}^2 = y^2 + (c-x)^2,$$
$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 4cx;$$

die Gleichung des fraglichen Ortes ist also $4cx = m^2$; derselbe ist somit eine zur Basis normale Gerade in einer Entfernung $x = \frac{m^2}{4c}$ vom Mittelpunkte. Man sieht auch, dafs die Differenz der Quadrate der Basissegmente $\overline{AR}^2 - \overline{BR}^2$ der Differenz der Quadrate der Seiten gleich ist.

2) Ort des Scheitels aus der Basis und der gegebenen constanten Summe $\cot A + m \cot B = p$.

Aus der Figur folgt $\cot A = \frac{c+x}{y}$, $\cot B = \frac{c-x}{y}$; die Gleichung des Ortes ist also $c + x + m(c-x) = py$, die Gleichung einer Geraden.

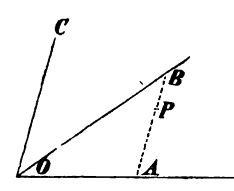
3) Von einem Dreieck ist die Basis $2c$ und die Summe m der Seiten gegeben; welches ist der Ort des Punktes in dem von seiner Spitze auf die Basis gefällten Perpendikel, welcher jenseits der Spitze um die Länge der einen Seite von der Basis entfernt ist?

Wir nehmen dieselben Axen, um zu untersuchen, welche Relation zwischen den Coordinaten des Punktes besteht, dessen Ort wir zu bestimmen haben. Die Abscisse desselben ist MR und seine Ordinate nach der Voraussetzung AC; also ist

$$BC = m - y.$$

Auch gilt $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \,.\, AR$,
d. h. $(m - y)^2 = 4c^2 + y^2 - 4c(c + x)$,
woraus wir durch Reduction erhalten $2my - 4cx = m^2$, die Gleichung einer Geraden.

4) Wenn zwei feste Gerade OA, OB durch eine dritte AB von gegebener Richtung ($\| OC$) geschnitten werden, so soll der Ort des Punktes P gefunden werden, der die Strecke AB in dem Verhältnis teilt, dafs $PA = n \,.\, AB$.



Wir können hier schiefwinklige Axen anwenden, weil die Aufgabe die Betrachtung von Winkeln nicht erfordert: Nehmen wir also OA zur x-Axe, OC zur y-Axe, so dafs die Gleichung von OB von der Form $y = mx$ ist. Also ist $AB = m \,.\, OA$; somit $AP = mn \,.\, OA$, und der gesuchte Ort des Punktes P eine Gerade aus dem Anfangspunkt von der Gleichung $y = mnx$.

5) Man denke wie vorher AP parallel OC gezogen und durch eine Anzahl von Geraden in Punkten B, B', B'' etc. geschnitten, AP aber als proportional der Summe aller Ordinaten AB, AB' etc. bestimmt, und den Ort von P gesucht.

Für $y = mx$, $y = m'x + n'$, $y = m''x + n''$, etc. als die Gleichungen der festen Geraden ist die Gleichung des Ortes

$$ky = mx + (m'x + n') + (m''x + n'') + \text{etc.}$$

6) Von einer beliebigen Anzahl von Dreiecken mit gemeinschaftlicher Spitze sind die Grundlinien und die Summe m^2 ihrer Flächen gegeben; man soll den Ort ihrer Spitze finden.

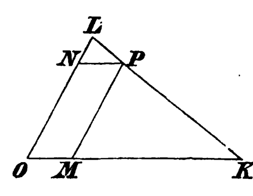
Sind die Gleichungen der Grundlinien

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad x \cos \beta + y \sin \beta - p_1 = 0,$$
$$x \cos \gamma + y \sin \gamma - p_2 = 0, \text{ etc.,}$$

und ihre Längen a, b, c etc., so ist $a(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)$ (§ 37) der doppelte Inhalt des ersten Dreiecks; die Gleichung des Ortes mufs daher sein

$$a(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) + b(x \cos \beta + y \sin \beta - p_1)$$
$$+ c(x \cos \gamma + y \sin \gamma - p_2) + \ldots = 2m^2;$$

der Ort ist also eine Gerade.



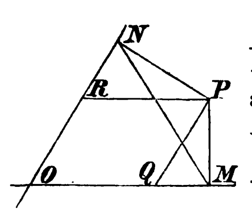
7) Aus gegebenem Winkel an der Spitze und der Summe s der ihn einschliefsenden Seiten den Ort des Punktes zu finden, der die Basis in gegebenem Verhältnis teilt.

Wir denken jene Seiten des Dreiecks als Coordinatenaxen und das Verhältnis $KP : PL = n : m$. Dann ist aus ähnlichen Dreiecken

$$OK = \frac{m+n}{m} x, \quad OL = \frac{m+n}{n} y$$

und der Ort eine Gerade von der Gleichung

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \frac{s}{m+n}.$$



8) Man bestimme den Ort eines Punktes P, wenn die Summe der Abschnitte $OM + ON$ gegeben ist, welche die von ihm auf zwei feste Gerade gefällten Perpendikel PM, PN in diesen bestimmen.

Indem man die festen Linien zu Axen wählt, findet man

$$OM = x + y \cos \omega, \quad ON = y + x \cos \omega$$

und daher die Gleichung des Ortes $x + y = \text{const.}$

9) Man soll den Ort bestimmen unter der Voraussetzung, dafs MN einer festen Geraden parallel sei; er ist

$$y + x \cos \omega = m (x + y \cos \omega).$$

10) Ebenso, wenn MN durch eine gegebene Gerade $y = mx + n$ halbirt (oder allgemeiner in gegebenem Verhältnis geteilt) werden soll.

Die Coordinaten des Mittelpunktes ergeben sich mittelst der Coordinaten von P gleich $\frac{1}{2}(x + y \cos \omega) \mid \frac{1}{2}(y + x \cos \omega)$, und da sie der Gleichung der gegebenen Geraden genügen müssen, so ist der Ort von P durch $y + x \cos \omega = m (x + y \cos \omega) + 2n$ dargestellt.

11) Ort des Mittelpunktes von MN, wenn P die Gerade $y = mx + n$ durchläuft.

Sind $\alpha \mid \beta$ die Coordinaten von P, $x \mid y$ die des Mittelpunktes, so ward in der vorigen Aufgabe bewiesen, dafs

$$2x = \alpha + \beta \cos \omega, \quad 2y = \beta + \alpha \cos \omega$$

sei; die Auflösung dieser Gleichungen für $\alpha \mid \beta$ liefert

$$\alpha \sin^2 \omega = 2x - 2y \cos \omega, \quad \beta \sin^2 \omega = 2y - 2x \cos \omega,$$

und nach der Relation $\beta = m\alpha + n$, welche α und β verbindet, ist

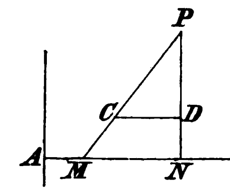
$$2y - 2x \cos \omega = m (2x - 2y \cos \omega) + n \sin^2 \omega$$

die Gleichung des Ortes.

46. Es ist üblich und zweckmäfsig, die Coordinaten des veränderlichen Punktes, welcher einen Ort beschreibt, durch $x \mid y$ und dagegen die Coordinaten fester Punkte durch Buchstaben mit Indices oder mit Accenten zu bezeichnen; dem entsprechend sind in den vorigen Aufgaben die Buchstaben x und y überall für die Coordinaten des Punktes gewählt

worden, nach dessen Ort gefragt ward. Oft ist es aber zur Bestimmung des Ortes notwendig, die Gleichungen von Linien zu bilden, welche mit der Figur in Verbindung stehen, und dann entsteht die Gefahr der Verwirrung zwischen den laufenden Coordinaten $x \mid y$ eines Punktes in einer solchen Geraden und den Coordinaten $x \mid y$ des Punktes, welcher den gesuchten Ort beschreibt. In solchen Fällen ist es zweckmäfsig, die Coordinaten des letzten Punktes zuerst durch andere Buchstaben, etwa $\alpha \mid \beta$, zu bezeichnen und die Betrachtung bis zur Aufstellung einer sie verbindenden Relation zu führen. Diese ist bereits die Gleichung des Ortes und wird in der gewöhnlichen Form erhalten, indem man $\alpha \mid \beta$ durch $x \mid y$ ersetzt, da dann diese letzteren die Coordinaten des den Ort beschreibenden Punktes bezeichnen.

B. 1) Ort der Spitze P eines Dreiecks, von welchem die Basis CD und das Verhältnis $AM : NB$ der Teile gegeben ist, welche die Seiten in einer festen der Basis parallelen Strecke AB abschneiden.



Wir nehmen AB und die zu ihr normale Gerade durch A zu Axen und haben AM, NB mittelst der Coordinaten $\alpha \mid \beta$ von P auszudrücken. Sind $x' \mid y'$, $x'' \mid y'$ die Coordinaten von C und D, so ist die Gleichung der Geraden PC als der Verbindungslinie von $\alpha \mid \beta$ und $x' \mid y'$ (§ 34)

$$(\beta - y')\,x - (\alpha - x')\,y = \beta x' - \alpha y'.$$

Dieser Gleichung genügt wie jeder Punkt von PC auch der in der Abscissenaxe gelegene Punkt M, dessen Abscisse $x = AM$ ist; wir erhalten also aus ihr für $y = 0$

$$AM = \frac{\beta x' - \alpha y'}{\beta - y'}; \text{ und ebenso } AN = \frac{\beta x'' - \alpha y'}{\beta - y'}.$$

Wenn $AB = c$ ist, so gibt die Relation $AM = k \,.\, NB$

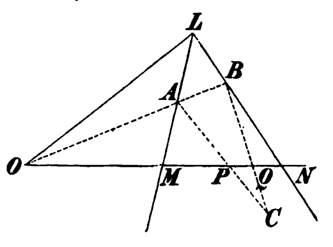
$$\frac{\beta x' - \alpha y'}{\beta - y'} = k\left\{c - \frac{\beta x'' - \alpha y'}{\beta - y'}\right\},$$

eine Gleichung, in welcher die Bedingungen des Problems mittelst der Coordinaten des Punktes P ausgedrückt sind. Nunmehr können ohne verwirrende Folge die Gröfsen $\alpha \mid \beta$ durch $x \mid y$ ersetzt werden, und es ergibt sich durch Beseitigung der Brüche die Gleichung des Ortes in der Form

$$yx' - y'x = k\{c\,(y - y') - (yx'' - y'x)\}.$$

2) Zwei Ecken eines Dreiecks ABC bewegen sich in festen Geraden LM, LN und die drei Seiten desselben drehen sich um feste Punkte O, P, Q, die in einer Geraden liegen; welches ist der Ort der dritten Ecke?

Wir nehmen die Gerade OP, welche die drei festen Punkte enthält, zur x-Axe und die Gerade OL, welche den Schnittpunkt der beiden festen Geraden mit dem Punkte O verbindet, zur y-Axe. Unter den Voraussetzungen



$$OL = b,\ OM = a,\ ON = a',\ OP = c,\ OQ = c'$$

sind die Gleichungen von LM und LN

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ und } \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1.$$

Ist ABC eine durch die Coordinaten $\alpha \mid \beta$ von C bestimmte Lage des beweglichen Dreiecks, so ist die Gleichung von CP, als der Verbindungslinie des Punktes $\alpha \mid \beta$ mit P oder $c \mid 0$

$$(\alpha - c)\, y - \beta x + \beta c = 0.$$

Daraus folgen die Coordinaten des Schnittpunktes A dieser Linie mit $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ als

$$x_1 = \frac{ab\,(\alpha - c) + ac\beta}{b\,(\alpha - c) + a\beta},\quad y_1 = \frac{b\,(a - c)\,\beta}{b\,(\alpha - c) + a\beta},$$

und die Coordinaten von B werden aus ihnen gefunden, indem man statt a und c bez. a' und c' einführt:

$$x_2 = \frac{a'b.(\alpha - c') + a'c'\beta}{b\,(\alpha - c') + a'\beta},\quad y_2 = \frac{b\,(a' - c')\,\beta}{b\,(\alpha - c') + a'\beta}.$$

Damit aber diese beiden Punkte $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$ in einer Geraden durch den Nullpunkt liegen, mufs (§ 35)

$$x_1 : y_1 = x_2 : y_2 \quad \text{sein, also}$$

$$\frac{b\,(a - c)\,\beta}{ab\,(\alpha - c) + ac\beta} = \frac{b\,(a' - c')\,\beta}{a'b\,(\alpha - c') + a'c'\beta}.$$

Da diese Relation von den Coordinaten des Punktes $\alpha \mid \beta$ stets erfüllt werden mufs, so wird die Gleichung des Ortes einfach dadurch erhalten, dafs man $\alpha \mid \beta$ mit $x \mid y$ vertauscht; durch Befreiung von Brüchen ergibt sich dann

$$(a - c)\,[a'b\,(x - c') + a'c'y] = (a' - c')\,[ab\,(x - c) + acy]$$

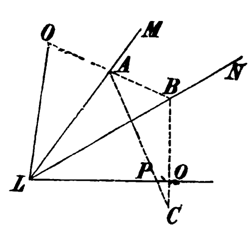
oder

$$\frac{(ac' - a'c)\,x}{cc'\,(a - a') - aa'\,(c - c')} + \frac{y}{b} = 1.$$

Der Ort ist demnach eine durch den Punkt L gehende Gerade.

3) In der letzten Aufgabe den Ort der Ecke C unter der

Voraussetzung zu finden, dafs die Punkte P, Q in einer statt durch O durch L gehenden Geraden liegen.



Wir lösen zuerst das allgemeine Problem, in welchem die Punkte P, Q eine vollkommen unbestimmte Lage haben, und wählen dazu die Linien LM, LN zu Coordinatenaxen. Sind dann die Coordinaten von P, Q, O, C bez. $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$, $x_3 \mid y_3$, $\alpha \mid \beta$, so ist die Bedingung auszudrücken, dafs die Verbindungslinie der Punkte A und B, in welchen die Geraden CP, CQ die Axen schneiden, stets durch O gehe. Nun ist die Gleichung von CP: $(\beta - y_1)x - (\alpha - x_1)y = \beta x_1 - \alpha y_1$, und der von ihr in der x-Axe bestimmte Abschnitt daher $LA = \frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{\beta - y_1}$. In derselben Weise ist der von CQ in der y-Axe gebildete Abschnitt $LB = \frac{\alpha y_2 - \beta x_2}{\alpha - x_2}$, und daher die Gleichung von AB

$$\frac{x}{LA} + \frac{y}{LB} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{x(\beta - y_1)}{\beta x_1 - \alpha y_1} + \frac{y(\alpha - x_2)}{\alpha y_2 - \beta x_2} = 1.$$

Dafs diese Gleichung durch die Coordinaten $x_3 \mid y_3$ erfüllt werde, ist die Bedingung des Problems, d. h. die Coordinaten $\alpha \mid \beta$ des Punktes C sind durch die Relation verbunden

$$\frac{x_3(\beta - y_1)}{\beta x_1 - \alpha y_1} + \frac{y_3(\alpha - x_2)}{\alpha y_2 - \beta x_2} = 1.$$

Die Befreiung von den Brüchen zeigt, dafs diese Gleichung in den $\alpha \mid \beta$ im allgemeinen vom zweiten Grade ist. Wenn wir aber voraussetzen, dafs die Punkte $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$ in derselben Geraden $y = mx$ durch L liegen, so dafs $y_1 = mx_1$, $y_2 = mx_2$ ist, so kann die Gleichung in der Form $\frac{x_3(\beta - y_1)}{x_1(\beta - \alpha m)} + \frac{y_3(\alpha - x_2)}{x_2(\alpha m - \beta)} = 1$ geschrieben werden, und die Befreiung von Brüchen und Ersetzung von $\alpha \mid \beta$ durch $x \mid y$ gibt die Gleichung des Ortes als einer Geraden

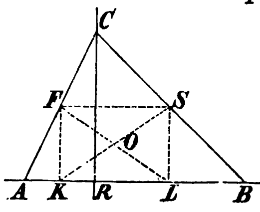
$$x_3 x_2 (y - y_1) - y_3 x_1 (x - x_2) = x_1 x_2 (mx - y).$$

47. Anstatt die Bedingungen der Aufgabe direct in Function der Coordinaten des Punktes auszudrücken, dessen Ort gesucht wird, ist es oft zweckmäfsig, sie zunächst vermittelst anderer Linien der Figur zu bestimmen. Dann ist es nötig, so viele Relationen aufzustellen, als zur Elimination der so eingeführten Unbekannten hinreichend sind, um durch die-

selbe eine Gleichung zwischen den Coordinaten des Punktes zu finden, dessen Ort gesucht wird. Die folgenden Beispiele werden zur Erläuterung dieser Methode hinreichen.

A. 1) Ort der Mittelpunkte der Rechtecke, die in ein gegebenes Dreieck ABC eingeschrieben sind.

Wir nehmen CR und AB zu Coordinatenaxen und setzen $CR = p$, $RB = s$ und $AR = s'$: dann sind die Gleichungen von AC und BC $\frac{y}{p} - \frac{x}{s'} = 1$ und $\frac{y}{p} + \frac{x}{s} = 1$.



Wenn wir nun in der Entfernung $FK = k$ eine Parallele FS ziehen, so finden wir die Abscissen der Punkte F und S, in denen diese AC und BC begegnet, durch Substitution von $y = k$ in die Gleichungen von AC und BC. So erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$x = RK = -s'\left(1 - \frac{k}{p}\right);$$

aus der zweiten $x = RL = s\left(1 - \frac{k}{p}\right)$.

Daraus ergibt sich die Abscisse des Mittelpunktes von FS (§ 13): $x = \frac{s - s'}{2}\left(1 - \frac{k}{p}\right)$. Diese ist die Abscisse von O, die Ordinate ist $y = \frac{1}{2}k$. Sollen wir eine Relation finden, welche zwischen dieser Ordinate und Abscisse für jeden Wert von k bestehen mufs, so haben wir nur zwischen diesen Gleichungen k zu eliminiren; dann erhalten wir für die Gleichung des verlangten Ortes $2x = (s - s')\left(1 - \frac{2y}{p}\right)$ oder $\frac{2x}{s - s'} + \frac{2y}{p} = 1$.

Der gesuchte Ort ist also eine Gerade, und die Axenabschnitte derselben zeigen, dafs sie den Mittelpunkt der Basis AB mit dem Mittelpunkte der Höhe CR verbindet.

2) Parallel zur Basis eines Dreiecks ist eine Gerade gezogen, und die Punkte, in denen sie die Seiten desselben schneidet, sind mit zwei festen Punkten in der Basis durch Gerade verbunden. Ort des Schnittpunktes dieser letzteren?

Wir behalten die Axen und die übrigen Bestimmungen in 1) und nehmen als die Coordinaten der festen Punkte T und V der Basis $m \mid 0$ und $n \mid 0$. Dann ist die Gleichung

von FT $\quad \left[s'\left(1 - \frac{k}{p}\right) + m\right] y + kx - km = 0,$

von SV $\quad \left[s\left(1 - \frac{k}{p}\right) - n\right] y - kx + kn = 0.$

Da nun der Punkt, dessen Ort wir suchen, in jeder der beiden Geraden FT und SV liegt, so drücken die eben geschriebenen Gleichungen Relationen aus, die seine Coordinaten erfüllen müssen; da sie aber die Gröfse k enthalten, so entsprechen die Relationen der speciellen Lage des Punktes allein, für welche die Parallele FS in der Höhe k über der Basis gezogen ist. Eliminiren wir aber die Unbestimmte k zwischen diesen Gleichungen, so erhalten wir eine Relation, welche neben den Coordinaten des betrachteten Punktes nur bekannte Gröfsen enthält, und die als wahr für jede beliebige Lage der Parallelen FS die geforderte Gleichung des Ortes sein wird.

Aus diesen Gleichungen in der Form

$$(s' + m)\,y - k\left(\frac{s'}{p}\,y - x + m\right) = 0$$

$$(s - n)\,y - k\left(\frac{s}{p}\,y + x - n\right) = 0$$

eliminiren wir k und erhalten die Gleichung des Ortes

$$(s - n)\left(\frac{s'}{p}\,y - x + m\right) = (s' + m)\left(\frac{s}{p}\,y + x - n\right),$$

die Gleichung einer Geraden.

3) In einem Dreieck sind die Schnittpunkte der Seiten mit einer Parallelen zur Basis verbunden mit den gegenüberliegenden Basisecken; Ort des Schnittpunktes der Verbindungslinien?

Die Aufgabe ist zwar ein specieller Fall der vorigen, nimmt aber eine einfachere Auflösung an, indem man die Dreiecksseiten AC und CB zu Axen wählt; sind dann ihre Längen a und b, so können die proportionalen Abschnitte, welche die Parallele in ihnen macht, durch μa und μb ausgedrückt werden. Dann sind die Gleichungen der Transversalen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\mu b} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{\mu a} + \frac{y}{b} = 1;$$

indem man die eine von der andern subtrahirt und den Rest durch die Constante $1 - \frac{1}{\mu}$ dividirt, erhält man für die Gleichung des Ortes $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, die Gleichung der Verbindungsgeraden der Spitze des Dreiecks mit dem Mittelpunkt der Basis (§ 41. 2)).

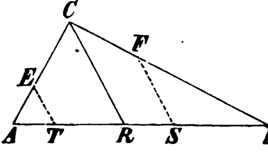
4) Es sind zwei feste Punkte A und B, je einer in jeder Axe, gegeben und zwei veränderliche A' und B' in denselben Axen so bestimmt, dafs $OA' + OB' = OA + OB$ ist; Ort des Schnittpunktes der Geraden AB' und $A'B$?

Sei $OA = a$, $OB = b$, $OA' = a + k$, so ist nach den Bedingungen des Problems $OB' = b - k$; die Gleichungen von

AB', $A'B$ sind bez. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b-k}=1$, $\frac{x}{a+k}+\frac{y}{b}=1$, oder
$bx+ay-ab+k(a-x)=0$, $bx+ay-ab+k(y-b)=0$.

Wir eliminiren k durch Subtraction und erhalten für die Gleichung des Ortes $x+y=a+b$.

5) In der Basis AB eines Dreiecks sei ein Stück $AT=k$ und am andern Ende ein Stück BS genommen, welches zu AT in einem festen Verhältnis m steht; werden sodann ET und FS einer festen Geraden CR parallel gezogen, so ist der Ort des Punktes O zu finden, in welchem sich die Linien EB und FA schneiden.



Wir nehmen AB zur x-Axe, CR zur y-Axe, setzen $BR=s$, $AR=s'$, $CR=p$, so dafs $BS=mk$ ist. Alsdann sind die Abscissen von S $s=mk$ und von T $-(s'-k)$.

Wir finden die Coordinaten von E und F, indem wir diese Werte von x in die Gleichungen von AC und BC substituiren; also

$$E \text{ als } -(s'-k)\,\Big|\,\frac{pk}{s'},\quad F \text{ als } s-mk\,\Big|\,\frac{mpk}{s}.$$

Wir bilden nun die Gleichungen der Geraden EB und FA, nämlich

$$EB \qquad (s+s'-k)\,y+\frac{pk}{s'}\,x-\frac{pks}{s'}=0,$$

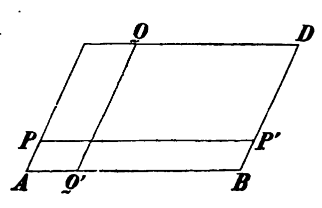
$$FA \qquad (s+s'-mk)\,y-\frac{mpk}{s}\,x-\frac{mpks'}{s}=0,$$

und eliminiren endlich k durch Subtraktion und Division des Restes durch k; so erhalten wir die Gleichung einer Geraden

$$(m-1)\,y+\left(\frac{mp}{s}+\frac{p}{s'}\right)x+\left(\frac{mps'}{s}-\frac{ps}{s'}\right)=0.$$

6) PP' und QQ' sind ein Paar beliebige Parallelen zu den Seiten eines Parallelogramms; welches ist der Ort des Schnittpunktes der Linien PQ und $P'Q'$?

Wir nehmen zwei der Seiten des Parallelogramms zu Axen und setzen ihre Längen a und b, bezeichnen AQ' durch m und AP durch n. Dann ist die Gleichung von PQ, der Verbindungsgeraden von $0\,|\,n$ mit $m\,|\,b$, $(b-n)\,x-my+mn=0$, und die Gleichung von $P'Q'$, der Verbindungslinie von $a\,|\,n$ mit $m\,|\,0$,



$$nx-(a-m)\,y-mn=0.$$

Da hier zwei unbestimmte Gröfsen m und n vorhanden sind, so kann man vermuten, dafs es nicht möglich sein werde, sie beide aus diesen zwei Gleichungen zu

eliminiren; wenn man jedoch die beiden Gleichungen durch Addition vereinigt, so verschwinden beide Unbestimmte und man erhält den Ort $bx - ay = 0$, die Gleichung der Diagonale des Parallelogramms.

7) Ein Punkt und zwei feste Gerade sind gegeben; man zieht durch jenen irgend zwei Gerade und verbindet die Punkte, wo diese den festen Geraden begegnen, kreuzweise; Ort des Schnittpunktes dieser Verbindungslinien?

Wir nehmen die festen Geraden zu Coordinatenaxen und lassen die Gleichungen der durch den festen Punkt willkürlich gezogenen Geraden sein

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} = 1.$$

Weil diese Linien durch den festen Punkt $x' \mid y'$ gehen müssen, sind $\frac{x'}{m} + \frac{y'}{n} = 1$ und $\frac{x'}{m'} + \frac{y'}{n'} = 1$ oder durch Subtraction

$$x'\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right) + y'\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) = 0.$$

Die Gleichungen der Transversalen sind offenbar $\frac{x}{m} + \frac{y}{n'} = 1$ und $\frac{x}{m'} + \frac{y}{n} = 1$ und liefern durch Subtraction

$$x\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right) - y\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung und der vorher gefundenen lassen sich $\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right)$ und $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)$ eliminiren, und wir erhalten dadurch mit $x'y + y'x = 0$, die Gleichung einer Geraden durch den Nullpunkt.

8) Durch irgend einen Punkt in der Basis eines Dreiecks wird in gegebener Richtung eine Gerade von gegebener Länge so gezogen, daſs sie in jenem Punkte halbirt (allgemeiner von der Basis in einem gegebenen Verhältnis geteilt) ist; welches ist der Ort der Schnittpunkte der Linien, die ihre Enden mit denen der Basis verbinden?

48. Der Grundgedanke der analytischen Geometrie liegt darin, daſs jede durch einen Punkt zu erfüllende geometrische Bedingung zu einer Gleichung führt, die durch seine Coordinaten befriedigt werden muſs. Darum ist es sehr wichtig, daſs der Anfänger in dieser Wissenschaft in der Anwendung jener Idee sich übe, um so möglichst jede geometrische Bedingung durch eine Gleichung ausdrücken zu lernen. Wir fügen

deshalb zur weitern Übung eine Anzahl von Aufgaben über Örter bei, welche auf Gleichungen führen, deren Grad den ersten übersteigt. Obwohl die Interpretation solcher Gleichungen erst Gegenstand der spätern Kapitel und des weitern Ausbaues der Wissenschaft ist, so ist doch die Methode, durch welche man zu diesen Gleichungen gelangt — und damit haben wir es hier allein zu tun — dieselbe, wie in dem Falle des geradlinigen Ortes. In der Tat erfährt man ja erst durch die Aufstellung der Gleichung des Ortes den Grad derselben und des Problems. Die folgenden Beispiele sind so gewählt, daſs sie nach der Reihenfolge ihrer Aufzählung eine analoge Behandlung gestatten, wie die Aufgaben der vorhergehenden Artikel. In den bei ihnen gegebenen Auflösungen ist vorausgesetzt, daſs die Axen eben so gewählt sind, wie in diesen correspondirenden Beispielen des früheren.

B. 1) Der Ort der Spitze eines Dreiecks, wenn die Basis und die Quadratsumme der Seiten gegeben ist, ist

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}m^2 - c^2.$$

2) Ebenso, wenn die Basis und die Summe oder Differenz der m- und $n$fachen Seitenquadrate bekannt sind:

$$(m \pm n)(x^2 + y^2) + 2(m \mp n)cx + (m \pm n)c^2 = p^2.$$

3) Aus der Basis und dem Verhältnis der Seiten.

4) Aus der Basis und dem Product der Tangenten der an ihr anliegenden Winkel: $y^2 + m^2x^2 = m^2c^2$.

In diesem Beispiel und dem folgenden sind die Werte der Tangenten der Basiswinkel zu benutzen, welche in § 45. 2) gegeben sind.

5) Aus der Basis und dem Winkel an der Spitze, oder der Summe der Basiswinkel: $x^2 + y^2 - 2cy \cot C = c^2$.

6) Aus der Basis und der Differenz der Basiswinkel:

$$x^2 - y^2 + 2xy \cot D = c^2.$$

7) Aus der Basis und für das Verhältnis der Basiswinkel gleich 1 : 2 $\quad 3x^2 - y^2 + 2cx = c^2$.

8) Aus der Basis und dem Verhältnis der Tangenten der Winkel $\tan C = m \tan B$: $\quad m(x^2 + y^2 - c^2) = 2c(c - x)$.

9) Wie in § 45. 4) ist PA parallel zu OC gezogen, so daſs sie zwei Linien in Punkten B, B' schneidet, und der Punkt P ist so bestimmt, daſs $PA^2 = PB \cdot PB'$ ist. Der Ort von P ist $\quad mx(m'x + n') = y(mx + m'x + n')$.

10) PA ist als das harmonische Mittel zwischen AB und AB' bestimmt: $2mx(m'x + n') = y(mx + m'x + n')$.

11) Der Ort des Punktes, der in einem Dreieck von gegebenem Winkel an der Spitze und von constanter Fläche die Basis in gegebenen Verhältnissen teilt, ist $xy = \text{const.}$

12) Bei gegebener Basis: $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} - \frac{2xy\cos\omega}{mn} = \frac{b^2}{(m+n)^2}$.

13) Wenn die Basis durch einen festen Punkt geht:

$$\frac{mx'}{x} + \frac{ny'}{y} = m + n.$$

14) Man soll nach § 45. 8) den Ort von P bestimmen, wenn MN constant ist: $x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega = \text{const.}$

15) Wenn MN durch einen festen Punkt geht:

$$\frac{x'}{x + y\cos\omega} + \frac{y'}{y + x\cos\omega} = 1.$$

16) Wenn MN durch einen festen Punkt geht, so ist der Ort des Schnittpunktes der Parallelen zu den Axen aus M und N

$$\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} = 1.$$

17) Man soll in § 46. 1) den Ort von P bestimmen, wenn die Linie CD nicht zu AB parallel ist.

18) Soll der Abschnitt AB zwischen den Seiten eines Dreiecks von gegebener Basis in einer gegebenen Geraden constant sein, so ist der Ort der Spitze

$$(x'y - xy')(y - y'') - (x''y - xy'')(y - y') = c(y - y')(y - y'').$$

49. Aufgaben, in welchen zu beweisen ist, dafs eine bewegliche Gerade durch einen festen Punkt geht.

Nach § 40 geht die Gerade

$$(a_1 + kb_1)x + (a_2 + kb_2)y + a_3 + kb_3 = 0,$$

wo k eine unbestimmte Gröfse ist, immer durch einen festen Punkt, nämlich durch den Schnittpunkt der Geraden

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0, \quad b_1x + b_2y + b_3 = 0.$$

Wir entnehmen daraus den Satz: *Wenn die Gleichung einer Geraden eine Unbestimmte im ersten Grade enthält, so geht die Gerade immer durch einen festen Punkt.*

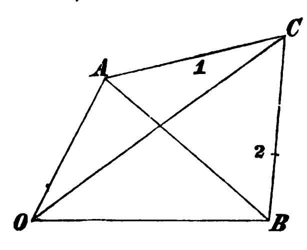
B. 1) Wenn in einem Dreieck der Winkel an der Spitze und die Summe der reciproken Werte der Seiten gegeben sind, so geht die Basis immer durch einen festen Punkt.

Für die Seiten als Axen ist die Gleichung der Basis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \text{und} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{m}$$

die zu erfüllende Bedingung; daher ist die Gleichung der Basis $\frac{x}{a} + \frac{y}{m} - \frac{y}{a} = 1$, wo m constant und a unbestimmt ist; schreiben wir dies $\frac{1}{a}(x - y) + \frac{y}{m} - 1 = 0$, so erkennen wir, dafs die Basis stets durch den Schnittpunkt der Geraden $x - y = 0$ und $y = m$ geht.

2) Die Ecken eines Dreiecks bewegen sich auf drei durch denselben Punkt gehenden festen Geraden OA, OB, OC und zwei seiner Seiten gehen durch feste Punkte; es ist zu beweisen, dafs auch die dritte Seite durch einen festen Punkt geht.



Wir wählen die festen Geraden OA, OB, in denen die Basisecken A, B sich bewegen, zu Axen y, x, so dafs die Linie OC, welche die Spitze des Dreiecks durchläuft, eine Gleichung von der Form $y = mx$ hat, und bezeichnen die Coordinaten der festen Drehpunkte 1 und 2 von AC und BC durch $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$. Sind dann in irgend einer Lage die Coordinaten der Spitze $a \mid ma$, so ist die Gleichung von AC

$$(x_1 - a)\, y - (y_1 - ma)\, x + a\,(y_1 - mx_1) = 0.$$

Ebenso ist die Gleichung von BC

$$(x_2 - a)\, y - (y_2 - ma)\, x + a\,(y_2 - mx_2) = 0.$$

Die Länge des von der Linie AC bestimmten Abschnittes OA wird hiernach durch Substitution von $x = 0$ in die Gleichung derselben gefunden, als

$$y = -\frac{a\,(y_1 - mx_1)}{x_1 - a};$$

ebenso die Länge des Abschnitts OB für $y = 0$ aus der Gleichung von BC als

$$x = \frac{a\,(y_2 - mx_2)}{y_2 - ma}.$$

Daraus ergibt sich die Gleichung von AB

$$x\,\frac{y_2 - ma}{y_2 - mx_2} - y\,\frac{x_1 - a}{y_1 - mx_1} = a.$$

Da hierin a unbestimmt ist und nur im ersten Grade vorkommt, so geht diese Gerade immer durch einen festen Punkt. Derselbe zeigt sich, indem man die Gleichung in der Form

$$\frac{y_2}{y_2 - mx_2}\,x - \frac{x_1}{y_1 - mx_1}\,y - a\left(\frac{mx}{y_2 - mx_2} - \frac{y}{y_1 - mx_1} + 1\right) = 0$$

schreibt, als der Schnittpunkt der zwei Geraden

$$\frac{y_2}{y_2 - m x_2} x - \frac{x_1}{y_1 - m x_1} y = 0, \quad \frac{m x}{y_2 - m x_2} - \frac{y}{y_1 - m x_1} + 1 = 0.$$

3) Man untersuche, ob in der vorigen Aufgabe unter gewissen Bedingungen die Basis auch dann noch durch einen festen Punkt geht, wenn die Gerade, in welcher die Spitze C sich bewegt, den Punkt O nicht enthält.

Wir behalten die Axen und die Bezeichnung bei, mit der einen notwendigen Abweichung, dafs die Gleichung der von der Spitze durchlaufenen Geraden durch $y = mx + n$ und daher die Coordinaten der Spitze in irgend einer Lage durch $a \mid ma + n$ ausgedrückt werden. Dann sind die Gleichungen von AC, BC

$$(x_1 - a) y - (y_1 - ma - n) x + a (y_1 - m x_1) - n x_1 = 0,$$
$$(x_2 - a) y - (y_2 - ma - n) x + a (y_2 - m x_2) - n x_2 = 0,$$

woraus $OA = -\frac{a (y_1 - m x_1) - n x_1}{x_1 - a}$, $OB = \frac{a (y_2 - m x_2) - n x_2}{y_2 - ma - n}$.

Daher ist die Gleichung von AB

$$x \frac{y_2 - ma - n}{a (y_2 - m x_2) - n x_2} - y \frac{x_1 - a}{a (y_1 - m x_1) - n x_1} = 1.$$

Wenn diese Gleichung von Brüchen befreit wird, so enthält sie im Allgemeinen a im zweiten Grade, und die Basis geht nicht durch einen festen Punkt. Wenn aber die Punkte $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ in einer durch O gehenden Geraden $y = kx$ liegen, so dafs wir $y_2 = k x_2$ und $y_1 = k x_1$ substituiren können, so wird die Gleichung

$$x \frac{y_2 - ma - n}{x_2} - y \frac{x_1 - a}{x_1} = a (k - m) - n,$$

welche a nur im ersten Grade enthält und somit eine durch einen festen Punkt gehende Gerade bezeichnet.

4) Wenn eine Gerade so bestimmt wird, dafs die Producte der auf sie von einer Anzahl fester Punkte $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$, gefällten Perpendikel mit bestimmten Constanten m_1, m_2, ... die Summe Null geben, so geht dieselbe durch einen festen Punkt.

Ist die Gleichung der Geraden $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, so ist die von $x_1 \mid y_1$ auf sie gefällte Normale von der Länge $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$, und die Bedingungen liefern

$$m_1 (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p) + m_2 (x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha - p)$$
$$+ m_3 (x_3 \cos \alpha + y_3 \sin \alpha - p) + \cdots = 0.$$

Unter Benutzung der Bezeichnung $\Sigma (m_1 x_1)$ für die algebraische Summe der mx, d. h. für $m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots$ und in gleicher Art $\Sigma (m_1 y_1)$ für $m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots$, $\Sigma (m_1)$ für $m_1 + m_2 + \cdots$ können wir diese Gleichung schreiben

$$\Sigma (m_1 x_1) \cos \alpha + \Sigma (m_1 y_1) \sin \alpha - p \, \Sigma (m_1) = 0.$$

Indem wir in die Originalgleichung den hieraus erhaltenen Wert von p substituiren, erhalten wir für die Gleichung der beweglichen Geraden

$$x\,\Sigma(m_1)\cos\alpha + y\,\Sigma(m_1)\sin\alpha - \Sigma(m_1x_1)\cos\alpha - \Sigma(m_1y_1)\sin\alpha = 0$$

oder $$x\,\Sigma(m_1) - \Sigma(m_1x_1) + [y\,\Sigma(m_1) - \Sigma(m_1y_1)]\tan\alpha = 0.$$

Da diese Gleichung die unbestimmte Gröfse $\tan\alpha$ im ersten Grade enthält, so geht die durch sie ausgedrückte Gerade durch den festen Punkt, welchen die Gleichungen

$$x\,\Sigma(m_1) - \Sigma(m_1x_1) = 0, \quad y\,\Sigma(m_1) - \Sigma(m_1y_1) = 0$$

bestimmen, d. h. durch den Punkt

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}.$$

Dieser Punkt wird oft als das *Centrum der mittleren Entfernungen* der gegebenen Punkte bezeichnet, und ist der *Schwerpunkt* der gegebenen Punkte, wenn die Coefficienten m die denselben beigelegten Massen bedeuten.

50. Wenn die Gleichung einer Geraden die Coordinaten irgend eines Punktes im ersten Grade enthält, so wie

$$(a_1x' + a_2y' + a_3)x + (b_1x' + b_2y' + b_3)y + (c_1x' + c_2y' + c_3) = 0,$$

so geht diese Gerade immer durch einen festen Punkt, wenn der Punkt $x' \mid y'$ sich selbst auf einer Geraden

$$u_1x' + u_2y' + u_3 = 0$$

bewegt; denn dann kann mit Hülfe dieser Relation x' aus der gegebenen Gleichung eliminirt werden, und die unbestimmte Gröfse y' verbleibt im ersten Grade in derselben, die Linie geht also durch einen festen Punkt.

Daraus entspringt der Satz: *Wenn die Coefficienten in der Gleichung* $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ *durch die Relation* $k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = 0$ *verbunden sind, in welcher* k_1, k_2, k_3 *Constanten sind, indefs* a_1, a_2, a_3 *veränderlich gedacht werden, so geht die durch diese Gleichung dargestellte Gerade immer durch einen festen Punkt.*

Denn durch Elimination von a_3 zwischen beiden Gleichungen erhalten wir $(k_3x - k_1)a_1 + (k_3y - k_2)a_2 = 0$,

die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $\frac{k_1}{k_3} \mid \frac{k_2}{k_3}$.

51. **Das Teilverhältnis des Punktes, in welchem die Verbindungsgerade der Punkte $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ von der Linie $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$ geschnitten wird,** finden wir nach einer Methode, die wir oft anwenden werden, um den Punkt zu bestimmen, in welchem die Verbindungsgerade zweier gegebenen Punkte durch einen gegebenen Ort geschnitten wird.

Nach § 13 sind die Coordinaten eines Punktes in der Verbindungsgeraden der Punkte $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ immer durch $x = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2}$, $y = \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2}$ darstellbar, und wir können das Verhältnis $n_1 : n_2$, in welchem dieselbe durch den gegebenen Ort geteilt wird, als eine unbekannte Gröfse ansehen, welche sich aus der Bedingung bestimmt, dafs die eben geschriebenen Coordinaten der Gleichung des Ortes genügen müssen.

So haben wir im gegenwärtigen Falle

$$a_1 \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2} + a_2 \cdot \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2} + a_3 = 0;$$

also
$$\frac{n_1}{n_2} = - \frac{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3}{a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3},$$

woraus sich die Coordinaten des gesuchten Punktes ergeben.

Der Wert für $n_1 : n_2$ sagt geometrisch aus, dafs das Verhältnis, in welchem die Verbindungslinie von $x_1 | y_1$ und $x_2 | y_2$ geschnitten wird, dem Verhältnis der Abstände dieser Punkte von der gegebenen Geraden gleich ist; denn diese sind (§ 30), mit $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ multiplicirt, Zähler und Nenner des Bruches.

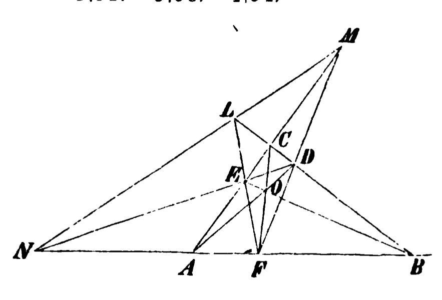
Das negative Zeichen in dem vorher gefundenen Werte entspringt daraus, dafs in dem Falle des innern Schnittes, welchem (§ 13) das positive Zeichen von $n_1 : n_2$ entspricht, die Normalen auf entgegengesetzten Seiten der gegebenen Linie liegen, daher (§ 30) als von entgegengesetzten Zeichen angesehen werden müssen.

Ist die zweite Gerade als die Verbindungslinie zweier andern Punkte $x_3 | y_3$, $x_4 | y_4$ gegeben, so dafs ihre Gleichung (§ 35)

$$(y_3 - y_4) x - (x_3 - x_4) y + x_3 y_4 - x_4 y_3 = 0,$$

so ist
$$\frac{n_1}{n_2} = - \frac{(y_3 - y_4) x_1 - (x_3 - x_4) y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3}{(y_3 - y_4) x_2 - (x_3 - x_4) y_2 + x_3 y_4 - x_4 y_3}.$$

Dies ist aber (§ 38) das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Dreiecke, deren Ecken sind $x_1 | y_1$, $x_3 | y_3$, $x_4 | y_4$ und $x_2 | y_2$, $x_3 | y_3$, $x_4 | y_4$, wie dies auch geometrisch evident ist.



B. 1) Wenn eine Gerade die Seiten eines Dreiecks AC, CA, AB in den Punkten L, M, N schneidet, so ist

$$\frac{BL \cdot CM \cdot AN}{LC \cdot MA \cdot NB} = -1.$$

Sind die Coordinaten der Ecken $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$, $x_3 | y_3$, so haben wir

$$\frac{BL}{LC} = -\frac{a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3}{a_1 x_3 + a_2 y_2 + a_3}, \quad \frac{CM}{MA} = -\frac{a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3}{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3},$$

$$\frac{AN}{NB} = -\frac{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3}{a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3},$$

und die Wahrheit des Satzes ist offenbar.

2) Wenn die Verbindungsgeraden eines Punktes mit den Ecken eines Dreiecks die Gegenseiten BC, CA, AB bez. in Punkten D, E, F schneiden, so ist

$$\frac{BD \cdot CE \cdot AF}{DC \cdot EA \cdot FB} = +1.$$

Sind die Ecken $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$, $x_3 | y_3$, und ist der angenommene Punkt $x_4 | y_4$, so folgt

$$\frac{BD}{DC} = \frac{x_1 (y_2 - y_4) + x_2 (y_4 - y_1) + x_4 (y_1 - y_2)}{x_1 (y_4 - y_3) + x_4 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_4)},$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{x_2 (y_3 - y_4) + x_3 (y_4 - y_2) + x_4 (y_2 - y_3)}{x_1 (y_2 - y_4) + x_2 (y_4 - y_1) + x_4 (y_1 - y_2)},$$

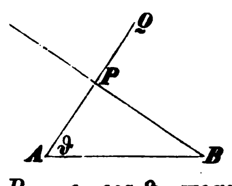
$$\frac{AF}{FB} = \frac{x_1 (y_4 - y_3) + x_4 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_4)}{x_2 (y_3 - y_4) + x_3 (y_4 - y_2) + x_4 (y_2 - y_3)},$$

und die Wahrheit des Satzes ist offenbar.

52. **Polar-Coordinaten.** Es ist im allgemeinen nützlich, diese Methode anzuwenden, wenn die Aufgabe verlangt, den Ort der Endpunkte von geraden Strecken zu finden, welche nach einem gegebenen Gesetz durch einen festen Punkt gezogen sind. Die folgenden Aufgaben 1)—4) führen auf geradlinige Örter, 5)—8) auf Örter höherer Ordnungen.

B. 1) A und B sind zwei feste Punkte; durch B wird eine Gerade gezogen, und von A ein Perpendikel AP darauf

gefällt und dasselbe so verlängert, dafs das Rechteck $AP \cdot AQ$ constant $= k^2$ bleibt. Ort des Punktes Q?

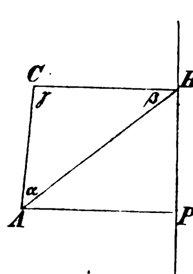


Wir nehmen A zum Pol und AB zur festen Axe, so dafs AQ der durch r zu bezeichnende Vector und der Winkel $BAQ = \vartheta$ ist; die Aufgabe fordert, die zwischen r und ϑ bestehende Relation zu finden. Wir setzen $AB = c$ und haben $AP = c \cdot \cos\vartheta$; wegen $AP \cdot AQ = k^2$ ist sodann

$$rc\cos\vartheta = k^2, \quad \text{oder} \quad r\cos\vartheta = \frac{k^2}{c}.$$

Dieses ist (§ 44) die Gleichung einer Normalen zu AB, die in der Entfernung $= \frac{k^2}{c}$ vom Pol vorbeigeht.

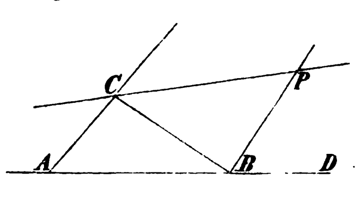
2) Von einem Dreieck, dessen Winkel gegeben sind, ist eine der Ecken A fixirt, die zweite B bewegt sich längs einer festen Geraden, man soll den Ort der dritten finden.



Wir nehmen die feste Ecke A zum Pol und das von ihm auf die feste Gerade gefällte Perpendikel AP zur Axe, so dafs $AC = r$, $\sphericalangle PAC = \vartheta$ ist.

Da die Winkel des Dreiecks ABC gegeben sind, so steht AB in einem festen Verhältnis zu AC, d. h. $AB = m \cdot AC$ und $\sphericalangle PAB = \vartheta - \alpha$; aber man hat $AP = AB \cdot \cos PAB$, d. h. mit $AP = a$, $mr\cos(\vartheta - \alpha) = a$, welches (§ 44) die Gleichung einer Geraden ist, die mit der gegebenen einen Winkel α bildet und die Entfernung $\frac{a}{m}$ vom Pol A besitzt.

3) In einem Dreieck ist die Basis und die Summe m der Seiten gegeben; in einem Endpunkt der Basis B errichtet man auf der anliegenden Seite BC ein Perpendikel und verlangt, den Ort des Punktes P zu finden, wo dieser von der äufseren Halbirungslinie CP des Winkels an der Spitze getroffen wird.



Indem wir den Punkt B zum Pol wählen, wird BP der Vector r und durch Wahl der verlängerten Basis zur festen Axe wird der Winkel $DBP = \vartheta$, und die Aufgabe verlangt, r durch ϑ auszudrücken. Wir bezeichnen die Seiten und die Gegenwinkel des Dreiecks durch a, b, c, A, B, C; dann ist offenbar $\sphericalangle BCP = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}C$ und aus dem Dreieck

PCB $a = r \tan \frac{1}{2}C$. Wenn wir a und $\tan \frac{1}{2}C$ durch ϑ ausdrücken können, so ist die Aufgabe gelöst. Aus dem Dreieck ABC ist $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$; hier kann für b eingesetzt werden $m - a$ und ist $\cos B = \sin \vartheta$; daher

$$m^2 - 2am + a^2 = a^2 + c^2 - 2ac \sin \vartheta,$$

und
$$a = \frac{m^2 - c^2}{2(m - c \sin \vartheta)}.$$

Ferner findet sich $\tan \frac{1}{2}C = \frac{b \sin C}{b(1 + \cos C)}$.

Aber $b \sin C = c \sin B = c \cos \vartheta$; $b \cos C = a - c \cos B = a - c \sin \vartheta$;

also
$$\tan \frac{1}{2}C = \frac{c \cos \vartheta}{m - c \sin \vartheta}.$$

Nun setzen wir die eben für a und $\tan \frac{1}{2}C$ erhaltenen Werte in die Gleichung $a = r \tan \frac{1}{2}C$ ein und erhalten

$$\frac{m^2 - c^2}{2(m - c \sin \vartheta)} = \frac{rc \cos \vartheta}{m - c \sin \vartheta}, \text{ oder } r \cos \vartheta = \frac{m^2 - c^2}{2c}.$$

Der Ort ist demnach eine Normale zur Basis des Dreiecks, in dem Abstande $\frac{m^2 - c^2}{2c}$ vom Punkte B.

Zu weiterer Übung untersuche man den Ort, welcher bei gegebener Differenz der Seiten durch die innere Halbirungslinie des Winkels an der Spitze bestimmt wird.

4) Gegeben sind n feste Gerade und ein fester Punkt O; wenn man durch diesen irgend einen Vector zieht, der diese Geraden in Punkten $R_1, R_2, R_3, \ldots R_n$ schneidet, und in ihm einen Punkt R so bestimmt, dafs OR das harmonische Mittel aller dieser Vectoren oder

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \frac{1}{OR_3} + \cdots + \frac{1}{OR_n}$$

ist, so soll man den Ort von R bestimmen.

Wenn die Gleichungen der Geraden durch

$r \cos(\vartheta - \alpha) = p_1$, $r \cos(\vartheta - \beta) = p_2$, $r \cos(\vartheta - \gamma) = p_3$, u. s. w.

dargestellt werden, so ist die Gleichung des Ortes offenbar

$$\frac{n}{r} = \frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{p_1} + \frac{\cos(\vartheta - \beta)}{p_2} + \frac{\cos(\vartheta - \gamma)}{p_3} + \ldots,$$

nach § 44 die Gleichung einer Geraden. Der hierin enthaltene Satz ist nur ein specieller Fall eines weit allgemeinern, welchen wir später beweisen werden.

5) Eine feste Gerade BP hat die Gleichung $r \cos \vartheta = m$, und in jedem Vector wird eine constante Länge PQ abgetragen; man soll den Ort von Q finden. (Fig. zu 1).)

Nach der Voraussetzung ist $AP = \frac{m}{\cos\vartheta}$; also ist

$$AQ = r = \frac{m}{\cos\vartheta} + d;$$

in rechtwinklige Coordinaten übertragen, gibt dies

$$(x-m)^2 (x^2+y^2) = d^2x^2.$$

6) Ort von Q, wenn P irgend einen durch seine Polargleichung $r = \varphi(\vartheta)$ gegebenen Ort durchläuft.

Da nach der Voraussetzung AP in Function von ϑ bestimmt ist und AP das um d verminderte r des Ortes ist, so haben wir in die gegebene Gleichung nur $r - d$ für r zu substituiren:

$$r - d = \varphi(\vartheta).$$

7) Wenn AQ so weit verlängert wird, dafs $AQ = 2 . AP$ ist, so ist AP die Hälfte von dem r des Ortes, und man hat an Stelle von r in die gegebene Gleichung $\frac{1}{2}r$ zu substituiren.

8) Wenn der Winkel BAP halbirt und in der Halbirungslinie eine Strecke AP' abgetragen wird, so dafs $AP'^2 = m . AP$ ist, so söll der Ort von P' gefunden werden unter der Voraussetzung, dafs P eine Gerade beschreibt. Da nun BAP das Doppelte vom ϑ des Ortes ist, so hat man $AP = \frac{m}{\cos 2\vartheta}$, und die Gleichung des Ortes ist $r^2 \cos 2\vartheta = m^2$.

53. Offenbar kann auch eine Gleichung höheren Grades gerade Linien darstellen, nämlich dann und nur dann (§ 23), wenn ihre linke Seite in lauter Factoren vom ersten Grade zerlegt werden kann. Wir können jederzeit solche Gleichungen n^{ten} Grades bilden, indem wir n lineare Gleichungen Seite für Seite mit einander multipliciren. Dagegen ist es aus einer vorgelegten Gleichung nicht ohne weitere Kriterien erkennbar, ob die durch sie dargestellte Curve zerfällt. Wir betrachten hier nur den Fall, wo sie in n Gerade zerfällt, die überdies durch einen Punkt gehen. Derselbe mufs dann als *ein $n$facher Punkt der singulären Curve n^{ter} Ordnung* bezeichnet werden (§ 22), denn für seine Coordinaten verschwindet jeder der n Factoren der linken Seite. *Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen zwei Veränderlichen repräsentirt n Gerade, welche durch einen Punkt gehen.* Denn ist die Gleichung

$$y^n - pxy^{n-1} + qx^2y^{n-2} \ldots \pm tx^n = 0,$$

so erhalten wir durch Division mit x^n

$$\left(\frac{y}{x}\right)^n - p\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + q\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} - \ldots = 0,$$

eine Gleichung, welche durch Auflösung n Werte für $\frac{y}{x}$ liefert; bezeichnen wir dieselben durch $a, b, c \ldots$, so kann die ursprüngliche Gleichung in die Factoren zerlegt werden

$$(y - ax)(y - bx)(y - cx) \ldots = 0.$$

Sie repräsentirt also n Gerade

$$y - ax = 0, \quad y - bx = 0, \ldots,$$

welche alle durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen.

Eine allgemeinere Form der Gleichung erhalten wir durch Coordinatentransformation, welche etwa $a|b$ zum Nullpunkt macht. Kann daher eine Gleichung n^{ten} Grades auf die Form gebracht werden

$$(y - b)^n - p(x - a)(y - b)^{n-1} + q(x - a)^2(y - b)^{n-2} \ldots \\ \pm l(x - a)^n = 0,$$

so bezeichnet sie n Gerade durch den Punkt $a|b$.

B. 1) Den durch die Gleichung $xy = 0$ dargestellten Ort bilden die beiden Coordinatenaxen, weil der Gleichung durch jede der beiden Voraussetzungen $x = 0$, $y = 0$ genügt wird.

2) Der durch $x^2 - y^2 = 0$ dargestellte Ort wird von den beiden Halbirungslinien der Axenwinkel $x + y$ gebildet (§ 39).

3) Die Gleichung $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$ repräsentirt die beiden Geraden $x - 2y = 0$, $x - 3y = 0$.

4) Der durch $x^2 - 2xy \sec \vartheta + y^2 = 0$ dargestellte Ort ist $x = y \tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2}\vartheta\right)$.

5) Welche Geraden sind ausgedrückt durch

$$x^2 - 2xy \tan \vartheta - y^2 = 0?$$

6) Welche Geraden repräsentirt

$$x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 = 0?$$

54. **Linienpaar.** Wenn eine Gleichung zweiten Grades zwei gerade Linien oder ein *Linienpaar* darstellt, mufs sie durch Coordinatentransformation auf die homogene Form gebracht werden können

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Sie repräsentirt in der Tat die beiden Geraden

$$y - m_1 x = 0, \quad y - m_2 x = 0,$$

wenn m_1, m_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind

$$C\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2B\left(\frac{y}{x}\right) + A = 0$$

oder also $\quad m_1 + m_2 = -2\frac{B}{C}, \; m_1 m_2 = \frac{A}{C}.$

Sind die Coefficienten der quadratischen Gleichung reell, so können diese Wurzeln entweder reell und verschieden, reell und gleich oder conjugirt complex sein, je nachdem die Discriminante

$$B^2 - AC \gtreqless 0 \text{ ist.}$$

Im ersten Falle stellt die gegebene Gleichung ein Paar reeller Geraden durch den Nullpunkt dar, deren Richtungscoefficienten m_1, m_2 sind. Ist zweitens die linke Seite der Gleichung ein vollständiges Quadrat, so sagen wir, um den Sprachgebrauch der Geometrie dem der Algebra entsprechend zu machen, die Gleichung stelle zwei zusammenfallende Gerade dar und nicht nur eine Gerade schlechthin. Denkt man drittens die Wurzeln complex, so genügen der Gleichung keine andern reellen Coordinaten als $x = 0$, $y = 0$, sie stellt also einen Ort dar, der aufser dem Nullpunkt nur imaginäre Punkte enthält. Wollen wir in Übereinstimmung mit der Ausdrucksweise der Algebra bleiben, so müssen wir in der Tat in die Betrachtung auch imaginäre Geraden aufnehmen. *Eine reelle quadratische homogene Gleichung negativer Discriminante definirt ein Paar conjugirt imaginärer Geraden mit dem Nullpunkt als reellem Schnittpunkt oder Träger.*

Wir interpretiren nun allgemein eine in $x - a$, $y - b$ homogene quadratische Gleichung als ein Linienpaar mit dem Doppelpunkt $a \mid b$. Ohne Annahme dieses einheitlichen Sprachgebrauchs der Algebra würde in vielen Fällen die Einfachheit und Strenge des Ausdrucks und manche wichtige Analogie verloren gehen müssen. Diese Ausdrucksweise reicht wirklich auch aus, um der homogenen Gleichung n^{ten} Grades die Interpretation als n Gerade durch einen Punkt zu sichern, da jede reelle Gleichung in reelle Factoren ersten und zweiten

Grades zerlegt werden kann. Überhaupt ist hervorzuheben, dafs weiterhin keine Gleichungen höheren Grades mit complexen Coefficienten berücksichtigt werden, dafs dagegen infolge des eben erwähnten Umstandes bei den linearen Gleichungen neben den reellen auch die complexen zur Geltung kommen müssen.

55. **Winkel δ des Linienpaares.** Wenn die Gleichung auf die Form $C(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0$ gebracht ist und rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt werden, so gilt nach § 31 für den Richtungsunterschied δ der beiden Geraden m_1, m_2 $\tan\delta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$. Da nun aber nach § 54 $m_1 + m_2$ und $m_1 m_2$ bekannt, also

$$m_1 - m_2 = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4 m_1 m_2} = \frac{2}{C}\sqrt{B^2 - AC}$$

ist, so folgt zur Bestimmung von δ aus den Coefficienten der quadratischen Gleichung

$$\tan\delta = 2\frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A + C}.\text{*)}$$

Insbesondere schneiden sich die beiden Geraden rechtwinklig oder bilden ein Rechtwinkelpaar, wenn $A + C = 0$ ist, also die Gleichung des Paares die Form hat

$$x^2 + 2bxy - y^2 = 0,$$

welches auch der Wert von b sei.

Obige Formel dient auch als Definition des Winkels zwischen conjugirt imaginären Geraden, und zwar zeigt sie denselben als rein imaginär auf (§ 42), da $(A + C)\tan\delta$ gleich der Quadratwurzel aus der negativen Discriminante ist. Insbesondere schliefst das Linienpaar $x^2 + y^2 = 0$ wegen $\tan\delta = \pm i$ einen ganz unbestimmten imaginären Winkel ein.

B. Die Winkel in den Linienpaaren
$x^2 + xy - 6y^2 = 0$ bez. $x^2 - 2xy\sec\vartheta + y^2 = 0$ sind $\frac{\pi}{4}$, bez. ϑ:

---

*) Für schiefe Axen ergibt sich in derselben Weise die Formel

$$\tan\delta = 2\frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A + C - 2B\cos\omega}\sin\omega.$$

56. **Das Paar der Winkelhalbirenden ist stets reell.** Bezeichnet man unter den Voraussetzungen des vorigen Paragraphen durch $y - \mu x = 0$ die Gleichung einer Halbirungslinie des Winkels δ, so bestimmt sich der Richtungscoefficient μ durch die Bemerkung, dafs er die Tangente eines Winkels ist, der gleich der halben Summe der zu m_1, m_2 gehörigen Neigungswinkel sein soll. Aus

$$\text{arc tan } 2\mu = \text{arc tan } m_1 + \text{arc tan } m_2$$

folgt $$\frac{2\mu}{1-\mu^2} = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}, \text{ somit } = \frac{-B}{C-A}$$

oder $$\mu^2 + 2\frac{A-C}{B}\mu - 1 = 0.$$

Die Wurzeln μ_1, μ_2 dieser quadratischen Gleichung sind die Richtungscoefficienten der inneren und der äufseren Halbirungslinie des Winkels δ (§ 39). Indem wir also in die Gleichung für μ seinen Wert $y : x$ substituiren, erhalten wir *die Gleichung des Paares der Winkelhalbirenden*

$$y^2 + 2\frac{A-C}{B}xy - x^2 = 0.$$

Man erhält dieselbe auch, wenn man zu $y - m_1 x = 0$, $y - m_2 x = 0$ nach § 39 die Gleichungen der beiden Winkelhalbirenden bildet und sie mit einander multiplicirt.

Es ist wertvoll zu bemerken, dafs die Discriminante $\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1$ dieser Gleichung stets positiv ist, dafs also auch *ein Paar von imaginären Geraden reelle Winkelhalbirende* besitzt (§ 43). Die Form obiger Gleichung zeigt (§ 55), dafs die beiden Halbirungslinien rechtwinklig zu einander sind. Für $B = 0$ reducirt sich die Gleichung

$$B(y^2 - x^2) + 2(A - C)xy = 0$$

auf $xy = 0$, d. h. alle Linienpaare $Ax^2 + Cy^2 = 0$ haben die Axen zu Winkelhalbirenden (§ 21). Ist jedoch aufserdem $A = C$, so wird μ völlig unbestimmt, d. h. *jedes Rechtwinkelpaar kann als ein Paar von Winkelhalbirenden des imaginären Linienpaares $x^2 + y^2 = 0$ angesehen werden.*

57. **Die Bedingung harmonischer Lage der Linienpaare**

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0, \quad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0$$

lautet $$AC' + A'C - 2BB' = 0.$$

Gehören zu den Geraden der beiden Paare die Richtungscoefficienten m_1, m_2; m_1', m_2', so müssen die Geraden $y - m_1'x = 0$, $y - m_2'x = 0$ sich in der Form darstellen lassen (§§ 39. 40)

$$y - m_1 x + k(y - m_2 x) = 0, \quad y - m_1 x - k(y - m_2 x) = 0,$$

wenn sie zu $y - m_1 x = 0$, $y - m_2 x = 0$ harmonisch sein sollen. Hieraus folgt

$$m_1' = \frac{m_1 + k m_2}{1 + k}, \quad m_2' = \frac{m_1 - k m_2}{1 - k}$$

und durch Elimination von k die Bedingung harmonischer Lage, ausgedrückt in den Richtungscoefficienten,

$$(m_1 - m_1')(m_2 - m_2') + (m_1 - m_2')(m_2 - m_1') = 0$$

oder $m_1 m_2 + m_1' m_2' - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(m_1' + m_2') = 0$;

dies ist aber mit der obigen Form identisch wegen

$$\frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{B}{C}, \; m_1 m_2 = \frac{A}{C}, \; \frac{m_1' + m_2'}{2} = -\frac{B'}{C'}, \; m_1' m_2' = \frac{A'}{C'}.$$

Verbinden wir damit die Bedingung $A' + C' = 0$, so folgt $B' : C' = A - C : 2B$, d. h. *zu einem gegebenen Linienpaar gibt es nur ein harmonisches Rechtwinkelpaar, das Paar seiner Winkelhalbirenden.*

Von grofser Wichtigkeit ist die Einsicht, dafs die Coefficientenbedingung der harmonischen Lage für Punktepaare (§ 15) und Linienpaare identisch ist.

Diese geht geradezu in jene über, wenn wir eine Coordinate constant setzen, z. B. drückt $AC' + A'C = 2BB'$ für $y = k$ zugleich die harmonische Lage der Punktepaare $Ax^2 + 2Bkx + Ck^2 = 0$, $A'x^2 + 2B'kx + C'k^2 = 0$ aus. Dies gibt aber, da jede beliebige Gerade in $y - k = 0$ transformirt werden kann, den *Fundamentalsatz: Jede Gerade schneidet zwei harmonische Linienpaare in harmonischen Punktepaaren;* und *umgekehrt bilden die Verbindungslinien der Punkte zweier harmonischen Paare mit einem Punkte zwei harmonische Strahlenpaare.*

* Diese Übereinstimmung begründet auch die Analogie in der Darstellung des Imaginären. Soll nämlich das erste Linienpaar zugleich zu einem dritten $A''x^2 + 2B''xy + C''y^2 = 0$

harmonisch, also auch $AC'' + A''C - 2BB'' = 0$ sein, so lassen die beiden Bedingungen nur eine gemeinsame Lösung zu $A:B:C = (A'B'' - A''B') : \frac{1}{2}(A'C'' - A''C') : (B'C'' - B''C')$, wie in § 15. Zu zwei gegebenen Linienpaaren mit demselben Doppelpunkt ist also unzweideutig ein gemeinsames harmonisches Paar bestimmt, also auch dann, wenn dasselbe imaginär ist (§ 43).

*58. **Absolute Richtungen.** Von ganz hervorragender Bedeutung sind die imaginären Linienpaare

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0.$$

Jeder Punkt $a|b$ ist der Doppelpunkt *eines* derselben und zwar wird dasselbe offenbar gebildet von den durch ihn gezogenen Parallelen zu den Geraden des Paares am Nullpunkt

$$x^2 + y^2 = 0 \text{ oder } x \pm iy = 0.$$

Es existiren also in der Ebene zwei ausgezeichnete imaginäre Richtungen (§ 26), welche den mit $x^2 + y^2 = 0$ gleichgerichteten Linienpaaren angehören und kurz *die imaginären absoluten (isotropen) Richtungen* heifsen sollen. In der Tat sind sie bei allen Coordinatentransformationen, also auch (§ 12) *bei allen Bewegungen der Ebene in sich unveränderlich oder absolut*, denn es ist

$$(x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2 + (x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)^2 = x^2 + y^2.$$

Dies ist nur möglich, wenn *der Winkel irgend einer Geraden der Ebene mit einer Geraden absoluter Richtung unbestimmt* ist, und in der Tat ergibt die Formel des § 31 stets $\tan \delta = \pm i$ (§ 42). Gleichwol müssen wir die Geraden von den Richtungscoefficienten $\pm i$ bestimmt denken, da sie durch bestimmte Gleichungen gegeben sind, nur lassen sie sich nicht durch gemessene Winkel angeben.

Ferner geht die Bedingung harmonischer Lage eines Linienpaares $Ax^2 + 2Bxy + C = 0$ mit $x^2 + y^2 = 0$ (§ 57) über in $A + C = 0$, d. h. die Orthogonalitätsbedingung (§ 55). Demnach *sind zwei Gerade, welche conjugirt harmonisch sind in Bezug auf die durch ihren Schnittpunkt gehenden Geraden der absoluten Richtungen, zu einander normal* (vgl. § 56 Schlufs). Und umgekehrt ist *ein Linien-*

paar der absoluten Richtungen definirbar als das gemeinsame harmonische zu irgend zwei Rechtwinkelpaaren, die denselben Doppelpunkt besitzen (vgl. § 43 Schlufs)*). Eine specielle Folgerung aus dem ersten Satz ist die, dafs *jede Gerade absoluter Richtung auf sich selbst normal* ist, wie auch die Orthogonalitätsbedingung des § 33 $m_2 = \frac{-1}{m_1}$ für $m_1 = m_2 = \pm i$ bestätigt.

Überhaupt ergibt die Anwendung unserer metrischen Formeln auf $x \pm iy = 0$ scheinbare Widersprüche. Jeder Punkt einer dieser Geraden hat stets den Vector $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = 0$. Somit haben überhaupt *alle in einer Geraden absoluter Richtung gemessenen Strecken die Länge Null;* infolge dessen führen sie auch bisweilen den Namen: *Gerade ohne Länge.*

Von einer Geraden absoluter Richtung hat jeder Punkt der Ebene, der nicht in ihr liegt, unendlich grofsen Abstand. Denn in der Abstandsformel des § 37 tritt im Nenner die Wurzel auf aus der Quadratsumme der Coefficienten von x und y in der Gleichung der Geraden, und diese ist unter unserer Annahme $1 + i^2 = 0$. In der Tat kann aber das Perpendikel, das von dem Punkte auf die Gerade absoluter Richtung gefällt wird, keine endliche Länge haben, denn die parallelen Geraden dieser Richtung sind auch zu einander normal. Ebenso erklärt sich das erste Paradoxon, da doch die Entfernung zweier Punkte einer solchen Geraden zugleich den senkrechten Abstand jeder der Punkte von der Geraden bedeutet und deswegen Null sein mufs (§ 37). Diese scheinbaren Widersprüche, welche der Anblick metrischer Formeln sofort dem Leser aufdrängt, sobald er die vorkommenden Gröfsen auch complexer Werte fähig denkt, erhalten so aus jener Definition der absoluten Richtungen durch Rechtwinkelpaare ihre Lösungen.

---

*) Man verificirt dies direct in der Endformel des vorigen Paragraphen, indem diese bei $A' + C' = 0$, $A'' + C'' = 0$ liefert $A : B : C = 1 : 0 : 1$.

59. **Bedingung, unter welcher die allgemeine Gleichung des zweiten Grades ein Linienpaar darstellt.** Die allgemeine Gleichung zweiten Grades schreiben wir

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Ordnen wir sie an in der Form

$$a_{11}x^2 + 2(a_{12}y + a_{13})\,x + (a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33}) = 0$$

und lösen sie für x auf, so finden wir die Wurzeln

$$a_{11}x = -(a_{12}y + a_{13}) \pm$$
$$\sqrt{\{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\,y^2 + 2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})\,y + (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})\}}.$$

Diese Werte von x können nur dann auf die Form $x = my + n$ reducirt werden, wenn die Gröfse unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat ist. Dies ist bekanntlich allein der Fall, wenn man hat

$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\,(a_{13}^2 - a_{11}a_{33}) - (a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})^2 = 0.$$

Die Ausführung der angedeuteten Operationen liefert nach einer Division durch a_{11}

$$a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 = 0$$

als die Bedingung, unter welcher die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwei Gerade darstellt.

Man nennt die Coefficientenfunction links die Discriminante **D** der Gleichung zweiten Grades. *Unter der Bedingung, dafs die Discriminante* **D** *verschwindet, stellt die Gleichung zweiten Grades eine singuläre Curve zweiter Ordnung dar, welche einen Doppelpunkt besitzt, d. h. ein Linienpaar.*

B. 1) Die Gleichung $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$ repräsentirt die Geraden

$$x - y - 1 = 0, \quad x - 4y + 2 = 0.$$

2) Repräsentirt die Gleichung

$$(\alpha x + \beta y - r^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)\,(x^2 + y^2 - r^2)$$

Gerade und welche?

3) Die Gleichung

$$x^2 - xy + y^2 - x - y + 1 = 0$$

stellt die imaginären Geraden dar

$$x + \theta y + \theta^2 = 0, \quad x + \theta^2 y + \theta = 0,$$

wenn θ eine der imaginären Cubikwurzeln der Einheit ist.

4) Man soll die Gröfse a_{12} so bestimmen, dafs die Gleichung $x^2 + 2a_{12}xy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ Gerade darstellt.

Indem man die Werte der Coefficienten in die allgemeine Bedingungsgleichung substituirt, erhält man für a_{12} die quadratische Gleichung $12a_{12}{}^2 - 35a_{12} + 25 = 0$, aus welcher für a_{12} die Werte $a_{12}' = \frac{5}{3}$, $a_{12}'' = \frac{5}{4}$ hervorgehen.

60. Die in dem vorigen Paragraphen angewendete Methode, obgleich die einfachste in dem Fall der Gleichung zweiten Grades, ist auf Gleichungen höherer Grade nicht anwendbar; wir geben daher in dem Folgenden noch eine andere Auflösung derselben Aufgabe.

Dieselbe verlangt zu erkennen, ob die gegebene Gleichung des zweiten Grades mit dem Product der Gleichungen zweier Geraden $(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha' x + \beta' y - 1) = 0$ identisch werden kann. Wir dividiren dazu die allgemeine Gleichung des zweiten Grades durch a_{33} und vergleichen die Coefficienten ihrer Glieder mit den entsprechenden Coefficienten in der Entwickelung jenes Products; dadurch erhalten wir fünf Bedingungsgleichungen, von denen vier die Bestimmung der vier unbestimmten Gröfsen α, β, α', β' liefern müssen. Durch die Substitution der erhaltenen Werte in die fünfte Bedingungsgleichung finden wir dann die verlangte Bedingung.

Jene fünf Gleichungen sind

$$\alpha\alpha' = \frac{a_{11}}{a_{33}}, \quad \alpha + \alpha' = -\frac{2a_{13}}{a_{33}},$$
$$\beta\beta' = \frac{a_{22}}{a_{33}}, \quad \beta + \beta' = -\frac{2a_{23}}{a_{33}}, \quad \alpha\beta' + \alpha'\beta = \frac{2a_{12}}{a_{33}}.$$

Die vier ersten liefern sofort zwei quadratische Gleichungen zur Bestimmung von α, α', β, β'. Wir können dieselben auch durch die Bemerkung erhalten, dafs diese vier Gröfsen die Reciproken der Axenabschnitte der Geraden sind, und dafs die durch die Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

dargestellte Curve in den Axen Punkte ausschneidet, deren Coordinaten sich ergeben aus

$$y = 0, \quad a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0;$$
$$x = 0, \quad a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Bezeichnen wir durch L, L', M, M' die vier so erhaltenen Axenschnittpunkte des bezeichneten Ortes, so müssen, wenn derselbe aus Geraden zusammengesetzt ist, diese entweder das Paar LM, $L'M'$ oder das Paar LM', $L'M$ sein; die Gleichungen dieser Paare sind

$$(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha' x + \beta' y - 1) = 0,$$
$$(\alpha x + \beta' y - 1)(\alpha' x + \beta y - 1) = 0.$$

Die gleichmäfsige Berechtigung derselben lehrt, dafs für $\frac{2a_{12}}{a_{33}}$ nicht allein der oben gegebene Wert $\alpha\beta' + \alpha'\beta$, sondern auch der andere $\alpha\beta + \alpha'\beta'$ gelten mufs. Die Summe beider ist $(\alpha + \alpha')(\beta + \beta') = \frac{4a_{23}a_{13}}{a_{33}^2}$ und ihr Product

$$\alpha\alpha'(\beta^2 + \beta'^2) + \beta\beta'(\alpha^2 + \alpha'^2)$$
$$= \frac{a_{11}}{a_{33}} \frac{(4a_{23}^2 - 2a_{22}a_{33})}{a_{33}^2} + \frac{a_{22}}{a_{33}} \frac{(4a_{13}^2 - 2a_{11}a_{33})}{a_{33}^2}.$$

Daher bestimmt sich $a_{12}:a_{33}$ aus der quadratischen Gleichung

$$\frac{a_{12}^2}{a_{33}^2} - 2\frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}^2} \cdot \frac{a_{12}}{a_{33}} + \frac{a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 - a_{11}a_{22}a_{33}}{a_{33}^2} = 0,$$

welche, von Brüchen befreit, die Bedingungsgleichung $\mathsf{D} = 0$ des vorigen Paragraphen wiedergibt.

B. (Vgl. § 59. 4).) Man bestimme a_{12} so, dafs

$$x^2 + 2a_{12}xy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$$

Gerade darstellt.

Die Abschnitte in den Axen sind durch die Gleichungen

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \quad y^2 - 7y + 6 = 0$$

gegeben, deren Wurzeln $x' = 2$, $x'' = 3$; $y' = 1$, $y'' = 6$ sind. Indem wir die Gleichungen der Verbindungsgeraden der so gefundenen Punkte bilden, sehen wir, dafs die Gleichung, wenn sie Gerade darstellt, entweder von der Form

$$(x + 2y - 2)(2x + y - 6) = 0,$$

oder von der Form $(x + 3y - 3)(3x + y - 6) = 0$ sein mufs. Daraus ergeben sich durch Ausführung der angedeuteten Multiplicationen die Werte von a_{12}.

Viertes Kapitel.

Symbolische Gleichungen und duale homogene Coordinaten.

---

61. **Gleichungs-Symbolik.** Es ist für viele Untersuchungen zweckmäſsig, zur Bezeichnung der ganzen Functionen von $x \mid y$, welche mit Null verglichen die vorgelegten Gleichungen liefern, Abkürzungen anzuwenden, wie dies *Plücker* zuerst gezeigt hat.[4]) Bedeutet also S eine ganze Function n^{ten} Grades, so definirt $S = 0$ eine Curve n^{ter} Ordnung, die wir kurz die Curve S nennen. Alsdann können wir das dem Satze des § 40 zu Grunde liegende wichtige Princip einfach so formuliren: *Sind* $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ *die Gleichungen irgend zweier Curven, so enthält die durch die Gleichung* $S_1 - kS_2 = 0$ *dargestellte Curve alle Schnittpunkte der beiden gegebenen, welches auch der Wert der Constanten* k *sei.* Denn natürlich machen Coordinatenpaare, welche die Gleichungen $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ befriedigen, auch das lineare Aggregat $S_1 - kS_2$ zu Null. Eine Constante k, deren Wert unbestimmt bleibt, nennt man im Unterschied von den festen Constanten *Parameter* der Gleichung.

Im folgenden sollen die Symbole immer lineare Functionen bedeuten,

$$S = a_1 x + a_2 y + a_3, \quad S' = a_1' x + a_2' y + a_3',$$

so daſs $S = 0$, $S' = 0$ die Gleichungen von Geraden in allgemeiner Form sind. Es ist wünschenswert, die Normalform einer solchen Gleichung besonders zu charakterisiren und wir wollen zu diesem Zwecke die kleinen Buchstaben s verwenden; und zwar bedeute stets

$-s_1 = x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1, \quad -s_2 = x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2.$
Abkürzend sprechen wir von der Geraden S oder s und vom Punkte $s_1 | s_2$, d. h. dem Schnittpunkte von $s_1 = 0$, $s_2 = 0$.

Zugleich gibt bei obiger Vorzeichenwahl der Wert von s, nach Einsetzung beliebiger Coordinatenwerte $x | y$, den senkrechten Abstand des Punktes $x | y$ von der Geraden $s = 0$ an (§ 37), während das Symbol S nur eine zu demselben proportionale Gröfse darstellt, da (§ 30) $s = S : \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

62. **Die einen Parameter enthaltende Gleichung $s_1 - ks_2 = 0$ stellt das Strahlbüschel vom Scheitel $s_1 | s_2$ dar.** In der Tat stellt sie nach dem vorigen Princip für jeden Wert von k eine Gerade durch den Schnittpunkt der Geraden s_1, s_2 dar, und umgekehrt kann über k so verfügt werden, dafs die definirte Gerade noch einen beliebigen Punkt enthält (§ 40). Unter den unendlich vielen Strahlen (§ 25) des Bündels $s_1 | s_2$ ist jeder einzelne durch seinen Parameter bestimmt.

Die geometrische Bedeutung des Parameters ergibt sich aus $k = s_1 : s_2$ als das constante Verhältnis der senkrechten Abstände eines Punktes der Geraden $t = s_1 - ks_2 = 0$ von $s_1 = 0$ und $s_2 = 0$, demnach (§ 39) als *das Sinusteilverhältnis des Teilstrahles t im Winkel* $(s_1 s_2)$

$$k = \sin(s_1 t) : \sin(t s_2) \qquad (\text{§ } 25).$$

So ist der Richtungscoefficient m der Parameter eines Vectors als sein Sinusteilverhältnis mit den Axen (§ 25). Einem positiven Parameterwert entspricht ein innerer Teilstrahl desjenigen Winkels $(s_1 s_2)$, der den Nullpunkt enthält, einem negativen ein äufserer Teilstrahl desselben.

Innere und äufsere Teilstrahlen von entgegengesetzt gleichen Parametern sind bezüglich s_1, s_2 harmonisch conjugirt (§ 25). Die Halbirungslinien sind insbesondere $s_1 - s_2 = 0$, $s_1 + s_2 = 0$. Dieselben Winkelhalbirenden wie $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ besitzen also alle Paare $s_1 - ks_2 = 0$, $ks_1 - s_2 = 0$, deren Parameter reciproke Werte haben. Auch folgt dies daraus, dafs die eine der Geraden offenbar mit $s_1 = 0$ denselben Winkel bildet, wie die andere mit $s_2 = 0$.

Haben die beiden gegebenen Geraden allgemeiner die Gleichungen $S' = 0$, $S'' = 0$, so ist die Parametergleichung ihres Büschels ebensowol zu schreiben $S' - k'S'' = 0$. Jedoch ist dann der Parameter k' nur proportional zu dem Sinusteilverhältnis, nämlich

$$k' = \frac{s'}{s''} \sqrt{\frac{a_1'^2 + a_2'^2}{a_1''^2 + a_2''^2}}.$$

Der Teilstrahl beschreibt das ganze Büschel, wenn k' wiederum alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

Die Beispiele zeigen, wie die Rechnung mit diesen Symbolen die explicite Durchführung ersetzt.

B. 1) Die drei Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (vgl. § 41. 4)).

Die Gleichungen der Halbirungslinien sind

$$s_1 - s_2 = 0, \quad s_2 - s_3 = 0, \quad s_3 - s_1 = 0,$$

wenn die Gleichungen der Seiten durch $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ ausgedrückt sind und der Nullpunkt im Innern des Dreiecks liegt. Da die drei Gleichungen die Identität $0 = 0$ zur Summe geben, so haben die Halbirungslinien selbst einen gemeinsamen Schnittpunkt.

2) Die Halbirungslinien von zwei äufseren Winkeln eines Dreiecks schneiden sich auf der Halbirungslinie des dritten innern Winkels.

Indem man sich der Übereinkunft hinsichtlich der Zeichen erinnert, erkennt man leicht, dafs die Gleichungen der beiden ersten Halbirungslinien durch $s_1 + s_2 = 0$, $s_1 + s_3 = 0$ gegeben sind; ihre Subtraction liefert $s_2 - s_3 = 0$, die Gleichung der inneren Halbirungslinie des dritten Winkels.

3) Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (§ 36. 5) 41. 3)).

Wenn man die den Seiten $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ bez. gegenüberliegenden Winkel durch A_1, A_2, A_3 bezeichnet, so ergeben sich *die Gleichungen der Höhen* als

$$s_1 \cos A_1 - s_2 \cos A_2 = 0, \quad s_2 \cos A_2 - s_3 \cos A_3 = 0,$$
$$s_3 \cos A_3 - s_1 \cos A_1 = 0,$$

weil jede derselben den Winkel, von dessen Scheitel sie ausgeht, in Teilwinkel zerlegt, die die Complemente der benachbarten Winkel sind; die Summe dieser Gleichungen ist identisch Null.

4) Die Mittellinien des Dreiecks gehen durch einen Punkt (§ 41. 1)).



Die Perpendikel, welche man von dem Mittelpunkte der Seite $s_3 = 0$ auf die Nachbarseiten fällen kann, stehen im Verhältnis $\sin A_1 : \sin A_2$; somit sind *die Gleichungen der Mittellinien*

$$s_1 \sin A_1 - s_2 \sin A_2 = 0, \quad s_2 \sin A_2 - s_3 \sin A_3 = 0,$$
$$s_3 \sin A_3 - s_1 \sin A_1 = 0.$$

5) Die Längen der Seiten eines Vierecks sind l_1, l_2, l_3, l_4; die Gleichung der Geraden, welche die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet, ist $l_1 s_1 - l_2 s_2 + l_3 s_3 - l_4 s_4 = 0$.

Denn die durch sie dargestellte Gerade geht durch den Schnittpunkt der Linien $l_1 s_1 - l_2 s_2 = 0$, $l_3 s_3 - l_4 s_4 = 0$, welche nach 4) in zwei Dreiecken, die eine Diagonale als gemeinschaftliche Basis haben, den Mittelpunkt derselben mit der bez. Gegenecke verbinden. Ebenso schneiden sich die Geraden $l_1 s_1 - l_4 s_4 = 0$ und $l_2 s_2 - l_3 s_3 = 0$ im Mittelpunkt der andern Diagonale.

6) Die Gleichung der auf der Basis eines Dreiecks in ihrem Endpunkte errichteten Normale ist $s_1 + s_3 \cos A_2 = 0$.

7) Wenn zwei Dreiecke so gelegen sind, dafs die Normalen von den Ecken des ersten auf die Seiten des zweiten sich in einem Punkte schneiden, so gehen auch die Normalen von den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersten durch einen Punkt.

Man bezeichne durch $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$; $s_1' = 0$, $s_2' = 0$, $s_3' = 0$ die Seiten der beiden Dreiecke, so ergibt sich die Gleichung der von der Ecke $s_1 | s_2$ auf die Seite $s_3' = 0$ gefällten Normale in der Form $s_1 \cos(s_2 s_3') - s_2 \cos(s_1 s_3') = 0$; und die der beiden Normalen von $s_2 | s_3$ auf $s_1' = 0$ und von $s_3 | s_1$ auf $s_2' = 0$ in den Formen

$$s_2 \cos(s_3 s_1') - s_3 \cos(s_2 s_1') = 0, \quad s_3 \cos(s_1 s_2') - s_1 \cos(s_3 s_2') = 0.$$

Indem man zwischen den beiden ersten Gleichungen s_2 eliminirt und die erhaltene Gleichung mit der dritten verbindet, erhält man die Bedingung, dafs diese drei Geraden durch einen Punkt gehen, in der Form

$$\cos(s_1 s_2') \cos(s_2 s_3') \cos(s_3 s_1') = \cos(s_1' s_2) \cos(s_2' s_3) \cos(s_3' s_1).$$

Die vollständige Symmetrie dieser Gleichung zeigt, dafs sie ebensowol die Bedingung ausdrückt, unter welcher die von den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersten gefällten Normalen durch einen Punkt gehen.

8) Wenn von den Ecken eines Dreiecks drei Gerade durch denselben Punkt gezogen werden, so schneiden sich auch die

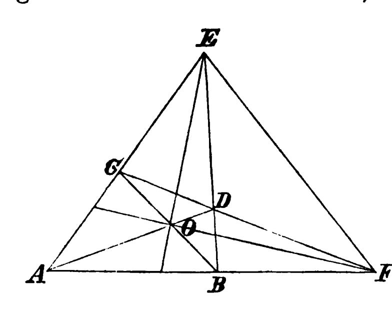
drei Geraden in einem Punkte, welche von denselben Ecken aus unter derselben Neigung gegen die bez. Winkelhalbirenden gezogen werden, wie die vorigen.

Sind $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ die Seiten des Dreiecks und $n_1 s_1 - n_2 s_2 = 0$, $n_2 s_2 - n_3 s_3 = 0$, $n_3 s_3 - n_1 s_1 = 0$ die drei von den Ecken ausgehenden Geraden (die sich offenbar in einem Punkte schneiden), so sind die Gleichungen der drei Geraden, die mit jenen unter gleichen Winkeln gegen die betreffende Winkelhalbirende des Dreiecks von denselben Ecken aus gezogen sind,

$$n_2 s_1 - n_1 s_2 = 0, \quad n_3 s_2 - n_2 s_3 = 0, \quad n_1 s_3 - n_3 s_1 = 0;$$

und diese Linien schneiden sich auch in einem Punkte.

63. Von besonderer Wichtigkeit in der Theorie der harmonischen Gruppen erweist sich *das vollständige Viereck*, gebildet von *vier* Punkten A, B, C, D als Ecken und ihren *sechs* Verbindungslinien als Seiten. Zwei Seiten, die keine Ecke gemeinsam haben, heifsen *Gegenseiten*, z. B. AD, BC, und ihr Schnittpunkt ein *Diagonalpunkt* des Vierecks, z. B. O. Nennen wir das Dreieck OEF der Diagonalpunkte das *Diagonaldreieck*, so besteht der fundamentale Satz: *An jedem Diagonalpunkt eines vollständigen Vierecks bilden die Gegenseiten des Vierecks und die beiden Seiten des Diagonaldreiecks harmonische Strahlenpaare.*



Bezeichnen wir die Gleichungen der Seiten OE, OF, EF des Diagonaldreiecks mit $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ bez., so können wir die Seiten AB und AC durch $a_2 s_2 - a_3 s_3 = 0$ und $a_3 s_3 - a_1 s_1 = 0$ darstellen und erhalten für AD die Gleichung $a_1 s_1 - a_2 s_2 = 0$, da die drei Seiten den Punkt A gemein haben (§ 62). Nehmen wir nun noch an, die Gleichung von BC laute $a_1' s_1 - a_2' s_2 = 0$, so mufs die Gleichung von CD sein $a_3 a_1' s_3 - a_1 a_2' s_2 = 0$; denn, da hiemit identisch ist $a_1'(a_3 s_3 - a_1 s_1) + a_1(a_1' s_1 - a_2' s_2) = 0$, so geht CD sowol durch den Schnittpunkt $a_3 s_3 - a_1 s_1 = 0$, $a_1' s_1 - a_2' s_2 = 0$ als den Punkt $s_2 = 0$, $s_3 = 0$; und ebenso mufs die Gleichung

von DB sein $a_2 s_1' s_1 - a_3 a_2' s_3 = 0$, als identisch mit $a_2' (a_2 s_2 - a_3 s_3) + a_2 (a_1' s_1 - a_2' s_2) = 0$. Endlich soll aber der Schnittpunkt von CD und DB auf AD liegen, d. h. ein Parameter $k = \mu : \nu$ mufs so bestimmt werden können, dafs $a_1 s_1 - a_2 s_2 = 0$ identisch ist mit $\mu (a_3 a_1' s_3 - a_1 a_2' s_2) + \nu (a_2 a_1' s_1 - a_3 a_2' s_3) = 0$. Aus den Bedingungen $a_1 = \nu a_2 a_1'$, $a_2 = \mu a_1 a_2'$, $\mu a_1' = \nu a_2'$ folgt aber $a_1'^2 : a_2'^2 = a_1^2 : a_2^2$ oder $a_1' : a_2' = a_1 : - a_2$, da doch AD von BC verschieden ist.

Also ist nach Annahme des Diagonaldreiecks und zweier Nachbarseiten das ganze Viereck völlig bestimmt und zwar drücken sich die Gleichungen der Seitenpaare mittelst dreier Constanten a_1, a_2, a_3 aus als

AD	$a_1 s_1 - a_2 s_2 = 0$	BC	$a_1 s_1 + a_2 s_2 = 0$
AB	$a_2 s_2 - a_3 s_3 = 0$	CD	$a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$
AC	$a_3 s_3 - a_1 s_1 = 0$	DB	$a_3 s_3 + a_1 s_1 = 0$,

deren Gleichungen die obigen harmonischen Eigenschaften beweisen. Man kann sie zufolge § 57 auch so aussprechen: *In jeder Seite des Vierecks sind der Diagonalpunkt und der Schnittpunkt mit der Verbindungslinie der beiden andern Diagonalpunkte harmonisch conjugirt in Bezug auf das Eckenpaar.*

Hierauf gründet sich die Linealconstruction des vierten harmonischen zu drei gegebenen Punkten einer Reihe, z. B. zu A, B, F mittelst OE, oder die Construction des vierten harmonischen zu drei Strahlen eines Büschels.

64. **Wenn drei Gerade $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ gegeben sind, welche ein Dreieck bilden, so kann die Gleichung jeder beliebigen Geraden in die Form gesetzt werden**

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0.$$

Denn wenn man die Werte von s_1, s_2, s_3 in voller Länge einführt, so wird $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$ zu

$$(a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3) x + (a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3) y - (a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3) = 0,$$

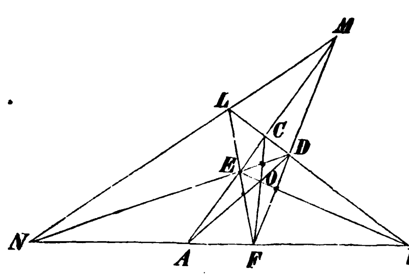
und dies wird mit der Gleichung einer beliebigen Geraden $c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$ identisch gemacht, wenn gleichzeitig

$$a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3 = c_1, \; a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3 = c_2,$$
$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = -c_3 \qquad \text{ist.}$$

Die Gröfsen a_1, a_2, a_3 können aber stets so bestimmt werden, dafs sie diesen Gleichungen genügen; vorausgesetzt nur, dafs die drei gegebenen Geraden nicht durch einen Punkt gehen, da dann die Gerade $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$ notwendig auch durch diesen Punkt gehen müfste und mit einer ihn nicht enthaltenden Geraden nicht identificirt werden könnte. Dieselben gehören in die Gruppe der *geometrischen Netze*,[5]) wie man Aggregate gerader Linien von folgender Anordnung bezeichnet. Man nehme vier Punkte A, B, C, O an und ziehe ihre Verbindungslinien (vollständiges Viereck); alle neuen Schnittpunkte derselben verbinde man unter sich und mit den alten durch neue Gerade und verfahre mit den Schnittpunkten in dieser neuen Figur wiederum so. Nehmen wir drei der ursprünglichen Verbindungslinien als $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ an, so lassen sich die Gleichungen aller Geraden des Netzes nach § 63 mittelst nur dreier Constanten a_1, a_2, a_3 als lineare Aggregate von jenen ausdrücken.

B. 1) Man untersuche die Anordnung der Schnittpunkte der Seiten des vollständigen Vierecks $ABCO$ mit den Seiten seines Diagonaldreiecks DEF.

Nehmen wir die Gleichungen der drei Seiten BC, CA, AB an als bez. $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, so sind die andern Seiten die durch O gehenden Ecktransversalen, als deren Gleichungen wir wählen können (§ 63)



$OA \qquad a_2 s_2 - a_3 s_3 = 0$

$OB \qquad a_3 s_3 - a_1 s_1 = 0$

$OC \qquad a_1 s_1 - a_2 s_2 = 0.$

Dadurch sind aber die Gleichungen aller andern Geraden der Figur bestimmt. Da z. B. EF geht durch den Schnittpunkt von $s_3 = 0$, $a_1 s_1 - a_2 s_2 = 0$ und den von $s_2 = 0$, $a_3 s_3 - a_1 s_1 = 0$, so ist die Gleichung von

$EF \qquad -a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$

ebenso die von $FD \qquad a_1 s_1 - a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$

und die von $DE \qquad a_1 s_1 + a_2 s_2 - a_3 s_3 = 0.$

Darnach ergibt sich leicht, dafs die Punkte L, M, N, d. h. die Schnittpunkte von $s_1 = 0$, $\quad -a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$,
von $s_2 = 0$, $\quad a_1 s_1 - a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$
und von $s_3 = 0$, $\quad a_1 s_1 + a_2 s_2 - a_3 s_3 = 0$
in einer Geraden liegen, deren Gleichung ist

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0.$$

Wir nennen *die Gerade LMN die Harmonikale des Punktes O in Bezug auf das Dreieck ABC*, wegen folgender Eigenschaft. Die Gleichung von CN ist $a_1 s_1 + a_2 s_2 = 0$, denn dies ist eine durch $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ und $s_3 = 0$, $a_1 s_1 + a_2 s_2 - a_3 s_3 = 0$ gehende Gerade. Daher ist AB in F, N harmonisch geteilt, denn die Geraden CA, CB; CF, CN haben die Gleichungen

$$s_2 = 0, \quad s_1 = 0; \quad a_1 s_1 - a_2 s_2 = 0, \quad a_1 s_1 + a_2 s_2 = 0.$$

In derselben Weise folgen auch die Punktepaare B, C; D, L und C, A; E, M als harmonisch. Somit sind *die Schnittpunkte der Harmonikale von O mit den Seiten des Dreiecks ABC durch die Ecken harmonisch getrennt von den Seitenschnittpunkten der durch O gezogenen Ecktransversalen.* Übrigens bestimmen die nicht bezeichneten Schnittpunkte der Figur Gerade, welche durch bez. L, M, N gehen und ebenso die Harmonikalen sind von A in OBC, von B in OCA und von C in OAB*).

2) *Die Harmonikalen des Höhenschnittpunktes und des Schwerpunktes in einem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ sind bez.*

$$s_1 \cos A_1 + s_2 \cos A_2 + s_3 \cos A_3 = 0, \quad s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 + s_3 \sin A_3 = 0.$$

Denn nach § 62. 3) ist die Gleichung der Geraden, welche die Fufspunkte der Höhen in den Seiten $A_1 A_3$, $A_2 A_3$ verbindet, $s_1 \cos A_1 + s_2 \cos A_2 - s_3 \cos A_3 = 0$ und durch deren Schnittpunkt mit der dritten Seite $A_1 A_2$ geht auch die obige Harmonikale; etc. Ganz ebenso repräsentirt $s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 - s_3 \sin A_3 = 0$ die Verbindungslinie zweier Seitenmitten (vgl. § 68.), etc.

3) *Harmonische Eigenschaften des vollständigen Vierseits* (vgl. § 63). Vier Gerade und ihre sechs Schnittpunkte bilden die *Seiten* und *Ecken* eines sog. vollständigen Vierseits; die drei Verbindungslinien der nicht auf einer Seite liegenden Gegeneckenpaare heifsen die *Diagonalen* und bilden das *Diagonaldreiseit.* In der obigen Figur bildet die Gerade LMN mit EF, FD, DE ein solches vollständiges Vierseit von den Diagonalen BC, CA, AB. Daher geben die dreigliedrigen Gleichungen von 1) die Seiten des Vierseits, ausgedrückt durch die Gleichungen seiner Diago-

---

*) Wir können die Construction des Netzes beliebig fortsetzen. Nennen wir z. B. L_1, M_1, N_1 die Schnittpunkte von LMN mit AD, BE, CF, so schneiden sich FM_1, EN_1 auf AD u. s. w.

nalen. Aus der Definition der Harmonikalen folgt: *In jeder Diagonale eines vollständigen Vierseits bilden die beiden Gegenecken derselben und die Ecken des Diagonaldreiseits harmonische Punktepaare* oder: *An jeder Ecke des Vierseits sind die Diagonale und die Verbindungsgerade mit dem Schnittpunkt der beiden anderen harmonisch getrennt durch das Seitenpaar.* Hier tritt besonders die vollkommene Analogie zu den Eigenschaften des vollständigen Vierecks in § 63 hervor.

Übrigens enthält 1) auch den Satz: Sucht man in einem vollständigen Viereck die Harmonikalen der Ecken in Bezug auf je die drei andern, so bilden dieselben ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonaldreiseit mit dem Diagonaldreieck (DEF) des ersteren sich deckt.

4) *Wenn zwei Dreiecke ABC und DEF so gelegen sind, dafs die Schnittpunkte L, M, N der Seiten BC, CA, AB des einen und der entsprechenden Seiten EF, FD, DE des andern in einer Geraden liegen, so gehen die Geraden AD, BE, CF, welche die entsprechenden Ecken beider Dreiecke verbinden, durch denselben Punkt O.*[6])

Wenn die Seiten des ersten Dreiecks durch $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ repräsentirt werden und $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$ die Gleichung der Geraden ist, in welcher sie den entsprechenden Seiten des zweiten Dreiecks begegnen, so müssen diese letzteren bez. dargestellt werden durch Gleichungen von der Form

$$a_1' s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0, \quad a_1 s_1 + a_2' s_2 + a_3 s_3 = 0,$$
$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3' s_3 = 0;$$

und man erhält als Differenzen je zweier dieser drei Gleichungen die folgenden

$$(a_1 - a_1') s_1 = (a_2 - a_2') s_2, \quad (a_2 - a_2') s_2 = (a_3 - a_3') s_3,$$
$$(a_3 - a_3') s_3 = (a_1 - a_1') s_1,$$

welche nach dieser ihrer Ableitung Gerade durch die Ecken des zweiten Dreiecks und nach ihrer Form Gerade durch die entsprechenden Ecken des ersten darstellen, zugleich aber augenscheinlich solche, die durch *einen* Punkt gehen.

***65. Bedingungen der Orthogonalität und des Parallelismus der Geraden**

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0, \quad a_1' s_1 + a_2' s_2 + a_3' s_3 = 0.$$

Wenn man wie in § 64 diese Gleichungen in entwickelter Form schreibt, so kann man die Kriterien des § 31 anwenden. Danach besteht Orthogonalität, wenn das Product der

Coefficienten von x mit dem der Coefficienten von y die Summe Null hat. Man findet dann dafür die Bedingung

$$a_1 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3' + (a_2 a_3' + a_3 a_2') \cos(\alpha_2 - \alpha_3)$$
$$+ (a_3 a_1' + a_1 a_3') \cos(\alpha_3 - \alpha_1) + (a_1 a_2' + a_2 a_1') \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

Da aber α_2 und α_3 die Winkel sind, welche die Normalen auf die Geraden s_2, s_3 mit der x-Axe bilden, so ist $(\alpha_2 - \alpha_3)$ der Winkel dieser Normalen, welcher gleich oder supplementär dem Winkel der Geraden selbst ist. Denken wir den Anfangspunkt der Coordinaten innerhalb des Dreiecks, und bezeichnen wir durch A_1, A_2, A_3 seine Winkel, so ist $(\alpha_2 - \alpha_3)$ das Supplement von A_1. *Die Bedingung der Orthogonalität beider Geraden ist also*

$$a_1 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3' - (a_2 a_3' + a_3 a_2') \cos A_1 - (a_3 a_1' + a_1 a_3') \cos A_2$$
$$- (a_1 a_2' + a_2 a_1') \cos A_3 = 0.$$

Als ein specieller Fall des vorigen ergibt sich die Bedingung, unter welcher die Gerade $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$ zur Seite $s_3 = 0$ normal ist als $a_3 = a_2 \cos A_1 + a_1 \cos A_2$.

Auf demselben Wege finden wir, indem wir Proportionalität der Coefficienten von x und y in beiden Gleichungen verlangen, als *das Kriterium des Parallelismus der Geraden*

$$(a_2 a_3' - a_3 a_2') \sin A_1 + (a_3 a_1' - a_1 a_3') \sin A_2$$
$$+ (a_1 a_2' - a_2 a_1') \sin A_3 = 0$$

oder, wenn wir l_1, l_2, l_3 als die Längen der den Winkeln A_1, A_2, A_3 bez. gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks s_1, s_2, s_3 einführen, in der Form

$$(a_2 a_3' - a_3 a_2') l_1 + (a_3 a_1' - a_1 a_3') l_2 + (a_1 a_2' - a_2 a_1') l_3 = 0$$

(vgl. § 32).

Die beiden Functionen, deren Verschwinden Parallelismus, bez. Orthogonalität nach sich zieht, treten daher als Zähler, bez. Nenner auf in dem Ausdruck der *Tangente des von den beiden Geraden gebildeten Winkels* (§ 31), $\tan \delta =$

$$\frac{(a_2 a_3' - a_3 a_2') \sin A_1 + (a_3 a_1' - a_1 a_3') \sin A_2 + (a_1 a_2' - a_2 a_1') \sin A_3}{a_1 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3' - (a_2 a_3' - a_3 a_2') \cos A_1 - (a_3 a_1' - a_1 a_3') \cos A_2 - (a_1 a_2' - a_2 a_1') \cos A_3}.$$

Endlich liefert die Anwendung der Formel des § 37 auf die explicite Form der Gleichung $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$

die Länge der Normale von dem Punkte $x' \mid y'$ auf die Gerade. Falls wir das Resultat der Substitution von $x' \mid y'$ in eine Function s abkürzend mit $-(x' \cos\alpha + y' \sin\alpha - p) = s'$ bezeichnen, wird die Formel für den Abstand

$$\frac{a_1 s_1' + a_2 s_2' + a_3 s_3'}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 a_3 \cos A_1 - 2a_3 a_1 \cos A_2 - 2a_1 a_2 \cos A_3)}}.$$

Wenn der Zähler dieses Ausdrucks verschwindet, so liegt der Punkt $x' \mid y'$ in der Geraden selbst (§ 37). Das Verschwinden des Nenners erscheint als die Form der Bedingung der Orthogonalität für zwei Gerade, die sich decken, oder für eine Gerade mit sich selbst. Diese Eigenschaft charakterisirt, wie wir in § 58 gefunden haben, die imaginären Geraden absoluter Richtung; von diesen haben in der Tat auch die im Endlichen gelegenen Punkte unendlich grofsen Abstand.

B. 1) Die Gleichung einer Normalen zu $s_3 = 0$ im Endpunkte A_2 ist $s_1 + s_3 \cos A_2 = 0$ (vgl. § 62. 6)).

Denn sie ist notwendig von der Form $a_1 s_1 + a_3 s_3 = 0$, und die Bedingung dieses § gibt $a_3 = a_1 \cos A_2$.

2) Die Gleichungen der Normalen der Dreiecksseiten in ihren Halbirungspunkten.

Da der Halbirungspunkt von $A_1 A_2$ der Schnittpunkt von $s_3 = 0$ mit $s_1 \sin A_1 - s_2 \sin A_2 = 0$ ist, so hat eine durch ihn gehende Gerade die Gleichung $s_1 \sin A_1 - s_2 \sin A_2 + a_3 s_3 = 0$, und die Bedingung des § gibt $a_3 = \sin(A_1 - A_2)$. Also sind die Gleichungen der Mittelnormalen

$$s_1 \sin A_1 - s_2 \sin A_2 + s_3 \sin(A_1 - A_2) = 0$$
$$s_2 \sin A_2 - s_3 \sin A_3 + s_1 \sin(A_2 - A_3) = 0$$
$$s_3 \sin A_3 - s_1 \sin A_1 + s_2 \sin(A_3 - A_1) = 0.$$

3) Die Mittelnormalen der Dreiecksseiten schneiden sich in einem Punkte.

Indem man nach einander zwischen den beiden ersten Gleichungen von 2) je eine der Gröfsen s_1, s_2, s_3 eliminirt, d. h. die Verbindungslinie des Schnittpunktes zweier Mittelnormalen mit den Ecken des Dreiecks bestimmt, so kann man die Gleichungen dieser drei Geraden zusammenziehen in

$$\frac{s_1}{\cos A_1} = \frac{s_2}{\cos A_2} = \frac{s_3}{\cos A_3};$$

die vollkommene Symmetrie dieser drei Gleichungen in Bezug auf s_1, s_2, s_3, etc. zeigt, dafs auch das dritte Perpendikel durch denselben Punkt geht. In der Tat ist die Summe der Producte

der drei Gleichungen der Perpendikel mit bez. $\sin^2 A_3$, $\sin^2 A_1$, $\sin^2 A_2$ identisch gleich Null.

4) Man beweise die Rechtwinkligkeit der Geraden
$$s_1 \cos A_1 + s_2 \cos A_2 + s_3 \cos A_3 = 0 \text{ und } s_1 \sin 2A_1 \sin(A_2 - A_3) + s_2 \sin 2A_2 \sin(A_3 - A_1) + s_3 \sin 2A_3 \sin(A_1 - A_2) = 0.$$

5) Die Gleichung der Normalen durch den Punkt s_1', s_2', s_3' zur Geraden $s_3 = 0$ ist
$$s_1(s_2' + s_3' \cos A_1) - s_2(s_1' + s_3' \cos A_2) + s_3(s_2' \cos A_2 - s_1' \cos A_1) = 0.$$

*66. **Homogene Dreilinien-Coordinaten des Punktes.** Wir haben gesehen, dafs in Beziehung auf drei beliebige feste Gerade $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ die Gleichung jeder vierten Geraden in der Form $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$ ausgedrückt werden kann, und dafs es möglich ist, Aufgaben zu lösen durch eine Reihe von Gleichungen, welche ohne directe Beziehung auf x, y nur Glieder mit s_1, s_2, s_3 enthalten. Daraus entspringt für das im vorigen ausführlich erläuterte Princip ein neuer Gesichtspunkt. Anstatt $-s_i$ nur als ein Symbol für die Gröfse $x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i$ anzusehen, nehmen wir an (§ 61), dafs s_i den senkrechten Abstand eines Punktes von der Gerade $s_i = 0$ bezeichne. Wir können die Lage eines Punktes durch seine Entfernungen von drei festen Geraden bestimmen und diese daher auch als Coordinaten desselben bezeichnen. *Wir nennen die Abstände s_1, s_2, s_3 eines Punktes von drei festen Fundamentallinien $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ die Dreilinien-Coordinaten (trilinearen Coordinaten) desselben in dem gegebenen Fundamentaldreieck. Im System der Dreilinien-Coordinaten wird eine Gerade durch eine homogene Gleichung ersten Grades dargestellt:*
$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0.$$

In dieser Homogeneität liegt, wie die weitergehenden Untersuchungen lehren werden, der hauptsächlichste Vorzug des neuen Coordinatensystems. An dieser Stelle erkennt man nach dem vorhergehenden einen Vorzug desselben vor dem System der Cartesischen Coordinaten darin, dafs in diesem die höchstmögliche Vereinfachung der Gleichungen eines Problems durch die Wahl *zweier* der merkwürdigsten Geraden der Figur zu Coordinatenaxen erlangt wird, während

bei der Anwendung von Dreilinien-Coordinaten zu Gunsten der Einfachheit über *drei* Fundamentallinien verfügt werden kann. Daraus vornehmlich entspringt die gröfsere Kürze der in § 62 f. erhaltenen Ausdrücke im Vergleich zu den entsprechenden des zweiten Kapitels.

Die drei Fundamentallinien zerlegen die Ebene in sieben Felder, welche wiederum durch die Vorzeichen der Coordinaten unterschieden sein müssen, da sie durch die Orte der Nullwerte je einer Coordinate getrennt werden. Wir wollen stets die Dreilinien-Coordinaten eines Punktes O im Innern des Fundamentaldreiecks positiv annehmen, d. h. zur Einführung der in $x \mid y$ expliciten Werte von s_i jeweilen den Nullpunkt innerhalb voraussetzen. Dann sind in den Scheitelwinkeln des Dreiecks zwei, in den übrigen äufseren Feldern ist eine der Coordinaten negativ.

*67. **Identische Fundamentalrelation.** Die Mafszahlen der Abstände eines Punktes von den drei Fundamentallinien können wir nicht ganz willkürlich wählen, denn schon zwei reichen zur Bestimmung aus. Es mufs also eine Relation zwischen ihnen bestehen.

Wenn l_1, l_2, l_3 die Längen der Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ bezeichnen, so drücken $l_1 s_1$, $l_2 s_2$, $l_3 s_3$ bez. die doppelten Inhalte der Dreiecke $O A_2 A_3$, $O A_3 A_1$, $O A_1 A_2$ aus, welche von einem willkürlich gewählten Punkte O der Ebene mit zwei der Fundamentalpunkte gebildet werden. Für jeden im Innern des Dreiecks gewählten Punkt O sind die Abstände positiv und die Teildreiecke gleichstimmig, können also auch positiv genommen werden. Für einen aufserhalb gewählten Punkt wechselt nicht nur ein Abstand das Vorzeichen, sondern auch der Sinn des zugehörigen Dreiecks. Daher ist (§ 38) für jedes O

$$l_1 s_1 + l_2 s_2 + l_3 s_3 = 2(O A_2 A_3 + O A_3 A_1 + O A_1 A_2) = 2 A_1 A_2 A_3.$$

Somit ist, wie auch der Punkt O genommen sei, die besondere lineare Function

$$l_1 s_1 + l_2 s_2 + l_3 s_3 = \mathsf{M}$$

constant und dem doppelten Inhalt M *des Fundamentaldreiecks*

gleich. Da die Gröſsen $\sin A_i$ den s_i proportional sind, so ist auch, mit R als Radius des umgeschriebenen Kreises

$$s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 + s_3 \sin A_3 = \frac{\mathsf{M}}{2R}$$

eine Constante. Dies kann man auch direct nachweisen, indem man nach § 65 die mit $\sin(\alpha_2 - \alpha_3)$, $\sin(\alpha_3 - \alpha_1)$, $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$ bez. multiplicirten trinomischen Werte von s_1, s_2, s_3 addirt; denn in der Summe verschwinden die Coefficienten von x und y und es bleibt die obige Constante.

Die Abstände s_i irgend eines Punktes von den Fundamentallinien genügen einer linearen Identität und sind daher schon durch ihre Verhältnisse bestimmt. Nennen wir drei zu den wirklichen Abständen s_i proportionale Zahlen x_i und den Proportionalitätsfactor ϱ, so daſs $s_1 = \varrho x_1$, $s_2 = \varrho x_2$, $s_3 = \varrho x_3$, so ist dieser durch die Relation bestimmt

$$\varrho\,(l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3) = \mathsf{M}.$$

Solange wir nur homogene Gleichungen zwischen den s_i betrachten, können wir diese wirklichen Abstände, ohne die Bedeutung der Gleichung zu ändern, durch proportionale Gröſsen ersetzen. Denn ist $f(s_1, s_2, s_3)$ eine homogene Function n^{ten} Grades, so ist bekanntlich $f(\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3) = \varrho^n f(x_1, x_2, x_3)$. Daher ändern wir die Definition des § 66 dahin ab, daſs wir *trimetrische Coordinaten eines Punktes drei Zahlen x_1, x_2, x_3 nennen, deren Verhältnisse gleich sind den Verhältnissen der Abstände s_1, s_2, s_3 des Punktes von drei Fundamentallinien*, oder kurz, *Proportionalzahlen zu diesen Abständen.* Diese Verhältnis-Coordinaten eines Punktes bezeichnen wir späterhin mit x_1, x_2, x_3 und den Punkt selbst als $x_1 \mid x_2 \mid x_3$ oder x_i.

Damit finden wir die früher gewonnene Einsicht bestätigt, daſs zur Bestimmung des Punktes nur zwei unabhängige Gröſsen bekannt sein müssen. Denn drei Proportionalzahlen x_1, x_2, x_3 sind angebbar, sobald wir nur zwei ihrer Verhältnisse z. B. $x_1 : x_3$, $x_2 : x_3$ kennen, und ϱ kann dann so bestimmt werden, daſs ϱx_i die Abstände selbst sind.

✱ 68. Die Gleichung jeder Geraden muſs sich durch die Gleichungen der Fundamentallinien als lineares homogenes

Aggregat darstellen lassen. Die Identität des vorigen § erlaubt uns aber, überhaupt jede lineare Gleichung in trimetrischen Coordinaten, auch der Form nach, homogen zu machen; denn, wäre z. B. eine formell nicht homogene Gleichung gegeben wie $s_1 = 3$ offenbar eine Parallele zu $s_1 = 0$, so kann sie in der homogenen Form geschrieben werden $Ms_1 = 3(l_1 s_1 + l_2 s_2 + l_3 s_3)$.

Überhaupt sind in Cartesischen Coordinaten die Gleichungen aller zu $c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$ parallelen Geraden von der Form $c_1 x + c_2 y + c_3 + k = 0$, da sie sich nur im constanten Gliede unterscheiden (§ 26).

Ist also die Gleichung der gegebenen Geraden in Dreiliniencoordinaten $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$, so ist zufolge § 67 *die Gleichung einer Parallelen in Dreiliniencoordinaten*

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + k(s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 + s_3 \sin A_3) = 0.$$

Sind umgekehrt $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$, $b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 = 0$ irgend zwei Parallele, so mufs sich unter den Geraden ihres Büschels eine von der Gleichung befinden

$$s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 + s_3 \sin A_3 = 0.$$

In der Tat wird gerade dies ausgesagt durch das Kriterium des Parallelismus in § 65, wenn man dasselbe nach § 32 interpretirt.

Da die Gerade von der zuletzt geschriebenen Gleichung die Schnittpunkte aller Parallelen (§ 26 Schlufs) enthält, so ist sie *der Ort aller unendlich fernen Punkte oder die unendlich ferne Gerade der Ebene.* In diesen Überlegungen können an Stelle der s_i auch die x_i gesetzt werden.

B. 1) Haben zwei Gleichungen $S = 0$, $S' = 0$ solche Coefficienten, dafs $S - S' = \text{const.}$, so stellt $S + S' = 0$ ihre Mittelparallele dar.

2) Die Gleichung der Parallelen zur Seite s_3 eines Dreiecks durch die Gegenecke desselben ist $s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 = 0$; denn diese Gerade geht durch den Punkt $s_1 \mid s_2$ und ist s_3 parallel, weil man sie in der Form schreiben kann

$$s_3 \sin A_3 - (s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 + s_3 \sin A_3) = 0.$$

Die vier Geraden $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_1 \sin A_1 \pm s_2 \sin A_2 = 0$, deren letzte die von der Spitze ausgehende Mittellinie des Drei-

ecks ist, bilden ein harmonisches Büschel. Der Mittelpunkt einer Strecke und der unendlich entfernte Punkt ihrer Geraden sind harmonisch conjugirt in Bezug auf die Endpunkte der Strecke (vgl. 1).)

3) Die Gerade, welche die Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks verbindet, ist zur dritten Seite parallel.

Ihre Gleichung ist nach § 64. 2)

$$s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 - s_3 \sin A_3 = 0$$

oder $$2s_3 \sin A_3 = s_1 \sin A_1 + s_2 \sin A_2 + s_3 \sin A_3.$$

4) Die Gerade $l_1 s_1 - l_2 s_2 + l_3 s_3 - l_4 s_4 = 0$ in § 62. 5) geht durch den Mittelpunkt der Verbindungslinie der Punkte $s_1 | s_3$, $s_2 | s_4$.

Denn $(l_1 s_1 + l_3 s_3) + (l_2 s_2 + l_4 s_4)$ ist eine constante Gröfse, nämlich offenbar das Doppelte der Fläche des Vierecks. In Folge dessen sind $l_1 s_1 + l_3 s_3 = 0$, $l_2 s_2 + l_4 s_4 = 0$ parallele Linien, und $(l_1 s_1 + l_3 s_3) - (l_2 s_2 + l_4 s_4) = 0$ ist ihre Mittelparallele (1)), halbirt also auch die Verbindungslinie der Punkte $s_1 | s_3$ und $s_2 | s_4$, von denen der eine der ersten, der andere der zweiten Linie angehört.

*69. **Verbindungsgerade zweier Punkte.** Die Punkte $x' | y'$, $x'' | y''$ haben die Dreilinien-Coordinaten s_i', s_i'', wenn diese die Substitutionsresultate von $x'|y'$, $x''|y''$ in $-(x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i)$ bezeichnen. Eine Gerade von der Gleichung $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$ enthält beide Punkte, wenn die Coefficienten so gewählt werden, dafs zugleich $a_1 s_1' + a_2 s_2' + a_3 s_3' = 0$ und $a_1 s_1'' + a_2 s_2'' + a_3 s_3'' = 0$. Die Elimination der a_1, a_2, a_3 ergibt *für die Verbindungslinie der Punkte s_i', s_i'' die Gleichung*

$$s_1 (s_2' s_3'' - s_3' s_2'') + s_2 (s_3' s_1'' - s_1' s_3'') + s_3 (s_1' s_2'' - s_2' s_1'') = 0.$$

Sie ist zugleich die Bedingung dafür, dafs drei Punkte von den Coordinaten s_i, s_i', s_i'' in einer Geraden liegen (vgl. § 35).*)

Anderseits finden wir, dafs für einen Teilpunkt s_i, der die Strecke zwischen s_i' und s_i'' im Verhältnis $n' : n''$ teilt, wie in § 13 wegen $n' : n'' = s_i - s_i' : s_i'' - s_i$, die Abstände von den Fundamentallinien durch $s_i = \dfrac{n'' s_i' + n' s_i''}{n' + n''}$. Daher

---

*) Dabei wird wieder die Gleichung nicht geändert, wenn wir sie in den x_i, x_i', x_i'' schreiben.

können wir *als die trimetrischen Coordinaten des Punktes, der die Strecke* $x_1' \mid x_2' \mid x_3'$, $x_1'' \mid x_2'' \mid x_3''$ *im Verhältnis* $n' : n''$ *teilt,* nehmen $n''x_1' + n'x_1'' \mid n''x_2' + n'x_2'' \mid n''x_3' + n'x_3''$.
Offenbar liegt dieser Punkt in der obigen Verbindungslinie, denn, wenn x_i' und x_i'' die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ befriedigen, so genügen ihr auch $n''x_i' + n'x_i''$.

Daher haben auch (§ 14) zwei in Bezug auf x_i' und x_i'' conjugirt harmonische Punkte die Coordinaten $n''x_i' \pm n'x_i''$.

* 70. Wenn eine Gleichung $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$ oder $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ gegeben ist, so kann die durch sie repräsentirte Gerade bei gegebenem Fundamentaldreieck $A_1A_2A_3$ leicht construirt werden. Ihre Schnittpunkte L, M, N mit den Fundamentallinien A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 (vgl. Fig. § 63. 1)) sind bez. durch die Gleichungspaare bestimmt

$$x_1 = 0 \qquad\qquad x_2 = 0 \qquad\qquad x_3 = 0$$
$$a_2x_2 + a_3x_3 = 0; \quad a_3x_3 + a_1x_1 = 0; \quad a_1x_1 + a_2x_2 = 0.$$

Die Geraden A_1L, A_2M, A_3N teilen aber die Dreieckswinkel $A_2A_1A_3$, $A_3A_2A_1$, $A_1A_3A_2$ so, daſs das Sinusverhältnis der Teilwinkel gleich $-a_2 : a_3$, $-a_3 : a_1$, $-a_1 : a_2$ ist, denn es ist in A_1L $x_3 : x_2 = s_3 : s_2 = -a_2 : a_3$ u. s. w. Vollzieht man also einfach diese durch die Coefficienten der Gleichung bestimmte Teilung der Winkel des Fundamentaldreiecks, so liegen die drei Punkte, in denen die Teilstrahlen die Gegenseiten schneiden, in der durch die Gleichung dargestellten Geraden*).

Ganz ebenso finden wir einen Punkt von gegebenen trimetrischen Coordinaten $a_1 \mid a_2 \mid a_3$. Seine Verbindungsgeraden mit den Fundamentalpunkten $1 \mid 0 \mid 0$, $0 \mid 1 \mid 0$, $0 \mid 0 \mid 1$ haben nach § 69 die Gleichungen $a_3x_2 - a_2x_3 = 0$, $a_1x_3 - a_3x_1 = 0$, $a_2x_1 - a_1x_2 = 0$ oder

*) Wendet man insbesondere diese Construction auf die Gleichung $x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0$ (§ 68) an, so findet man die Teilstrahlen den Gegenseiten parallel, also drei Punkte des definirten Ortes in unendlicher Entfernung. Somit ist wiederum diese besondere lineare Gleichung als Ausdruck der unendlich fernen Geraden der Ebene erkannt.

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} \quad \text{oder} \quad \frac{s_1}{a_1} = \frac{s_2}{a_2} = \frac{s_3}{a_3} \; (= \varrho).$$

Diese Geraden teilen also die Winkel $A_2 A_1 A_3$, $A_3 A_1 A_2$, $A_1 A_3 A_2$ nach den Sinusverhältnissen $a_3 : a_2$, $a_1 : a_3$, $a_2 : a_1$ bez. und können demgemäfs construirt werden. Dabei bemerken wir nach § 64. 1), dafs *der Punkt von den Coordinaten* $a_1 : a_2 : a_3$ *die Gerade* $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$ *zur Harmonikale in Bezug auf das Fundamentaldreieck* hat. Aus den Coordinaten $a_1 : a_2 : a_3$ folgen die Abstände des Punktes von den Fundamentallinien durch Multiplication mit $\mathsf{M} : (l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3)$ (§ 67).

Die trimetrischen Coordinaten der merkwürdigen Punkte im Fundamentaldreieck kann man durch Anwendung der Gleichung der Verbindungsgeraden zweier Punkte (vgl. § 62. 1)—4)) oder obige Bemerkung direct bestimmen. So ist

$\frac{1}{\sin A_1} : \frac{1}{\sin A_2} : \frac{1}{\sin A_3}$ der Schwerpunkt,

$\frac{1}{\cos A_1} : \frac{1}{\cos A_2} : \frac{1}{\cos A_3}$ der Höhenschnittpunkt,

$\cos A_1 : \cos A_2 : \cos A_3$ das Centrum des umgeschriebenen,

$1 : 1 : 1$ das Centrum des eingeschriebenen Kreises,

$-1 : 1 : 1$, $1 : -1 : 1$, $1 : 1 : -1$ die Centra der eingeschriebenen Kreise, etc.

B. 1) Die Gleichung der Verbindungsgeraden des Höhenschnittpunktes mit dem Schwerpunkt ist (vgl. § 65. 4))

$$x_1 \sin 2A_1 \sin (A_2 - A_3) + x_2 \sin 2A_2 \sin (A_3 - A_1) + x_3 \sin 2A_3 \sin (A_1 - A_2) = 0.$$

2) Die Gleichung der Geraden, welche die Centra des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises verbindet, ist

$$x_1(\cos A_2 - \cos A_3) + x_2(\cos A_3 - \cos A_1) + x_3(\cos A_1 - \cos A_2) = 0.$$

3) Der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt und das Centrum des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises liegen in einer Geraden.

Die Coordinaten dieser Punkte sind $\cos A_2 \cos A_3$, etc.; $\sin A_2 \sin A_3$, etc. und $\cos A_1$, etc. Zum Beweis genügt die Bemerkung, dafs die letzteren Coordinaten die Differenzen der ersteren sind

$$\cos A_1 = \sin A_2 \sin A_3 - \cos A_2 \cos A_3, \text{ etc.}$$

Der Punkt von den Coordinaten $\cos(A_2 - A_3)$, $\cos(A_3 - A_1)$, $\cos(A_1 - A_2)$ liegt offenbar in derselben Geraden und ist ein vierter harmonischer Punkt zu den drei vorigen. Wir werden weiterhin sehen, dafs er das Centrum des (sog. Feuerbach'schen) Kreises ist, der die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks enthält.

***71. Entfernung zweier Punkte P', P'' oder s_i', s_i'' in Dreilinien-Coordinaten.**

Setzt man $a_1 = s_2' s_3'' - s_2'' s_3'$, $a_2 = s_3' s_1'' - s_3'' s_1'$, $s_3 = s_1' s_2'' - s_1'' s_2'$, so ist $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$ die Gleichung der Verbindungsgeraden $P'P''$. Zudem gelten die Relationen

$$l_1 s_1' + l_2 s_2' + l_3 s_3' = M = l_1 s_1'' + l_2 s_2'' + l_3 s_3'',$$

aus denen man durch successive Elimination von l_1, l_2, l_3 erhält

$$l_2 a_3 - l_3 a_2 = M(s_1' - s_1''), \quad l_3 a_1 - l_1 a_3 = M(s_2' - s_2''),$$
$$l_1 a_2 - l_2 a_1 = M(s_3' - s_3'').$$

Verbindet man nun die Punkte P', P'' mit der Ecke A_1 des Fundamentaldreiecks und schneidet $A_1 A_2$ durch die Gerade $P'P''$ in P, so ist jedenfalls

$$\triangle A_1 P' P'' = A_1 P P'' - A_1 P P'.$$

Daraus folgt, da die letzteren beiden Dreiecke die gemeinschaftliche Basis $A_1 P$ und die zugehörigen Höhen s_3'', s_3' haben, für d als die Entfernung der Punkte P', P'' und p als die der Geraden $P'P''$ vom Punkte A_1, die Relation $pd = A_1 P \cdot (s_3'' - s_3')$. Nun ergibt sich für den Abstand von P oder $-a_2 \mid a_1 \mid 0$ von $A_1 A_3$ leicht einerseits $\frac{a_1 M}{l_2 a_1 - l_1 a_2} = \frac{a_1}{s_3'' - s_3'}$, anderseits $A_1 P \cdot \sin A_1$; also ist

$$pd = \frac{a_1}{\sin A_1} = 2R \frac{a_1}{l_1},$$

wo R der Radius des umgeschriebenen Kreises ist. Ferner findet man nach § 62 für p, wenn man den Nenner der dortigen Abstandsformel mit δ bezeichnet, $p = \frac{M}{\delta} \frac{a_1}{l_1}$. Daher ergibt sich $d = \frac{2R}{M} \delta$ oder

$$d^2 = \frac{4R^2}{M^2} \delta^2 = \frac{4R^2}{M^2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2 a_2 a_3 \cos A_1 - 2 a_3 a_1 \cos A_2 - 2 a_1 a_2 \cos A_3).$$

Mit Hilfe der drei zuerst abgeleiteten Relationen findet man andere, bequemere Formen für diese Entfernung. Quadrirt man jene, multiplicirt sie mit $l_1 \cos A_1$, $l_2 \cos A_2$, $l_3 \cos A_3$ bez. und bildet die Summe der rechten und linken Seiten, so reducirt sich wegen $l_1 = l_2 \cos A_3 + l_3 \cos A_2$, etc. die Summe links auf $l_1 l_2 l_3 \delta^2$. Man erhält durch Substitution

$$d^2 = \frac{l_1 l_2 l_3}{M^2} \left\{ \begin{array}{l} l_1 \cos A_1 (s_1' - s_1'')^2 + l_2 \cos A_2 (s_2' - s_2'')^2 \\ + l_3 \cos A_3 (s_3' - s_3'')^2 \end{array} \right\}.$$

Multiplicirt man aber dieselben Relationen paarweise und bildet die Summe der bez. mit l_1, l_2, l_3 vervielfachten Producte, so reducirt sich wegen $l_2^2 + l_3^2 - l_1^2 = 2 l_2 l_3 \cos A_1$, etc. die erste Summe auf $-l_1 l_2 l_3 \delta^2$. Folglich erhält man durch Substitution

$$d^2 = -\frac{l_1 l_2 l_3}{M^2} \left\{ \begin{array}{l} l_1 (s_2' - s_2'')(s_3' - s_3'') + l_2 (s_3' - s_3'')(s_1' - s_1'') \\ + l_3 (s_1' - s_1'')(s_2' - s_2'') \end{array} \right\}.$$

Für die letzte Form des Wertes sei auch eine directe Ableitung angedeutet: Zuerst zeigt man, dafs das Quadrat der Entfernung durch eine Summe von Vielfachen der Producte der Differenzen der Coordinaten ausdrückbar sein mufs, da d^2 verschwindet, sobald irgend zwei Coordinatendifferenzen zu Null werden; dann ermittelt man durch die Specialisirung der Formel für die Ecken des Fundamentaldreiecks die Factoren jener Producte. Endlich ist selbst nach der Methode der Substitution in den §§ 64, 65 zu verfahren.

B. Der doppelte Inhalt des durch drei Punkte s_i', s_i'', s_i''' bestimmten Dreiecks ist $\frac{l_1 l_2 l_3}{M^2}(a_1 s_1''' + a_2 s_2''' + a_3 s_3''')$.

Mit Hilfe der Bezeichnungen dieses § hat man für die Gerade s_i', s_i'' die Gleichung $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$. Man benutzt die vorigen Ausdrücke für die Länge der Basis und die Beziehung derselben zur Höhe des Dreiecks nach § 65.

*** 72. Die geometrische Bedeutung der Gleichung**

$$x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0$$

ist die unendlich ferne Gerade der Ebene, wie wir in § 68 gesehen haben. Zu derselben Einsicht führt die Bemerkung, dafs die Gleichung zwar in der allgemeinen Form der Glei-

chung einer Geraden inbegriffen ist, aber keine endlich bestimmbaren Punkte enthalten kann, weil für die Coordinaten jedes solchen die Gröfse $x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3$ einer gewissen Constanten gleich, aber nicht Null wird. (§ 67.) Sie ist daher nur als eine Grenzform möglich, der sich wirkliche Gleichungen nähern können.

In der allgemeinen Gleichung $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$ bestimmen $-a_3 : a_1$ und $-a_3 : a_2$ die Abschnitte der Geraden in den Coordinatenaxen; je kleiner also a_1 und a_2 werden, desto gröfser sind diese Abschnitte bei unverändertem Werte von a_3, desto weiter entfernt ist daher die Gerade vom Ursprung. Für $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ sind jene Abschnitte ∞, und alle Punkte der Linie sind in unendlicher Entfernung gelegen.

In der Tat kann die Gleichung $0 \cdot x + 0 \cdot y + a_3 = 0$, wenn auch nicht für endliche Werte von x und y, so doch für unendlich grofse Werte erfüllt werden, weil das Product $0 \cdot \infty$ einen Wert haben kann.

Somit ist die Gleichung der unendlich fernen Geraden in Cartesischen Coordinaten

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + a_3 = 0.$$

Zur Abkürzung des Ausdrucks werden wir sie gelegentlich in der minder exacten Form $a_3 = 0$ oder $1 = 0$ brauchen.

Wenn wir nun diese Gleichung nach § 68 homogen machen, so entspringt wirklich die Gleichung $x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0$. Überhaupt erweisen sich nun die Gleichungen paralleler Geraden $S + k = 0$ als nach dem Princip des § 62 gebaut, wenn man durch $S = 0$ und die unendlich ferne Gerade $k = 0$ das Büschel bestimmt denkt.

* 73. **Cartesische Coordinaten sind nur ein specieller Fall von trimetrischen Coordinaten.** Man glaubt vielleicht zuerst einen wesentlichen Unterschied zwischen beiden darin zu finden, dafs Gleichungen in trimetrischen Coordinaten homogen sind, während man in den Gleichungen mit Cartesischen Coordinaten ein absolutes Glied von Gliedern des ersten, zweiten, n^{ten} Grades unterscheidet. Aber eine einfache Überlegung zeigt, dafs Gleichungen in Cartesischen

Coordinaten in Wirklichkeit ebenfalls homogen sein müssen, wenn sie es auch nicht in der Form sind. Der Sinn der Gleichung $x = 3$ kann beispielsweise kein anderer sein, als dafs der Abstand x drei Lineareinheiten gleich ist, während die Gleichung $xy = 9$ aussagt, dafs das Rechteck xy gleich 9 Quadraten einer gewissen Lineareinheit ist; etc. Um solche Gleichungen auch der Form nach homogen zu machen, kann man die Lineareinheit durch z bezeichnen und dann die Gleichung der Geraden in der Form schreiben:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0.$$

Vergleicht man dies mit $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ und erinnert sich, dafs die Gleichung der unendlich fernen Geraden die Form $z = 0$ annimmt, so erkennt man, dafs in jener an die Stelle der willkürlichen Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ speciell getreten sind $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Also sind Gleichungen in Cartesischen Coordinaten nur die besondere Form, in welcher Gleichungen in trimetrischen Coordinaten erscheinen, wenn zwei der Fundamentallinien zu Coordinatenaxen gewählt werden, während die dritte die unendlich ferne Gerade ist. (Vergl. § 85.)

Es ist jedoch nicht überflüssig zu bemerken, dafs wir nicht dasselbe geometrische Gebilde, dessen Gleichung in Cartesischen Coordinaten vorliegt, auch erhalten, wenn wir nun x, y, z als trimetrische veränderliche Coordinaten betrachten. Gerade so, wie wir mehrfach homogene Gleichungen zu rechtwinkligen Coordinaten transformirten durch die Substitutionen $\varrho x_i = x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i$ (§ 61), müssen wir, um gegebene nicht homogene Gleichungen in *gleichbedeutende* homogene zu verwandeln, aus diesen Substitutionen x und y als Functionen der x_i berechnen und in sie einsetzen (vgl. § 79).

* 74. In dem Vorhergehenden ist eine wesentliche *Erweiterung des ursprünglich angenommenen Begriffs der Coordinaten* enthalten.

Man versteht hiernach leicht, *wie jeder besonderen Art, die Lage eines Punktes in Bezug auf fixe Punkte oder Linien zu bestimmen, deren Lage als bekannt vorausgesetzt wird, ein*

besonderes Coordinatensystem entsprechen mufs. Nachdem die Bestimmung eines Punktes durch Coordinaten erlangt ist, wird jede gerade oder krumme Linie als eine Reihe von Punkten aufgefafst, und das Gesetz der gegenseitigen Abhängigkeit ihrer Coordinaten durch eine Gleichung zwischen denselben dargestellt. So genügen die Cartesischen Coordinaten aller Punkte einer Geraden einer *vollständigen* Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen, die trimetrischen Coordinaten derselben Punkte einer *homogenen* Gleichung des ersten Grades zwischen drei Veränderlichen, und umgekehrt definiren diese Gleichungen die Gerade als Ort.

Setzt man an die Stelle des Punktes als des ursprünglichen durch Coordinaten zu bestimmenden Raumelementes irgend ein anderes geometrisches Gebilde, so erhält man dadurch in einem andern Sinne neue Coordinatensysteme. Immer aber stellen Gleichungen zwischen den Coordinaten die aus jenen Elementargebilden zusammengesetzten räumlichen Formen dar.

Nun hat neben dem Punkte kein anderes geometrisches Gebilde so viel Berechtigung, als elementar betrachtet zu werden, und kein anderes bietet so leicht die Möglichkeit, durch stetige Reihung neue Gebilde als zusammengesetzte aus sich hervorzutreiben, als die Gerade. *Indem man jede Gerade in Bezug auf gewisse feste Punkte oder feste Gerade durch Coordinaten in verschiedener Weise bestimmt, erhält man die verschiedenen Systeme von Coordinaten der Geraden oder von Liniencoordinaten (Strahlen- oder Tangentialcoordinaten).*[7])

Von da an verfolgen die analytische und die reine Geometrie von demselben Princip aus auf verschiedenen Wegen das gleiche Ziel.

75. **Liniencoordinaten.** Die Gleichung $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$ einer Geraden hängt nur von den Verhältnissen der drei Coefficienten, also von zwei wesentlichen Constanten ab (§ 33). Wir können daher *die Gleichungscoefficienten* a_1, a_2, a_3 *als homogene Coordinaten der Geraden* betrachten, oder als nicht homogene zwei Quotienten derselben. Wie schon in § 33 angedeutet, *verwendet man nach Plücker die negativen Reciproken der Axenabschnitte als die Coordinaten der Geraden*

also $$\frac{a_1}{a_3} = \xi, \quad \frac{a_2}{a_3} = \eta$$

und bezeichnet die Gerade von den Plücker'schen Liniencoordinaten ξ, η mit $\xi \mid \eta$. Somit sind die Geraden $0 \mid \eta$ der x-, $\xi \mid 0$ der y-Axe parallel und $0 \mid 0$ ist die unendlich ferne Gerade (§ 72). Unendlich grofse Coordinaten haben die Strahlen durch den Anfangspunkt, dagegen bleibt ihr Verhältnis endlich, es ist der Richtungscoefficient $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\xi}{\eta}$.

Unter gleichzeitiger Verwendung Cartesischer und Plücker'scher Coordinaten erhält man die sogenannte *Gleichung des Ineinanderliegens*

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

als die Bedingung dafür, dafs der Punkt $x \mid y$ in der Geraden $\xi \mid \eta$ liege oder die Gerade $\xi \mid \eta$ durch den Punkt $x \mid y$ gehe. *Diese Bedingung vereinigter Lage eines Punktes und einer Geraden ist in den Coordinaten beider Elemente symmetrisch.* Darin liegt die Zweckmäfsigkeit der Plücker'schen Wahl der Liniencoordinaten begründet (vgl. unten).

Denken wir $x \mid y$ variabel und $\xi \mid \eta$ fest, so stellt die Gleichung die Gerade $\xi \mid \eta$ in Punktcoordinaten dar. Lassen wir dagegen $\xi \mid \eta$ variiren und $x \mid y$ festbleiben, so drückt die Gleichung die Bedingung aus, dafs alle Geraden, deren Coordinaten $\xi \mid \eta$ ihr genügen, durch den gegebenen Punkt $x \mid y$ gehen; wir nennen sie daher die *Gleichung des Punktes in Liniencoordinaten.* Dieser neue Begriff ist bereits im § 50 enthalten; denn nach demselben ist $A_1\xi + A_2\eta + A_3 = 0$, wenn A_1, A_2, A_3 Constante, ξ, η Variable sind*), diejenige Gleichung in ξ, η, welche alle Gerade $\xi x + \eta y + 1 = 0$ bestimmt, die durch einen festen Punkt hindurchgehen. *Jede lineare Gleichung in Liniencoordinaten*

$$A_1\xi + A_2\eta + A_3 = 0$$

repräsentirt einen Punkt, und zwar den Punkt $\frac{A_1}{A_3} \Big| \frac{A_2}{A_3}$, ge-

*) Es ist für die dortigen k_i; $\frac{a_1}{a_3}$, $\frac{a_2}{a_3}$ gesetzt A_i; ξ, η.

rade so, wie die Gerade von der Gleichung $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$ die Coordinaten $\frac{a_1}{a_3} \Big| \frac{a_2}{a_3}$ hat.

Man übersieht sofort, wie sich von dieser Gleichung des Punktes aus eine zur bisherigen Untersuchung der Geraden ganz analoge Behandlung der analytischen Geometrie des Punktes durchführen läfst. Man kann leicht in die Ausdrücke für den Abstand zwischen Punkt und Gerade, für den Winkel statt der Gleichungscoefficienten die Strahlencoordinaten einführen. So sind z. B. die Coordinaten aller Strahlen des Büschels ξ_i, ξ_i' darstellbar als $\frac{\xi_i - \lambda \xi_i'}{1 - \lambda}$, wenn λ das Sinusverhältnis bedeutet. Offenbar haben auch die directen analytischen Entwickelungen hier und dort grofse Ähnlichkeit. So ist die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden hinsichtlich der analytischen Operationen nicht verschieden von der der Verbindungslinie zweier Punkte. Sind gegeben

die Geraden

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$$
$$b_1 x + b_2 y + b_3 = 0,$$

so sind *die Coordinaten ihres Schnittpunktes* (§ 32)

$$\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \Big| \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Oder: *der Schnittpunkt der Geraden* $\xi_1 | \eta_1$, $\xi_2 | \eta_2$ *hat die Gleichung*

$$\frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1} \xi - \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1} + 1 = 0.$$

die Punkte

$$A_1 \xi + A_2 \eta + A_3 = 0$$
$$B_1 \xi + B_2 \eta + B_3 = 0,$$

so sind *die Coordinaten ihrer Verbindungsgeraden*

$$\frac{A_2 B_3 - A_3 B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \Big| \frac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

Oder: *die Verbindungsgerade der Punkte* $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ *hat die Gleichung* (§ 35)

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} x - \frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} + 1 = 0.$$

B. *Die Transformation der rechtwinkligen Strahlencoordinaten* folgt aus der der Punktcoordinaten mittelst der Relation $\xi x + \eta y + 1 = 0$. Substituiren wir in dieselbe die durch eine Drehung ϑ transformirten $x' | y'$ mittelst der Formeln des § 11, so folgen die neuen Coordinaten aus

$$(\xi \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta) x' + (- \xi \sin \vartheta + \eta \cos \vartheta) y' + 1 = 0$$

als $\quad \xi' = \xi \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta, \quad \eta' = - \xi \sin \vartheta + \eta \cos \vartheta.$

Die Punkt- und die Strahlencoordinaten erleiden also durch Drehung umgekehrte Transformationen.

Dagegen wird bei der Paralleltransformation $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$ die Relation zu

$$\xi x' + \eta y' + \xi x_0 + \eta y_0 + 1 = 0,$$

so dafs $\xi' = \frac{\xi}{\xi x_0 + \eta y_0 + 1}$, $\eta' = \frac{\eta}{\xi x_0 + \eta y_0 + 1}$.

Diese Formeln haben einen von den übrigen abweichenden Charakter, da in ihnen ein Nenner auftritt, der im neuen Anfangspunkt verschwindet.

76. **Enveloppen.** Ist eine Gleichung $\Sigma = 0$ vom n^{ten} Grade zwischen den Coordinaten ξ, η gegeben, so erlaubt uns dieselbe für jeden bestimmten Wert ξ' von ξ eine Anzahl n von bestimmten Werten η zu ermitteln, welche mit ihm zusammen der Gleichung genügen. Die Gleichung ist somit für alle die n Geraden erfüllt, deren Coordinaten jenes ξ und einer dieser n Werte η_1', η_2', ... η_n' von η sind. Geht man von ξ' zu einem nächstbenachbarten Werte ξ'' für ξ über, so erhält man abermals n Werte von η und damit n Gerade, welche ebenfalls der Gleichung genügen. So wie im § 19 die Aufeinanderfolge aller der eine Gleichung $S = 0$ in Punktcoordinaten befriedigenden Punkte ein Polygon und durch die statthafte unbegrenzte Annäherung der benachbarten Punkte an einander eine umgeschriebene Curve bildete, so entsteht hier aus der Aufeinanderfolge aller der der Gleichung $\Sigma = 0$ genügenden Geraden mittelst eines umgeschriebenen Polygons eine eingeschriebene Curve.

Dort genügten die Coordinaten jedes *Punktes* der Curve der betrachteten Gleichung, hier sollen die Geraden, deren Coordinaten die betrachtete Gleichung befriedigen, *Tangenten* der Curve heifsen. Der Inbegriff dieser sämmtlichen Tangenten ist, wie dort der der sämmtlichen Punkte, die geometrische Bedeutung der Gleichung; $\Sigma = 0$ *stellt eine Curve dar als Eingehüllte oder als Enveloppe von Geraden*, so wie die Gleichung $S = 0$ im Falle des § 19 eine Curve als *Ort von Punkten* bezeichnet.

Die Gleichung $S = 0$ bestimmt für jeden gegebenen Wert x' von x die zugehörigen y' der n Punkte, welche die

Curve mit der Geraden $x = x'$ gemein hat; die Gleichung $\Sigma = 0$ bestimmt für jeden gegebenen Wert ξ' von ξ die zugehörigen η der n Geraden d. h. Tangenten, welche die Curve mit dem Punkte $\xi = \xi'$ gemein hat. Und allgemein: wenn man zwischen einer Gleichung vom n^{ten} Grade in Punktcoordinaten $x \mid y$ und einer Gleichung ersten Grades in $x \mid y$ die gemeinschaftlichen Wertpaare der Unbekannten x, y bestimmt, so erhält man die Coordinatenpaare der n Punkte, welche die Curve mit der Geraden gemein hat; wenn man aber zwischen einer Gleichung n^{ten} Grades in Liniencoordinaten $\xi \mid \eta$ und einer Gleichung ersten Grades in $\xi \mid \eta$ die gemeinschaftlichen Wertepaare der Unbekannten ξ, η bestimmt, so erhält man die Coordinatenpaare der n Tangenten, welche die Curve mit dem Punkte gemein hat.

Jede Curve kann man sowol als Ort ihrer Punkte, wie auch als Enveloppe ihrer Tangenten betrachten, also durch eine Gleichung in $x \mid y$ oder in $\xi \mid \eta$ definiren. Man versteht unter *Ordnung* einer Curve den Grad ihrer Gleichung in Punktcoordinaten und unter *Classe* der Curve den Grad ihrer Gleichung in Liniencoordinaten. Demnach bezeichnet die *Ordnungszahl* der Curve die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden, die *Classenzahl* derselben die Zahl ihrer Tangenten aus einem Punkte; denn jene stimmt mit dem Grade ihrer Gleichung in Punktcoordinaten $x \mid y$, diese mit dem Grade ihrer Gleichung in Liniencoordinaten $\xi \mid \eta$ überein und beide sind im allgemeinen ganz verschiedene Zahlen. Dazu nehmen die Elemente selbst Ausnahmestellungen ein. *Die Gerade ist der einzige Ort erster Ordnung und nullter Classe, der Punkt die einzige Enveloppe nullter Ordnung und erster Classe.* Bei der Übertragung metrischer Ausdrücke in Liniencoordinaten, z. B. in der Formel für den Abstand eines Punktes $x \mid y$ von einer Geraden $\xi \mid \eta$

$$s = \frac{\xi x + \eta y + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

tritt im Nenner häufig die Quadratsumme der Strahlencoordinaten auf. Die durch deren Verschwinden dargestellte *besondere Enveloppe* $\quad \xi^2 + \eta^2 = 0$

besteht aus den beiden absoluten Richtungen (wie § 58 verlangt), denn die Gleichung zerfällt in das Product der beiden linearen $\xi \pm i\eta = 0$ und diese stellen die unendlich fernen Punkte von den Richtungscoefficienten $\pm i$ dar. Überhaupt zerfallen Enveloppen n^{ter} Classe, deren Gleichungen in $\xi - \alpha \,|\, \eta - \beta$ homogen sind, in n Punkte der Geraden $\alpha \,|\, \beta$ (vgl. § 53).

77. **Punktreihen.** Ganz so allgemein wie in § 61 gilt hier das Parameterprincip: *Sind* $\Sigma = 0$ *und* $\Sigma' = 0$ *die Gleichungen von zwei Enveloppen in Liniencoordinaten, so hat die durch* $\Sigma - \lambda\Sigma' = 0$ *dargestellte Enveloppe — für* λ *als einen beliebigen Parameter — jede Gerade zur Tangente, welche für die durch* $\Sigma = 0$ *und* $\Sigma' = 0$ *dargestellten Curven gleichzeitig Tangente ist.* Denn Coordinatenwerte $\xi \,|\, \eta$, welche gleichzeitig den Gleichungen $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ genügen, erfüllen notwendig für jeden Wert von λ auch die Gleichung $\Sigma - \lambda\Sigma' = 0$.

Sind speciell $\Sigma_1 = 0$, $\Sigma_2 = 0$ linear oder die beiden gegebenen Enveloppen Punkte $x_1 \,|\, y_1$, $x_2 \,|\, y_2$, so ist ihre Verbindungslinie ihre einzige gemeinsame Tangente, und $\Sigma_1 - \lambda\Sigma_2 = 0$ kann als Gleichung eines Punktes nur die Gleichung eines Punktes dieser Geraden sein.

Wir untersuchen die Bedeutung des veränderlichen Parameters λ, der alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft, indem der dargestellte Punkt die ganze Gerade beschreibt. Man hat $\lambda = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = \frac{c_1(x_1\xi + y_1\eta + 1)}{c_2(x_2\xi + y_2\eta + 1)}$ und wenn s_1, s_2 die senkrechten Abstände der gegebenen Punkte von irgend einer durch den dargestellten Punkt gehenden Geraden sind, so ist (§ 37)

$$s_1 = \frac{\Sigma_1}{c_1\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad s_2 = \frac{\Sigma_2}{c_2\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad \text{und} \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{\Sigma_1 c_2}{\Sigma_2 c_1} = \lambda\,\frac{c_2}{c_1},$$

wo $c_2 : c_1$ eine für alle durch den Punkt gehenden Strahlen unveränderliche Constante ist. Die Gröfse λ wird also ganz wie in den Betrachtungen des § 54 proportional dem Verhältnis der Abstände und folglich dem Teilverhältnis (§ 13), nach dem der betrachtete Punkt die Strecke zwischen den beiden festen Punkten teilt. Daher bilden die vier Punkte derselben Geraden

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_1 - \lambda\Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_1 + \lambda\Sigma_2 = 0$$

eine harmonische Gruppe.

Geht man zur Betrachtung von drei Punkten $\Sigma_1 = 0$, $\Sigma_2 = 0$, $\Sigma_3 = 0$ weiter, die nicht in einer Geraden liegen, so knüpfen sich daran eine Reihe von Entwickelungen, die ganz denen der §§ 64 f. analog sind. Ein Beispiel gibt die Betrachtung der Schnittpunkte einer geraden Transversalen mit den Seiten des durch jene bestimmten Dreiecks. Drei Punkte in den Seiten des Dreiecks sind

$$\Sigma_1 + \lambda\Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_2 + \mu\Sigma_3 = 0, \quad \Sigma_3 + \nu\Sigma_1 = 0;$$

damit die Coordinaten einer Geraden diese Gleichungen gleichzeitig erfüllen, mufs die Relation bestehen $\lambda\mu\nu = -1$; diese gibt aber nach der Bedeutung von λ, μ, ν genau die Relation des § 51. 1) unter den Teilverhältnissen wieder, welche die drei Schnittpunkte in den Seiten des Dreiecks bestimmen.

Ebenso läfst sich die Gleichung jedes beliebigen vierten Punktes $u_1\xi + u_2\eta + u_3 = 0$ durch die von drei festen Punkten seiner Ebene $\Sigma_1 = a_1\xi + a_2\eta + a_3 = 0$, $\Sigma_2 = b_1\xi + b_2\eta + b_3 = 0$, $\Sigma_3 = c_1\xi + c_2\eta + c_3 = 0$ in der Form $k_1\Sigma_1 + k_2\Sigma_2 + k_3\Sigma_3 = 0$ ausdrücken. Man hat dazu nur den Bedingungen

$$k_1 a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1 = u_1, \quad k_1 a_2 + k_2 b_2 + k_3 c_2 = u_2,$$
$$k_1 a_3 + k_2 b_3 + k_3 c_3 = u_3$$

zu genügen, welche die k_i bestimmen, sobald jene drei nicht in einer Geraden liegen.

Man erhält nun offenbar entsprechend dem trimetrischen Punktcoordinatensystem auf ganz analogem Wege *ein trimetrisches Liniencoordinatensystem* (§ 75) und kann dasselbe in den Untersuchungen mit den nämlichen Vorteilen verwenden wie jenes; denn es teilt mit ihm den Vorzug der Homogeneität der Gleichungen. Wir wollen diese homogenen Coordinaten in der Folge durch ξ_1, ξ_2, ξ_3 und die aus ihnen bestimmte Gerade mit ξ_i oder $\xi_1 | \xi_2 | \xi_3$ bezeichnen. Nach dem Vorhergehenden ist die geometrische Bedeutung dieser Coordinaten die, dafs sie *die Abstände der Geraden* ξ_i *von den Fundamentalpunkten* $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ *oder allgemeiner Proportionalzahlen zu denselben* bedeuten (Dreipunktcoordi-

naten. Man erkennt dies unmittelbar, wenn man sich die drei unabhängigen linearen Functionen in der Form

$\varrho \xi_i = x_i \xi + y_i \eta + 1$ gegeben denkt.

B. 1) Wenn man mit l_1, l_2, l_3 wie früher die Seiten und mit A_1, A_2, A_3 die Winkel des Fundamentaldreiecks bezeichnet, so sind $\xi_2 + \xi_3 = 0$, etc. die Mittelpunkte der Seiten, $l_2 \xi_2 \pm l_3 \xi_3 = 0$, etc. die Schnittpunkte der Winkelhalbirenden mit den Gegenseiten, $\xi_2 \tan A_2 + \xi_3 \tan A_3 = 0$, etc. die Fufspunkte der Höhen.

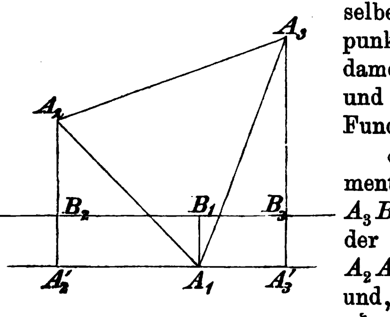
Es ist $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ der Schwerpunkt des Dreiecks, $\xi_1 \tan A_1 + \xi_2 \tan A_2 + \xi_3 \tan A_3 = 0$ der Höhenschnittpunkt, $\xi_1 \sin 2A_1 + \xi_2 \sin 2A_2 + \xi_3 \sin 2A_3 = 0$ das Centrum des umgeschriebenen Kreises, $l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 + l_3 \xi_3 = 0$ das Centrum des eingeschriebenen Kreises, etc. Wie ein durch die allgemeine homogene Gleichung angegebener Punkt construirt werden kann, zeigt 2); die Construction entspricht vollständig der des § 70 für die durch die allgemeine homogene Gleichung gegebene Gerade.

2) Man interpretire die in § 63. 1) angewendeten Gleichungen nach dem System der trimetrischen Liniencoordinaten. Sind $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ die Gleichungen der Punkte A, B, C, so können $k_2 \xi_2 - k_3 \xi_3 = 0$, $k_3 \xi_3 - k_1 \xi_1 = 0$, $k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 = 0$ die Gleichungen der Punkte L, M, N sein, und es sind dann

$$k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3 - k_1 \xi_1 = 0, \quad k_3 \xi_3 + k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 = 0,$$
$$k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 - k_3 \xi_3 = 0$$

die Gleichungen der Ecken desjenigen Dreiecks, welches die Geraden LA, MB, NC mit einander bilden, und $k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3 = 0$ stellt einen Punkt O dar, in welchem sich die Verbindungslinien der Ecken dieses neuen Dreiecks mit den entsprechenden des alten schneiden. Die Gleichungen $k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3 = 0$, $k_3 \xi_3 + k_1 \xi_1 = 0$, $k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 = 0$ bezeichnen die Punkte D, E, F, welche zu L, M, N bez. in Bezug auf BC, CA, AB harmonisch conjugirt sind.

3) Wenn die Coordinaten der Geraden die Abstände derselben von den drei Fundamentalpunkten sind, so soll man die fundamentale Relation zwischen ihnen und den Seiten oder Winkeln des Fundamentaldreiecks entwickeln.



Sind A_1, A_2, A_3 die Fundamentalpunkte und $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 der Geraden $B_2 B_3$, so hat man $A_2 A_2' = \xi_2 - \xi_1$, $A_3 A_3' = \xi_3 - \xi_1$ und, für $\sphericalangle A_2' A_1 A_2 = \alpha_2$, $A_3' A_1 A_3 = \alpha_3$, $\sin \alpha_2 = \frac{\xi_2 - \xi_1}{l_3}$, $\sin \alpha_3 = \frac{\xi_3 - \xi_1}{l_2}$.

Nun ist die Summe dieser Winkel $= \pi - A_1$, also

$$\cos\alpha_2 . \cos\alpha_3 = \sin\alpha_2 . \sin\alpha_3 - \cos A_1 = \frac{(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)}{l_2 l_3} - \cos A_1 .$$

Bestimmt man nun aus

$$-\cos\alpha_2 = \cos(A_1+\alpha_3) = \cos A_1 \cos\alpha_3 - \frac{\xi_3-\xi_1}{l_2}\sin A_1$$

und

$$-\cos\alpha_3 = \cos A_1 \cos\alpha_2 - \frac{\xi_2-\xi_1}{l_3}\sin A_1$$

die Werte $\sin A_1 \cos\alpha_2 = -\frac{\xi_3-\xi_1}{l_2} + \frac{\xi_2-\xi_1}{l_3}\cos A_1$,

$$\sin A_1 \cos\alpha_3 = -\frac{\xi_2-\xi_1}{l_3} + \frac{\xi_3-\xi_1}{l_2}\cos A_1 ,$$

so erhält man durch Substitution

$l_2^2(\xi_2-\xi_1)^2 + l_3^2(\xi_3-\xi_1)^2 - 2l_2l_3(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)\cos A_1$
$= l_2^2 l_3^2 \sin^2 A_1$. Setzt man ein $2l_2l_3\cos A_1 = l_2^2 + l_3^2 - l_1^2$, so erhält man die verlangte Relation in der Form

$$l_1^2(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3) + l_2^2(\xi_2-\xi_3)(\xi_2-\xi_1) + l_3^2(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2) = M^2$$

für M als den doppelten Inhalt des Dreiecks $A_1A_2A_3$. Die Auflösung der Klammern gibt ihr mittelst derselben Umformung und der Einführung der Höhen $h_i = \frac{M}{s_i}$ die Gestalt

$$\frac{\xi_1^2}{h_1^2} + \frac{\xi_2^2}{h_2^2} + \frac{\xi_3^2}{h_3^2} - \frac{2\xi_1\xi_2\cos A_3}{h_1h_2} - \frac{2\xi_2\xi_3\cos A_1}{h_2h_3} - \frac{2\xi_3\xi_1\cos A_2}{h_3h_1} = 1 .$$

Dieselbe Relation läfst sich auch nach der Analogie von § 67 ableiten, indem man von Plücker'schen Coordinaten ausgeht.

*78. Das Charakteristische und Wichtige in den vorhergehenden Entwickelungen ist die grofse Analogie, die zwischen den beiden Systemen der homogenen oder trimetrischen Coordinaten für den Punkt und für die Gerade stattfindet. Diese Analogie vervollständigt sich zu klarer Ausprägung bei einer Begründung dieser Systeme, welche zum Ausgangspunkt den Umstand macht, dafs die Coordinaten nicht sowol die Abstände selbst, als vielmehr zu denselben proportionale Gröfsen bedeuten.

Wir nehmen in einem Dreieck die Seiten als Fundamentallinien der Punktcoordinaten und die Ecken als Fundamentalpunkte der Strahlencoordinaten. Haben die Seiten die Gleichungen

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0,\ b_1x + b_2y + b_3 = 0,\ c_1x + c_2y + c_3 = 0$$

so finden wir nach § 32 als die Gleichungen der Eckpunkte $A_1\xi+A_2\eta+A_3=0$, $B_1\xi+B_2\eta+B_3=0$, $C_1\xi+C_2\eta+C_3=0$, wenn wir die Abkürzungen einführen

$$A_1 = b_2c_3 - b_3c_2, \quad A_2 = b_3c_1 - b_1c_3, \quad A_3 = b_1c_2 - b_2c_1;$$
$$B_1 = c_2a_3 - c_3a_2, \text{ etc.}\ldots, \quad C_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \text{ etc.}$$

Umgekehrt müssen wir von den letzteren Gleichungen aus die ersteren finden, indem wir nach § 75 zur Bestimmung der Coordinaten der Verbindungslinien dieselben Formeln anwenden, wie vorhin zu Berechnung der Schnittpunkte. Daher mufs notwendig

$$B_2C_3 - B_3C_2 = \triangle \,.\, a_1, \text{ etc.}, \quad C_2A_3 - C_3A_2 = \triangle \,.\, b_1, \text{ etc.},$$
$$A_2B_3 - A_3B_2 = \triangle \,.\, c_1, \text{ etc.}$$

sein, und in der Tat findet man durch Ausrechnung den gemeinsamen Factor $\triangle$ gleich den linken Seiten der Endformeln des § 32.

Nun kann man leicht beide Coordinatensysteme mit fast denselben Worten begründen.

Setzt man

$$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3}$$
$$y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3},$$

so sind x', y' die Parameter von zwei Strahlbüscheln, die durch die dritte Seite mit den beiden andern bestimmt werden. Wählen wir also drei Zahlen x_1, x_2, x_3 so, dafs $x' = \frac{x_1}{x_3}$, $y' = \frac{x_2}{x_3}$, so verhalten sich dieselben wie die Abstände p_i des Punktes $x|y$ von den Seiten, multiplicirt mit gewissen Constanten r_i, nämlich mit $\sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ (§ 62). Also gelten die Relationen

Setzt man

$$\xi' = \frac{A_1\xi + A_2\eta + A_3}{C_1\xi + C_2\eta + C_3}$$
$$\eta' = \frac{B_1\xi + B_2\eta + B_3}{C_1\xi + C_2\eta + C_3},$$

so sind ξ', η' die Parameter von Punktreihen, die durch die dritte Ecke mit den beiden andern bestimmt werden. Wählen wir also drei Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 so, dafs $\xi' = \frac{\xi_1}{\xi_3}$, $\eta' = \frac{\xi_2}{\xi_3}$, so verhalten sich dieselben wie die Abstände π_i der Geraden $\xi\,|\,\eta$ von den Ecken, multiplicirt mit gewissen Constanten ϱ_i, nämlich mit $\sqrt{A_i^2 + B_i^2}$ (§ 77). Also gelten die Relationen

$$\mu x_1 = a_1 x + a_2 y + a_3$$
$$\mu x_2 = b_1 x + b_2 y + b_3$$
$$\mu x_3 = c_1 x + c_2 y + c_3$$

und umgekehrt folgen durch Auflösung dieser Gleichungen nach x, y, μ

$$x = \frac{A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3}{A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3}$$
$$y = \frac{A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3}{A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3}$$

(„Vorlesungen" Art. 29).

Man sieht daraus, dafs

$$C_3 x_1 + C_3 x_2 + C_3 x_3 = 0$$

die unendlich ferne Gerade der Ebene ist.

$$\nu \xi_1 = A_1 \xi + A_2 \eta + A_3$$
$$\nu \xi_2 = B_1 \xi + B_2 \eta + B_3$$
$$\nu \xi_3 = C_1 \xi + C_2 \eta + C_3$$

und umgekehrt folgen durch Auflösung dieser Gleichungen nach ξ, η, ν

$$\xi = \frac{a_1 \xi_1 + b_1 \xi_2 + c_1 \xi_3}{a_3 \xi_1 + b_3 \xi_2 + c_3 \xi_3}$$
$$\eta = \frac{a_2 \xi_1 + b_2 \xi_2 + c_2 \xi_3}{a_3 \xi_1 + b_3 \xi_2 + c_3 \xi_3}$$

(vgl. oben die Bemerkung über $\triangle$).

Man sieht daraus, dafs

$$a_3 \xi_1 + b_3 \xi_2 + c_3 \xi_3 = 0$$

die Gleichung des Nullpunkts darstellt.

In Übereinstimmung mit der früheren Definition gebrauchen wir die Bezeichnung als trimetrische oder Dreieckscoordinaten vorzugsweise für die Fälle, dafs die Constanten r_i unter einander gleich sind und ebenso die ϱ_i, dafs also die linearen Functionen in der Normalform gedacht werden. Für den allgemeinsten Fall werden wir eine andere Bezeichnung einführen (§ 84).

Die Ausdrücke für $x|y$, bez. $\xi|\eta$ zeigen, dafs durch die Substitution derselben eine vollständige Gleichung n^{ten} Grades in Cartesischen, bez. Plücker'schen Coordinaten in eine homogene Gleichung n^{ten} Grades in $x_1|x_2|x_3$, bez. $\xi_1|\xi_2|\xi_3$ übergeht. In formaler Hinsicht bemerken wir, dafs die Darstellungen der x_i und von ξ, η je dieselben Coefficienten enthalten wie die der ξ_i und von x, y, aber in der Weise, dafs sie in der ersten Gruppe von Relationen nach den Buchstaben, in der zweiten nach den Indices geordnet erscheinen. Übrigens läfst sich die Gleichung vereinigter Lage $\xi x + \eta y + 1 = 0$ dazu benutzen, um aus den Substitutionen in Punktcoordinaten die in Liniencoordinaten abzuleiten, indem man sie durch die ersteren umformt und dann neu ordnet (vgl. § 75 Beisp.).

79. Die vorigen Entwickelungen begründen das wichtige *Princip der Dualität* (*Correlation*)[8]. Die analytische Geometrie entwickelt geometrische Sätze durch analytische Operationen; diese Sätze sind die geometrischen Auslegungen oder Bedeutungen ihrer Rechnungsresultate. Nach der vollständigen Analogie der beiden hier begründeten Coordinatensysteme wird überall bei Anwendung der homogenen Gleichungen jede analytische Untersuchung *mit einem Rechnungsresultat wesentlich zwei geometrische Sätze* liefern: *der eine ist die Interpretation dieses Ergebnisses nach dem System der Punktcoordinaten, der andere die Interpretation desselben Ergebnisses nach dem System der Liniencoordinaten.*

Wo in dem einen Satze Punkte und Gerade, Curven n^{ter} Ordnung oder Classe, Punktreihen oder Strahlbüschel, etc. auftreten, da werden im andern bez. Gerade und Punkte, Curven n^{ter} Classe oder Ordnung, Strahlbüschel oder Punktreihen, etc. erscheinen. *Jedem Satze, jedem Problem, jeder Figur entspricht so im allgemeinen ein dualistisches* (*duales, correlatives*) *Gegenbild*, und die analytische Arbeit ist für beide nur einmal zu leisten. Geometrisch gesprochen heifst dies: *die Geometrie der Ebene kann ebensowol auf die Gerade, wie auf den Punkt als Element des Raumes gegründet werden;* die Ebene ist als Gesammtheit ihrer Punkte oder Geraden ein zwei-dimensionales Gebilde (§. 18), da beide Elemente Repräsentanten je zweier unabhängiger Variabeln sind.

Beispiele für dualistische geometrische Wahrheiten sind in dem bisherigen schon zahlreich enthalten und werden im folgenden in grofser Zahl auftreten. Unmittelbar und rein prägt sich der duale Charakter in den Sätzen aus, die sich nur auf die vorgenannten *descriptiven* (*projectivischen*) *Eigenschaften* beziehen, d. h. auf solche, die daraus entspringen, dafs gewisse Punkte und gewisse Strahlen in einander liegen. Der eine folgt aus dem andern, wenn man die Ausdrücke „Verbindungsgerade zweier Punkte“ und „Schnittpunkt zweier Geraden“ mit einander vertauscht (§ 75). Sobald dagegen *metrische Eigenschaften* auftreten, d. h. Längen und Winkel dafür zu messen sind, so sind die dualen Aussprüche nicht

mehr so einfach und enthalten in der Regel Beziehungen der Figur zu den Fundamentalelementen der Coordinaten. Legen wir in diesen Fällen nicht-homogene Coordinaten zu Grunde, so ergibt sich als Grund jenes Umstandes, dafs *für die unendlich ferne Gerade* (0 | 0) *dualistisch der Nullpunkt* eintritt. Setzen wir die Axen rechtwinklig voraus, so entsprechen zwei Geraden, die einen Winkel von bestimmtem Cosinus einschliefsen, dualistisch zwei Punkte, die vom Nullpunkt aus unter einem Winkel von demselben Cosinuswert gesehen werden; denn die Ausdrücke für $\cos \varphi$ in § 31 und § 8 sind bis auf die Schreibung der Variabeln identisch. Indessen werden wir auf Grund der Entwickelungen im nächsten Kapitel später auch in diesen Beziehungen die Allgemeingültigkeit des Dualitätsprincips erkennen.

/

* Fünftes Kapitel.

Von der Projectivität und den collinearen Gebilden.

---

80. **Der Hauptbegriff der neueren Geometrie ist das Doppelverhältnis von vier Elementen.** Sind vier Punkte A, B, C, D einer geraden Reihe gegeben und bestimmt man zu zweien C, D die Teilverhältnisse k_1, k_2 in Bezug auf das Paar A, B der beiden andern, so nennt man nach *Möbius* den Quotienten

$$\lambda = \frac{k_1}{k_2} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

das Doppelverhältnis λ der vier Punkte[9]). Denkt man hiebei A bez. C, B bez. D als den ersten und zweiten Punkt des ersten bez. zweiten Paares, so bezeichnet man dieses Doppelverhältnis kurz durch das Symbol

$$(ABCD) = (AC : BC) : (AD : BD) = \lambda.$$

Der Wert λ hängt offenbar von der Anordnung der vier Punkte ab, doch so, dafs eine Vertauschung der Paare oder der beiden Punkte in den Paaren denselben nicht ändert, denn die Definition des Symbols ergibt die Gleichheiten

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA).$$

Dagegen verwandelt die Vertauschung der Punkte nur eines Paares den Doppelverhältniswert in seinen reciproken

$$(ABDC) = (DCAB) = \text{etc.} = \frac{1}{\lambda}.$$

Endlich kann man die vier Punkte noch auf drei Weisen

in Paare ordnen; zwischen vier Punkten einer Geraden besteht aber auch die Streckenrelation*)

$$AB . CD + AC . DB + AD . BC = 0, \quad \text{woraus}$$
$$1 = (ACBD) + (ABCD) = (ADBC) + (ABDC),$$

also $\quad (ACBD) = 1 - \lambda, \quad (ADBC) = 1 - \frac{1}{\lambda}.$

Somit bestimmen *vier Punkte sechs verschiedene Doppelverhältniswerte; durch einen derselben* λ *sind jedoch die übrigen mitbestimmt als*

$$\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad 1 - \lambda, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Deswegen dürfen wir schlechthin von dem Doppelverhältnis der vier Punkte sprechen.

Sind drei Punkte A, B, C fest gewählt, so definirt nicht nur jeder vierte Punkt D der Geraden einen Wert des Doppelverhältnisses $(ABCD) = \lambda$, sondern er ist auch umgekehrt durch denselben eindeutig fixirt, da dann

$$BD : DA = \lambda . (BC : CA) \qquad (\S\ 13).$$

Das Doppelverhältnis des Punktes D *bezüglich der drei Punkte* A, B, C *ist also gleich dem Teilverhältnis desselben bezüglich zweier* B, A, *multiplicirt mit einer durch* C *bestimmten Constanten.*

Also durchläuft D die ganze Gerade, wenn λ der Reihe nach alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt. Negativ ist der Doppelverhältniswert nur, wenn C und D durch einen der Punkte A oder B getrennt werden. Für $\lambda = \infty, 0, 1$ fällt D bez. mit A, B, C zusammen. *Der specielle Doppelverhältniswert* $(ABCD) = -1$ *definirt die harmonische Lage der Paare* AB, CD; denn er führt zu $AC : CB = -AD : DB$, dem Kriterium des § 14. Daher heifst der allgemeine Wert λ auch *das anharmonische Verhältnis von vier Punkten*[10]).

Das Doppelverhältnis von vier Punkten reducirt sich auf ein einfaches Teilverhältnis, wenn ein Punkt des zweiten der Mittelpunkt M des ersten Paares oder der unendlich ferne Punkt der Geraden ist

---

*) Beweis durch die Identitäten des § 4 nach Einsetzung von $AD = AB + BD, \; BC = BD + DC.$

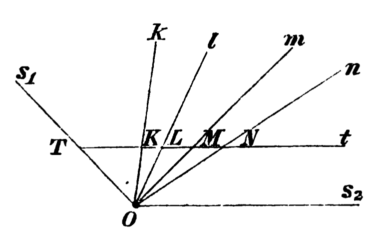
$$(ABCM) = \frac{AC}{CB}, \quad (ABC\infty)\frac{AC}{BC}.$$

Insbesondere kann auch *die Mafszahl einer Strecke als ein Doppelverhältniswert* definirt werden; ist nämlich $OE = 1$, so ist

$$OA = (\infty\, OEA).$$

Nach der Einführung imaginärer Punkte und Teilverhältnisse haben wir auch complexe Werte des Doppelverhältnisses in Betracht zu ziehen. So ist von Bedeutung der Fall, wo λ eine complexe Cubikwurzel aus der negativen Einheit ist; vier Punkte mit $\lambda = \cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}$, — die nicht sämmtlich reell sein können — werden *äquianharmonisch* genannt, weil alsdann die Werte λ, $\frac{1}{1-\lambda}$, $1 - \frac{1}{\lambda}$ unter einander gleich werden.

81. Die grofse Wichtigkeit des Doppelverhältnisses beruht auf dem *Satze des Pappus*[11]: *Wenn vier Gerade* a, b, c, d *eines Büschels* O *von einer beliebigen geraden Transversalen* t *in den Punkten* A, B, C, D *geschnitten werden, so ist das Doppelverhältnis* $(ABCD)$ *der Reihe der vier Schnittpunkte unabhängig von der Lage der Transversale, also constant.*



Man beweist denselben, indem man den senkrechten Abstand p des Scheitels O von der Transversale t einführt und bemerkt, dafs die Flächen der Dreiecke AOC, BOD, AOD, BOC die Gleichungen liefern

$$p \,.\, AC = OA \,.\, OC \,.\, \sin ac, \quad p \,.\, BD = OB \,.\, OD \,.\, \sin bd,$$
$$p \,.\, AD = OA \,.\, OD \,.\, \sin ad, \quad p \,.\, BC = OB \,.\, OC \,.\, \sin bc.$$

Denn aus diesen entspringen durch Multiplication

$$p^2 \,.\, AC \,.\, BD = OA \,.\, OB \,.\, OC \,.\, OD \,.\, \sin ac \,.\, \sin bd,$$
$$p^2 \,.\, AD \,.\, BC = OA \,.\, OB \,.\, OC \,.\, OD \,.\, \sin ad \,.\, \sin bc,$$

und als Quotient dieser letzteren

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd},$$

wo die rechte Seite von der Lage von t unabhängig ist.

Den Quotienten der Sinusteilverhältnisse werden wir aber, da diese im Büschel überhaupt an die Stelle der Teilverhältnisse in der Reihe treten (vgl. § 25), als *das Doppelverhältnis der vier Strahlen a, b, c, d des Büschels O* und mit dem früheren Symbol bezeichnen

$$(abcd) = (\sin ac : \sin bc) : (\sin ad : \sin bd).$$

Je vier Punkte, in denen eine beliebige Gerade vier Strahlen eines Büschels schneidet, haben dasselbe Doppelverhältnis wie diese Strahlen)*; und nach demselben Beweis: *Je vier Strahlen, die einen beliebigen Punkt mit vier Punkten einer Reihe verbinden, haben dasselbe Doppelverhältnis wie diese Punkte.* Bezeichnen wir das Doppelverhältnis eines über der Reihe A, B, C, D stehenden Büschels aus O mit $(O \,.\, ABCD)$ und das einer durch t aus dem Büschel a, b, c, d geschnittenen Reihe mit $(t \,.\, abcd)$, so sind die obigen Sätze auszudrücken durch

$$(abcd) = (t \,.\, abcd), \quad (ABCD) = (O \,.\, ABCD).$$

Infolgedessen gelten die Sätze des vorigen Paragraphen über das Symbol $(ABCD)$ auch von $(abcd)$, nur ist zu den Specialisirungen statt des unendlich fernen Punktes der rechte Winkel einzuführen. Unter der Voraussetzung

$$\sphericalangle(ab) = (xy) = \frac{\pi}{2}$$

geht das Doppelverhältnis über in *das einfache Tangentenverhältnis*

$$(xycd) = \frac{\tan xc}{\tan xd} = \frac{\cot yc}{\cot yd},$$

und ist d die Halbirungslinie h des rechten Winkels, für die $\tan xh = 1$, so ist die Winkelmessung zu gründen auf

$$(xych) = \tan xc = \cot yc.$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes dieses Paragraphen kann man zu drei Punkten A, B, C einer Reihe bez. zu drei Strahlen a, b, c eines Büschels den Punkt D oder den Strahl d bestimmen, der mit ihm ein gegebenes Doppelverhältnis λ bildet. Schneidet man das gegebene oder über der Reihe

---

*) Für harmonische Gruppen ist dieser Satz schon § 57 abgeleitet.

ABC gebildete Büschel abc durch eine Parallele zu c in A, B', ∞, so ist D' als Schnittpunkt mit d, wegen

$$\lambda = (abcd) = (A'B' \infty D') = B'D' : A'D'$$

durch sein Teilverhältnis $-\lambda$ in $B'A'$ gegeben.

82. Die analytische Entwickelung des Vorstehenden legt zweckmäfsig folgende Überlegung zu Grunde. Bestimmen $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ das Büschel der Strahlen $S_1 - kS_2 = 0$ und ist $T = 0$ eine Transversale, so suchen wir die Gleichung des Schnittpunktes derselben mit dem beweglichen Strahl (§ 75). Wir erhalten sie, indem wir $x \mid y$ eliminiren aus den drei linearen Gleichungen

$$S_1 - kS_2 = 0, \quad T = 0, \quad x\xi + y\eta + 1 = 0,$$

da diese für den Schnittpunkt $x \mid y$ gleichzeitig gelten. Das Eliminationsresultat ist nun in den Coefficienten jeder Gleichung bekanntlich linear („Vorlesungen“ Art. 86 — vgl. p. 149 unten), also auch in $\xi \mid \eta$ sowol als in k. Bezeichnen wir die Resultate derselben Elimination zwischen $S_1 = 0$, bez. $S_2 = 0$ und $T = 0$, $x\xi + y\eta + 1 = 0$ mit $\Sigma_1 = 0$ bez. $\Sigma_2 = 0$, so sind dies die Gleichungen der Schnittpunkte von $T = 0$ mit den festen Strahlen $S_1 = 0$ bez. $S_2 = 0$. Also ist die Gleichung des beweglichen Schnittpunktes in der Form darstellbar

$$\Sigma_1 - k\Sigma_2 = 0.$$

Liegen also $S_1 = 0$ und $\Sigma_1 = 0$, $S_2 = 0$ und $\Sigma_2 = 0$ in einander, so sind auch je der das Büschel beschreibende Strahl $S_1 - kS_2 = 0$ und der die Reihe durchlaufende Punkt $\Sigma_1 - k\Sigma_2 = 0$ bei gleichem Parameterwert k vereinigt. Nun ist der Parameter sowol zu dem Verhältnis der Abstände des Teilpunktes von den festen Strahlen als zu seinem Teilverhältnis in der Reihe proportional und zwar ist der Quotient der Proportionalitätsfactoren gleich dem der Sinus der Neigungswinkel von $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ gegen $T = 0$. Die Teilverhältnisse in der Reihe und im Büschel sind somit nur gleich, wenn die Transversale einer Halbirungslinie des Winkels $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ parallel ist. Dagegen fallen die Proportionalitätsfactoren auch bei beliebiger Lage der Trans-

versalen weg, wenn wir den Quotienten zweier Teilverhältnisse bilden, d. h. *das Doppelverhältnis* λ *der Strahlen* $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_1 - k_1 S_2 = 0$, $S_1 - k_2 S_2 = 0$ *und der Punkte* $\Sigma_1 = 0$, $\Sigma_2 = 0$, $\Sigma_1 - k_1 \Sigma_2 = 0$, $\Sigma_1 - k_2 \Sigma_2 = 0$ *ist identisch und zwar gleich* $k_1 : k_2$.

Somit ist *das Doppelverhältnis* λ *von vier Elementen eines Büschels oder einer Reihe nur abhängig von den Parametern* k_1, k_2, k_3, k_4 *derselben in Bezug auf zwei beliebige Elemente, nämlich als*

$$\lambda = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4}.$$

Denn, sind (Fig. § 80) k, l, m, n vier auf s_1, s_2 bezogene Strahlen und nehmen wir die Transversale t parallel zu s_2, so sind die Abstände von K, L, M, N von s_1 zu den Sinusteilverhältnissen, also auch zu den Werten k_1, k_2, k_3, k_4 des Parameters in $S_1 - kS_2 = 0$ proportional; wie aber die Strecken TK, TL, TM, TN ihrerseits jenen Abständen, so sind auch KM, LM, KN, LN bez. zu $k_1 - k_3$, $k_2 - k_3$, $k_1 - k_4$, $k_2 - k_4$ proportional. Dasselbe gilt dual auch für vier Punkte $\Sigma_1 - \varkappa \Sigma_2 = 0$ oder $\frac{x' - \varkappa x''}{1 - \varkappa} \Big| \frac{y' - \varkappa y''}{1 - \varkappa}$, doch können die Parameter derselben unmittelbar auch durch ihre Abscissen ersetzt werden

$$(KLMN) = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}.$$

Man nennt diesen Quotienten der Differenzen aus den Zahlen zweier Paare geradezu das *Doppelverhältnis der vier Zahlen.* Er gibt die analytische Bestimmung der vierten Zahl zu drei gegebenen und bekanntem Doppelverhältniswert λ.

83. **Projectivische Büschel und Reihen.** Schneidet man ein Strahlbüschel $a, b, c, d, \ldots$ vom Scheitel O mit Transversalen t und t' in $A, B, C, D, \ldots$ und $A', B', C', D', \ldots$ so heifsen *diese Punktreihen perspectivisch für das Centrum* O. Jede ist die Centralprojection der andern aus O und P, P' sind *entsprechende Punkte* der Reihen, wenn ihre Verbindungsgerade PP' durch das Centrum O geht. Die dualistischen Begriffsbildungen lauten: Projicirt man eine Punktreihe $A, B, C, D, \ldots$ vom Träger t durch Strahlen $a, b, c, d, \ldots$ und $a', b', c', d', \ldots$ aus den Punkten O und O', so heifsen

diese Strahlbüschel perspectivisch für die Axe t und p, p' sind *entsprechende Strahlen* derselben, wenn ihr Schnittpunkt pp' auf der Axe t liegt*). Endlich heifsen in beiden Fällen auch das Büschel $a, b, c, d, \ldots$ und die Reihe $A, B, C, D, \ldots$ perspectivisch. Nun folgt aus § 81 ferner

$$(t\,.\,abcd) = (t'\,.\,abcd), \quad (O\,.\,ABCD) = (O'\,.\,ABCD),$$

d. h. *in perspectivischen Reihen und Büscheln haben je vier entsprechende Elemente dasselbe Doppelverhältnis.*

Daher haben auch noch in drei Reihen (bez. Büscheln) $A, B, C, D, \ldots$; $A', B', C', D', \ldots$; $A'', B'', C'', D'', \ldots$, von denen zwei zur dritten Reihe (bez. zum dritten Büschel) zugleich perspectivisch sind, je vier entsprechende Elemente dasselbe Doppelverhältnis,

$$(ABCD) = (A''B''C''D'') = (A'B'C'D'),$$

obwol die ersten beiden im allgemeinen nicht auch zu einander perspectivisch sind. Umgekehrt können wir aber, wenn in zwei Reihen oder Büscheln drei Paare von Elementen A, B, C und A', B', C' einander entsprechen, zu jedem Element D des einen Gebildes ein einziges entsprechendes D' des andern so finden, dafs die Doppelverhältnisse $(ABCD) = (A'B'C'D')$ gleich sind. *Reihen bez. Büschel, deren Elemente einander eindeutig so zugeordnet sind, dafs das Doppelverhältnis von je vier entsprechenden gleich ist, heifsen projectivische Gebilde.* Man nennt projectivische Reihen, bez. Büschel auch *collinear* (*homographisch*) und entsprechende Elemente *homolog.* In projectivischen Gebilden sind nach der Definition die homologen zu vier harmonischen Elementen ebenfalls in harmonischer Lage, doch die Halbirung einer Strecke oder eines Winkels geht in die allgemeinere harmonische Teilung über.

Die Definition zeigt, *dafs projectivische Gebilde durch drei Paare homologer Elemente eindeutig bestimmt sind. Daher sind projectivische Gebilde insbesondere perspectivisch, sobald ihr gemeinsames Element mit sich selbst homolog oder ihnen entsprechend gemein ist.* Denn

*) Solche perspectivische Gebilde liegen schon in §§ 47. 48. 64 vor.

entspricht in zwei Reihen $A, B, C, \ldots, A, B', C', \ldots$ der Schnittpunkt A ihrer Träger sich selbst, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der Paare BB', CC' in O so, dafs wegen

$$(O\,.\,ABCD) = (O\,.\,ABCD')$$

auch DD' durch O geht.

entspricht in zwei Büscheln $a, b, c, \ldots, a, b', c', \ldots$ die Verbindungsgerade a ihrer Scheitel sich selbst, so werden die Schnittpunkte zweier Strahlenpaare bb', cc' in t so verbunden, dafs wegen

$$(t\,.\,abcd) = (t\,.\,abcd')$$

auch dd' auf t liegt.

Somit können zwei projectivische Gebilde stets durch blofse Lagenänderung des einen zu einander perspectivisch gemacht werden, denn dazu ist nur ein Element mit seinem homologen zur Deckung zu bringen.

Der analytische Ausdruck für projectivische Gebilde gestaltet sich sehr einfach. *Da die Doppelverhältnisgleichheit nur eine Relation zwischen den Parametern sein kann* (§ 82), *so sind die Büschel* $S_1 - kS_2 = 0$, $S_1' - kS_2' = 0$ *und die Reihen* $\Sigma_1 - k\Sigma_2 = 0$, $\Sigma_1' - k\Sigma_2' = 0$ *projectivisch, wenn homologe Elemente zu demselben Parameterwert gehören.* Dabei ist also gleichgültig, wie die Träger und die festen Elementenpaare gewählt wurden, doch sind alsdann letztere offenbar in den Paaren S_1, S_1'; S_2, S_2'; Σ_1, Σ_2; Σ_1', Σ_2' selbst homolog. Insbesondere können perspectivische Gebilde, wenn ihr entsprechend gemeinsames Element $S = 0$ bez. $\Sigma = 0$ ist, stets durch die Gleichungspaare $S_1 - kS = 0$, $S_1' - kS = 0$, bez. $\Sigma_1 - k\Sigma = 0$, $\Sigma_1' - k\Sigma = 0$ dargestellt werden. Alsdann ist offenbar $S_1 - S_1' = 0$ die perspectivische Axe, bez. $\Sigma_1 - \Sigma_1' = 0$ das perspectivische Centrum. Selbstverständlich sind auch das Büschel $S_1 - kS_2 = 0$ und die Reihe $\Sigma_1 - k\Sigma_2 = 0$ durch die Parametergleichheit projectivisch auf einander bezogen (vgl. § 82).

Schliefslich sei bemerkt, dafs diese Zuordnung durch gleiche Parameter in Bezug auf zwei feste Elementenpaare in der Tat die Angabe eines dritten implicite voraussetzt. Denn S_1, S_2, S_1', S_2' sind nur bis auf constante Factoren bekannt und erst, wenn noch $S_3 = 0$, $S_3' = 0$ homologe Elemente sein sollen, werden jene Factoren durch die

gleichzeitigen Identitäten $S_3 = S_1 - kS_2$, $S_3' = S_1' - kS_2'$ bestimmt.

84. **Projectivische Coordinaten.** In der geraden Reihe und im Strahlbüschel können wir jedes Element durch sein Doppelverhältnis in Bezug auf drei feste Elemente bestimmen. Offenbar genügt eine zweimalige Anwendung dieses neuen Coordinatenprincips, um einen Punkt P zu bestimmen als Schnittpunkt der zu gegebenen Doppelverhältniswerten gehörigen vierten Strahlen in zwei Büscheln, und eine Gerade p als Verbindungslinie in gleicher Weise bestimmter vierten Punkte in zwei Reihen. Wir können so völlig allgemeine und rein dualistische Systeme homogener Coordinaten x_i und ξ_i direct geometrisch begründen, die wir *Doppelverhältniscoordinaten* oder, wegen der grundlegenden Bedeutung des Doppelverhältnisses für die Projectivität, *projectivische Coordinaten* nennen[12]).

Nehmen wir vier feste Punkte A_1, A_2, A_3, E an, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so bestimmen die Verbindungsgeraden jedes Punktes A_i mit den drei übrigen und einem beliebigen Punkt P Büschel mit drei festen Strahlen. Also sind die Strahlen A_1P, A_2P, A_3P, und damit P als ihr Schnittpunkt, durch die Doppelverhältnisse bestimmt

$$(A_1 \,.\, A_2A_3EP) = m_1,$$
$$(A_2 \,.\, A_3A_1EP) = m_2,$$
$$(A_3 \,.\, A_1A_2EP) = m_3.$$

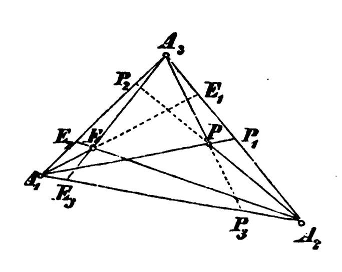
Bezeichnen wir durch e_i und p_i die Abstände der Punkte E und P von den Geraden A_jA_k, gemessen in den Nor-

Nehmen wir vier feste Gerade a_1, a_2, a_3, e an, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, so bestimmen die Schnittpunkte jeder Geraden a_i mit den drei übrigen und einer beliebigen Geraden p Reihen mit drei festen Punkten. Also sind die Punkte a_1p, a_2p, a_3p, und damit p als ihre Verbindungsgerade durch die Doppelverhältnisse bestimmt

$$(a_1 \,.\, a_2a_3ep) = \mu_1,$$
$$(a_2 \,.\, a_3a_1ep) = \mu_2,$$
$$(a_3 \,.\, a_1a_2ep) = \mu_3.$$

Bezeichnen wir durch ε_i und π_i die Abstände der Geraden e und p von den Punkten a_ja_k, gemessen in den Nor-

malen oder in Schiefen gleicher Neigung, so sind die Werte der Doppelverhältnisse



$$m_1 = \frac{e_3}{e_2} : \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_2 : e_2}{p_3 : e_3},$$

$$m_2 = \frac{e_1}{e_3} : \frac{p_1}{p_3} = \frac{p_3 : e_3}{p_1 : e_1},$$

$$m_3 = \frac{e_2}{e_1} : \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 : e_1}{p_2 : e_2}$$

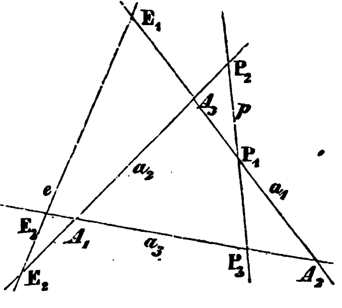
und wir sehen, dafs $m_1 m_2 m_3 = 1$. Definiren wir dann als Coordinaten

$$x_i = p_i : e_i,$$

so sind x_1, x_2, x_3 drei algebraische Zahlen, deren Verhältnisse $x_j : x_k = m_i$ jene Doppelverhältnisse bestimmen und so zu den festen Punkten den Punkt P zu construiren erlauben (§ 81).

Fällt P nach E, so hat man $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, d. h. *die Coordinaten x_i sind die Abstände p_i, durch die parallelen Abstände e_i als Einheiten gemessen.* Daher bezeichnen wir *E als den Einheitpunkt, die A_i aber als die Fundamentalpunkte*

malen oder in Schiefen gleicher Neigung, so sind die Werte der Doppelverhältnisse



$$\mu_1 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} : \frac{\pi_3}{\pi_2} = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_3 : \varepsilon_3},$$

$$\mu_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} : \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_1 : \varepsilon_1},$$

$$\mu_3 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2}$$

und wir sehen, dafs $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1$. Definiren wir dann als Coordinaten

$$\xi_i = \pi_i : \varepsilon_i,$$

so sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 drei algebraische Zahlen, deren Verhältnisse $\xi_j : \xi_k = \mu_i$ jene Doppelverhältnisse bestimmen und so zu den festen Geraden die Gerade p zu construiren erlauben (§ 81).

Fällt p nach e, so hat man $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1$, d. h. *die Coordinaten ξ_i sind die Abstände π_i, durch die parallelen Abstände ε_i als Einheiten gemessen.* Daher bezeichnen wir *e als die Einheitlinie, die a_i aber als die Fundamentallinien*

des projectivischen Coordinatensystems der x_i. Für die Punkte der Geraden $A_j A_k$ ist die Coordinate x_i Null und A_i hat die Coordinaten

$$x_i = h_i : e_i, \quad x_j = x_k = 0,$$

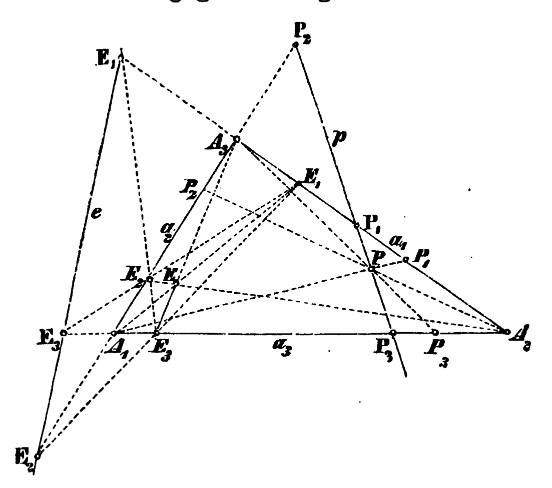
wenn h_i die Höhen im Fundamentaldreieck bedeuten.

des projectivischen Coordinatensystems der ξ_i. Für die Geraden durch den Punkt $a_j a_k$ ist die Coordinate ξ_i Null und a_i hat die Coordinaten

$$\xi_i = h_i : \varepsilon_i, \quad \xi_j = \xi_k = 0,$$

wenn h_i die Höhen im Fundamentaldreiseit bedeuten.

Nun vereinigen wir das Dreieck der Fundamentalpunkte mit dem Dreiseit der Fundamentallinien derart, dafs der Ecke A_i die Seite a_i gegenüberliegt. Seien dann E_i und P_i



die Schnittpunkte von a_i mit $A_i E$ und $A_i P$, ferner E_i und P_i die Schnittpunkte $a_i e$ und $a_i p$. Dann lauten (§ 81) *die Coordinatendefinitionen auch*

$$\frac{x_2}{x_3} = (A_2 A_3 E_1 P_1), \quad \frac{x_3}{x_1} = (A_3 A_1 E_2 P_2), \quad \frac{x_1}{x_2} = (A_1 A_2 E_3 P_3);$$

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} = (A_3 A_2 \mathsf{E}_1 \mathsf{P}_1), \quad \frac{\xi_3}{\xi_1} = (A_1 A_3 \mathsf{E}_2 \mathsf{P}_2), \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = (A_2 A_1 \mathsf{E}_3 \mathsf{P}_3).$$

Zur Bestimmung der Lage von E gegen e können wir aber offenbar setzen

$$-\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = (A_2 A_3 \mathsf{E}_1 E_1), \quad -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = (A_3 A_1 \mathsf{E}_2 E_2), \quad -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (A_2 A_2 \mathsf{E}_3 E_3),$$

denn die Teilverhältnisse der E_i, bez. der E_i in den Seiten haben (§ 51) das Product $+1$, bez. -1, so dafs das Product der drei Doppelverhältnisse -1 sein mufs.

Die Multiplication der untereinander stehenden Ausdrücke gibt wegen

$$(A_j A_k E_i P_i)(A_j A_k \mathsf{E}_i E_i) = (A_j A_k \mathsf{E}_i \mathsf{P}_i)(A_j A_k \mathsf{P}_i P_i)$$

$$-\frac{\lambda_2 \xi_2 x_2}{\lambda_3 \xi_3 x_3} = (A_2 A_3 \mathsf{P}_1 P_1), \qquad -\frac{\lambda_3 \xi_3 x_3}{\lambda_1 \xi_1 x_1} = (A_3 A_1 \mathsf{P}_2 P_2),$$

$$-\frac{\lambda_1 \xi_1 x_1}{\lambda_2 \xi_2 x_2} = (A_1 A_2 \mathsf{P}_3 P_3).$$

Wir betrachten weiter das Paar — eines von drei analogen —

$$-\frac{\lambda_2 \xi_2 x_2}{\lambda_3 \xi_3 x_3} = (A_2 A_3 \mathsf{P}_1 P_1), \qquad -\frac{\lambda_1 \xi_1 x_1}{\lambda_3 \xi_3 x_3} = (A_3 A_1 P_2 \mathsf{P}_2).$$

Unter der besonderen Voraussetzung, dafs P in p liegt, ist

$$(A_2 A_3 \mathsf{P}_1 P_1) + (A_3 A_1 P_2 \mathsf{P}_2) = 1.$$

Denn es ist (§ 81) $(A_3 A_1 P_2 \mathsf{P}_2) = (P . A_3 A_1 P_2 \mathsf{P}_2) = (P . A_3 P_1 A_2 \mathsf{P}_1)$, $(A_3 P_1 A_2 \mathsf{P}_1) = (A_2 \mathsf{P}_1 A_3 P_1)$ und nach einer Relation des § 80 ist

$$(A_2 A_3 \mathsf{P}_1 P_1) + (A_2 \mathsf{P}_1 A_3 P_1) = 1.$$

Liegt also P in p oder geht p durch P, so besteht zwischen den Coordinaten x_i von P und ξ_i von p *die Relation des Ineinanderliegens*

$$\lambda_1 \xi_1 x_1 + \lambda_2 \xi_2 x_2 + \lambda_3 \xi_3 x_3 = 0,$$

wo die Constanten λ_i nur von der Lage des Einheitpunktes und der Einheitlinie abhängig sind. Dieselben werden insbesondere gleich Eins, wenn e die Harmonikale von E in Bezug auf das Fundamentaldreieck ist (§ 64. 1)); diese Wahl soll weiterhin stets vorausgesetzt sein. *Dann ist*

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

für constante ξ_i die Gleichung der Geraden von den Coordinaten ξ_i in Punktcoordinaten, und für constante x_i die Gleichung des Punktes von den Coordinaten x_i in Liniencoordinaten.

85. Diese auf den Begriff des Doppelverhältnisses gestützte Auffassung der allgemeinen homogenen Coordinaten-

bestimmung ist ihrem Ergebnis nach von der des § 78 nicht verschieden. Offenbar stimmen die x_i bez. ξ_i hier und dort überein, sobald wir die Reciproken der Abstände e_i bez. ε_i als die in jener Entwickelung auftretenden Constanten r_i bez. ϱ_i ansehen, mit denen die Abstände p_i bez. π_i zu multipliciren waren.

Das durch das Fundamentaldreieck und die Einheitelemente definirte Coordinatensystem umfaſst eine groſse Anzahl specieller Ausprägungen. Lassen wir das Dreieck der A_i allgemein, so können wir als E einen der besonderen Punkte desselben wählen und dadurch oft Vereinfachungen der Untersuchung erzielen. So erhalten wir nach der obigen Bemerkung die *Dreiliniencoordinaten* des § 66, d. h. die x_i gleich den Abständen des Punktes von den Fundamentallinien a_i, sobald wir die e_i einander gleich annehmen, also *zum Einheitpunkt den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises* wählen. Jedoch sind dann nicht auch ohne weiteres die ξ_i die *Dreipunktcoordinaten* des § 77, wenn die Gleichung

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

gelten soll. Dazu müssen vielmehr die ε_i gleich groſs sein und dies kann nur eintreten, wenn *die unendlich ferne Gerade die Einheitlinie e* ist; in der Tat sind dann die Verhältnisse der ξ_i gleich denen der Abstände π_i der Geraden von den Fundamentalpunkten A_i.

Die unendlich ferne Gerade gehört als Harmonikale zum *Schwerpunkt des Fundamentaldreiecks als Einheitpunkt.* Dann sind die $e_i = \frac{1}{3} h_i$ und die x_i können als Proportionalzahlen zu den Flächenzahlen der Dreiecke $A_j A_k P$ aufgefaſst werden; denn es ist, wegen

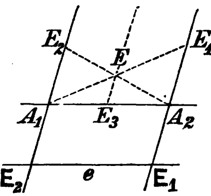
$$x_i = p_i : \frac{1}{3} h_i = \triangle A_j A_k P : \frac{1}{3} \triangle A_1 A_2 A_3,$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = \triangle A_2 A_3 P : \triangle A_3 A_1 P : \triangle A_1 A_2 P.$$

Also kann man diese Coordinaten, die öfter vorteilhaft zu verwenden sind, füglich als *Flächencoordinaten des Punktes* bezeichnen.

Grofse Bequemlichkeit bieten diese Specialisirungen, wenn *das Fundamentaldreieck gleichseitig* genommen wird. Für den Mittelpunkt desselben als Einheitpunkt E sind die x_i Dreilinien- und die ξ_i Dreipunktcoordinaten, während gleichzeitig die Gleichung des Ineinanderliegens $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ lautet. Denkt man drei Zahlen a_1, a_2, a_3 in allen sechs Permutationen als Coordinaten genommen, so bilden offenbar die sechs zugehörigen Punkte ein Kreissechseck, die sechs Geraden ein Kreissechsseit mit dem Mittelpunkt E und den drei Symmetrieaxen $A_i E$.

Die weiteren Specialisirungen von Wichtigkeit liefert *die Annahme unendlich ferner Fundamentalelemente.* Wird eine *Ecke* des Dreiecks, z. B. A_3, als unendlich fern gedacht, so erhält man die einfachen Teilverhältnisse



$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{A_1 E_2}{A_1 P_2}, \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{A_2 E_1}{A_2 P_1};$$
$$\frac{\xi_1}{\xi_3} = \frac{A_1 \mathsf{P}_2}{A_1 \mathsf{E}_2}, \quad \frac{\xi_2}{\xi_3} = \frac{A_2 \mathsf{P}_1}{A_2 \mathsf{E}_1}.$$

Ist ferner E äquidistant von den parallelen Fundamentallinien, somit e parallel zur dritten, so lauten, mit $A_1 E_2 = A_2 E_1 = -A_1 \mathsf{E}_2 = -A_2 \mathsf{E}_1 = 1$, die Definitionen der Coordinaten

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{A_1 P_2} = X, \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{1}{A_2 P_1} = Y,$$
$$\frac{\xi_1}{\xi_3} = -A_1 \mathsf{P}_2 = \Xi, \quad \frac{\xi_2}{\xi_3} = -A_2 \mathsf{P}_1 = \mathsf{H}.$$

Endlich liegen der Punkt $X \mid Y$ und die Gerade $\Xi \mid \mathsf{H}$ vereinigt, wenn

$$\Xi X + \mathsf{H} Y + 1 = 0.$$

Wir mögen diese nicht-homogenen Coordinaten etwa *Streifencoordinaten* nennen und in der speciellsten Form den Fundamentalstreifen rechtwinklig und auch $A_1 E_3 = E_3 A_2 = 1$ nehmen.

Denken wir aber eine *Seite* des Fundamentaldreiecks z. B. $A_1 A_2$ oder a_3, unendlich fern, so dafs PP_1, EE_1 und PP_2, EE_2 zu a_2, bez. a_1, parallel sind, so folgt für die Punktcoordinaten

$$\frac{x_1}{x_3} = (\infty\, A_3 E_2 P_2) = \frac{A_3 P_2}{A_3 E_2}, \quad \frac{x_2}{x_3} = (\infty\, A_3 E_1 P_1) = \frac{A_3 P_1}{A_3 E_1}.$$

Nehmen wir $A_3 E_1 = A_3 E_2 = 1$ als Längeneinheit, also E in einer Halbirungslinie des Winkels $a_1 a_2$, so sind $x_1 : x_3 = A_3 P_2 = x$, $x_2 : x_3 = A_3 P_1 = y$ Abscisse und Ordinate von P in einem System von Cartesischen Coordinaten (vgl. § 73). Und ist e die Harmonikale von E, also $A_3 \mathsf{E}_1 = A_3 \mathsf{E}_2 = -1$, so haben wir für die Liniencoordinaten

$$\frac{\xi_1}{\xi_3} = (A_3\, \infty\, \mathsf{E}_2 \mathsf{P}_2) = \frac{-1}{A_3 \mathsf{P}_2}, \quad \frac{\xi_2}{\xi_3} = (A_3\, \infty\, \mathsf{E}_1 \mathsf{P}_1) = \frac{-1}{A_3 \mathsf{P}_1}.$$

Somit hat man $\xi_1 : \xi_3 = \xi$, $\xi_2 : \xi_3 = \eta$ als die Plücker'schen Liniencoordinaten. Damit wird der Übergang von homogenen zu elementaren Coordinaten (§ 73) klar und ersichtlich, dafs die Wahl der Längeneinheit und des positiven Sinnes in den Axen die Bestimmung des Einheitpunktes und der Einheitgeraden elementar vertritt.

Man erkennt nun leicht, wie die Axencoordinaten und die Streifencoordinaten dualistisch entsprechende, metrische Specialfälle sind. Die letzteren sind übrigens, wenn man die Axen durch die beiden Parallelen ersetzt, einfach die Reciproken der Cartesischen und Plückerschen Coordinaten. Als gleichbedeutend mit den Doppelverhältniswerten des § 84 liefern uns die allgemeinen Definitionen $\frac{1}{x}$, y, $\frac{y}{x}$; $\frac{1}{\xi}$, η, $\frac{\eta}{\xi}$, bez. $\frac{1}{X}$, Y, $\frac{Y}{X}$; $\frac{1}{\Xi}$, H, $\frac{\mathsf{H}}{\Xi}$, womit z. B. das bedeutsame Auftreten der Richtungscoefficienten neben den Coordinaten erklärt ist.

B. 1) Wiederholt man die Untersuchungen des § 64 unter der Annahme von E in O, so sind $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ zu setzen.

2) Zieht man durch die Schnittpunkte der Fundamentallinien a_i mit e oder $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ Gerade a_i', so haben diese die Gleichungen

$$(1 + \lambda_1) x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + (1 + \lambda_2) x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + (1 + \lambda_3) x_3 = 0.$$

Somit sind die Gleichungen der Verbindungsgeraden $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$, $A_3 A_3'$ $\lambda_2 x_2 = \lambda_3 x_3$, $\lambda_3 x_3 = \lambda_1 x_1$, $\lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2$; also schneiden sie sich in dem Punkte $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{\lambda_1} : \frac{1}{\lambda_2} : \frac{1}{\lambda_3}$.

Je zwei Ecken A_i, A_i' bilden mit letzterem Scheitel und dem Schnittpunkt von A_iA_i' mit e das Doppelverhältnis $\frac{1}{1+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}}$. (Vgl. § 64. 4).)

3) Die Flächencoordinaten des Höhenschnittpunktes sind $\tan A_1 : \tan A_2 : \tan A_3$, des Mittelpunkts des umgeschriebenen $\sin 2A_1 : \sin 2A_2 : \sin 2A_3$, des eingeschriebenen Kreises $l_1 : l_2 : l_3$.

86. Das bisherige empfiehlt offenbar, als das zweckmäfsigste Bezeichnungsprincip für die in den analytisch-geometrischen Untersuchungen auftretenden Constanten und Variabeln, gleichartigen Gröfsen denselben Buchstaben als gemeinsames Symbol beizulegen und die einzelnen durch hinzugefügte Indices zu unterscheiden. Alsdann lassen sich homogene Ausdrücke allgemeiner Art, bezogen auf willkürlich gewählte Fundamentalelemente, schon durch ein einzelnes Glied völlig charakterisiren, da sie gewissen Symmetriegesetzen unterliegen (vgl. § 45). So gehen in Ausdrücken, die in Bezug auf jede Reihe gleichartiger Gröfsen linear sind, die Glieder auseinander durch cyclische Permutation aller Indices hervor (vgl. § 35 Anm.). Wir bezeichnen eine derartige dreigliedrige Summe dadurch, dafs wir Σ vor das allgemeine Glied derselben setzen. So ist $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ gleich Σa_ix_i, also $\Sigma a_ix_i = 0$ die allgemeine Gleichung einer Geraden; die der Verbindungsgeraden der Punkte x_i', x_i'' (§ 69) $\Sigma x_i(x_j'x_k'' - x_k'x_j'') = 0$, speciell des Schwerpunkts und des Höhenschnittpunkts (§ 69.1)) $\Sigma x_i \sin 2A_i \sin(A_j - A_k) = 0$ u. s. w. Ferner wird nach § 65 der Ausdruck für den Abstand des Punktes x_i' von der Geraden

$$\Sigma a_ix_i' : \sqrt{(\Sigma a_i^2 - 2\,\Sigma a_ja_k \cos A_i)};$$

die Bedingung der Orthogonalität zweier Geraden $\Sigma a_ix_i = 0$, $\Sigma a_i'x_i = 0$ $\Sigma a_ia_i' - \Sigma(a_ja_k' - a_ka_j')\cos A_i = 0$ und die ihres Parallelismus $\Sigma(a_ja_k' - a_ka_j')\sin A_i = 0$ etc.

Eine noch weiter gehende Abkürzungs-Symbolik für allgemeine lineare Functionen hat die neuere Algebra[13]) eingeführt. Danach setzen wir

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_x, \quad \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = \alpha_\xi$$

und schreiben also *die Gleichung einer Geraden von den Coordinaten* a_i $a_x = 0$, *die Gleichung eines Punktes von den Coordinaten* α_i $\alpha_\xi = 0$, die Gleichung vereinigter Lage von x_i und ξ_i sowol $\xi_x = 0$ als $x_\xi = 0$. Ein Punkt x_i' bez. y_i gehört der Geraden $a_x = 0$ an, wenn $a_{x'} = 0$ bez. $a_y = 0$. Zwei Gerade $a_x = 0$, $b_x = 0$ bestimmen das Büschel $a_x - kb_x = 0$ von dem Scheitel $C_\xi = 0$ (§ 78).

Dieses Princip führte weiter auch zu der *symbolischen Darstellung der homogenen Function* n^{ten} *Grades durch die* n^{te} *Potenz einer linearen Function* a_x^n. Vergleichen wir z. B. die allgemeinste homogene Function zweiten Grades mit a_x^2, so können wir die letztere an die Stelle jener setzen, wenn wir nur annehmen, die a_1, a_2, a_3 seien blofse Symbole von der Eigenschaft, dafs erst ihre Producte zu zweien wirkliche Zahlen bedeuten $a_i a_k = a_{ik} = a_{ki}$. Hiernach eignen sich für quadratische Functionen Coefficienten mit doppelten Indices a_{ik}, die mit den Indices der beiden Variabeln des Gliedes $x_i x_k$ übereinstimmen, so dafs a_x^2 gleich ist mit

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2.$$

Das wichtigste Mittel zur vollen Verwertung des Vorteils der Homogeneität und Symmetrie bei Benutzung der homogenen Coordinaten bietet aber *die Theorie der für das ganze Gebiet der homogenen Functionen fundamentalen Determinanten.* Wir verweisen für diese Lehre auf die „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen von G. Salmon. Deutsch bearb. von W. Fiedler“ (2. Aufl. Leipzig 1877) p. 1—66.

Erinnert sei hier nur an das Bildungsgesetz des *Determinantensymbols*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

, das n^2 Elemente in n (horizontalen) Zeilen und n (verticalen) Reihen enthält. Δ *ist die Summe aller Producte, die aus jeder Zeile und jeder Reihe ein und nur ein Element als Factor enthalten;* das *Hauptglied* $a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$ ist positiv, ebenso alle die Producte, deren Elemente von dieser

Diagonale durch Reihenintervalle getrennt sind, die eine gerade Summe ergeben, während die mit ungerader Intervallzahl negativ einzuführen sind. Bezeichnet man den Factor von a_{ik} in der Entwickelung von Δ als sein *adjungirtes Element* A_{ik}, so dafs $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}$ („Vorles." Art. 16), so ist A_{ik} die *Unterdeterminante* aus den $(n-1)^2$ Elementen, die weder der i^{ten} Zeile noch der k^{ten} Reihe angehören. Einer der wichtigsten Determinantensätze sagt aus, dafs *das Product zweier Determinanten wieder eine Determinante* ist, deren Elemente $c_{ik} = a_{1i}b_{1k} + a_{2i}b_{2k} + \cdots + a_{ni}b_{nk}$ sind („Vorles." Art. 22).

87. Wir erläutern kurz geometrisch die Determinantensätze, die sich auf die Theorie der linearen Gleichungen mit drei Variabeln beziehen. Aus drei homogenen linearen Gleichungen zwischen den x_i $a_x = 0$, $a_x' = 0$, $a_x'' = 0$ folgt durch Elimination der x_i eine Resultante, deren Verschwinden anzeigt, dafs zwischen a_x, a_x', a_x'' eine identische lineare Relation besteht. Ihre linke Seite stellt das Symbol (vgl. § 32)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ a_1', & a_2', & a_3' \\ a_1'', & a_2'', & a_3'' \end{vmatrix} = \Sigma a_i (a_j' a_k'' - a_k' a_j'')$$

dar, *die Determinante* Δ (*der Coefficienten*) *des Gleichungssystems.*

Unter der Bedingung $\Delta = 0$ gehen also die drei Geraden a_x, a_x', $a_x'' = 0$ durch einen Punkt, oder liegen die drei Punkte a_ξ, a_ξ', $a_\xi'' = 0$ in einer Geraden. Daher sind die Geraden a_x, $a_x' = 0$ parallel, d. h. schneiden sich auf $(\sin A)_x = 0$, wenn $\Delta = 0$, nach Einsetzung von $\sin A_i$ statt a_i'' (§ 65). Da nun stets $\Delta = 0$ ist, wenn wir statt $a_x'' = 0$ irgend eine Gerade des Büschels $a_x + k a_x' = 0$ nehmen, so folgt der für Umformungen der Determinante wichtige Satz: Der Wert einer Determinante wird nicht geändert, wenn man zu den Elementen einer Zeile die mit einer Constanten multiplicirten Elemente einer andern addirt („Vorles." Art. 21).

Ist $\Delta = 0$, so sind die den Gleichungen gemeinsamen Werte der Unbekannten den zu den Elementen einer Reihe

a_i oder a_i' oder a_i'' gehörigen Unterdeterminanten A_i oder A_i' oder A_i'' proportional („Vorles." Art. 29), also sind die Coordinaten des Schnittpunkts der Geraden (§ 32)

$$x_1 : x_2 : x_3 = A_1 : A_2 : A_3 = A_1' : A_2' : A_3' = A_1'' : A_2'' : A_3'',$$

z. B. $$= a_2 a_3' - a_3 a_2' : a_3 a_1' - a_1 a_3' : a_1 a_2' - a_2 a_1'.$$

Aus den vollständigen linearen Gleichungen $a_x = c$, $a_x' = c'$, $a_x'' = c''$ folgen die Auflösungen („Vorles." Art. 29)

$$\Delta x_i = A_i c + A_i c' + A_i'' c''.$$

So ergeben sich z. B. die Dreiliniencoordinaten s_i des Schnittpunktes von $a_s = 0$, $a_s' = 0$ mittelst $l_s = M$ als $s_i = \frac{M}{R}(a_j a_k' - a_k a_j')$, wenn R die Coefficientendeterminante der linken Seiten bedeutet.

Es ist nur eine andere Wendung der anfänglichen Überlegung, wenn wir der Gleichung der Verbindungsgeraden der Punkte x_i', x_i'' (§ 69) die Determinantenform geben

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ x_1', & x_2', & x_3' \\ x_1'', & x_2'', & x_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & x_1', & x_1'' \\ x_2, & x_2', & x_2'' \\ x_3, & x_3', & x_3'' \end{vmatrix} = 0;$$

denn diese ist die Resultante der Elimination von a_1, a_2, a_3 aus $a_x = 0$, $a_{x'} = 0$, $a_{x''} = 0$ oder von n, n', n'' aus $n x_i = n' x_i' + n'' x_i''$. Daher folgt mittelst der Orthogonalitätsbedingung (§ 65) die Gleichung der durch den Punkt x_i' gehenden Normale zur Geraden $a_x = 0$ als

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_1' & -a_1 + a_2 \cos A_3 + a_3 \cos A_2 \\ x_2, & x_2' & a_1 \cos A_3 - a_2 + a_3 \cos A_1 \\ x_3, & x_3' & a_1 \cos A_2 + a_2 \cos A_1 - a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

so daſs die Elemente der letzten Reihe die Coordinaten der zur Geraden normalen Richtung sind.

Sind dagegen die Punkte x_i, x_i', x_i'' die Ecken eines Dreiecks, so ist ihre Coordinatendeterminante gleich dem mit $\frac{M^3}{l_1 l_2 l_3}$ multiplicirten doppelten Flächeninhalt F derselben. Bei Cartesischen Coordinaten ist die Coordinatendeterminante mit

$x_3, x_3', x_3'' = 1$ gleich F. Überhaupt enthalten die angegebenen Formeln die gleichbedeutenden des zweiten Kapitels, sobald wir die dritte Coordinate gleich Eins setzen.

Auch manche, nicht aus der Theorie der linearen Gleichungen stammende Ausdrücke können in Determinantenform gebracht werden, z. B. das Quadrat der Entfernung von x_i, x_i' (§ 71)

$$d^2 = \left(\frac{l_1 l_2 l_3}{M^2}\right)^2 \begin{vmatrix} 1, & -\cos A_3, & -\cos A_2, & x_1', & x_1 \\ -\cos A_3, & 1, & -\cos A_1, & x_2', & x_2 \\ -\cos A_2, & -\cos A_1, & 1, & x_3', & x_3 \\ x_1', & x_2', & x_3', & 0, & 0 \\ x_1, & x_2, & x_3, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

B. 1) Die doppelte Fläche F des Dreiecks dreier Geraden ist durch die Coefficienten ihrer Gleichungen für trimetrische Coordinaten in Determinantenform auszudrücken. Sind $a_x' = 0$, $a_x'' = 0$, $a_x''' = 0$ die Gleichungen der Geraden und bezeichnen h_1, h_2, h_3 die Werte, welche die linken Seiten derselben durch Substitution der Coordinaten der Gegenecken x_i', x_i'', x_i''' annehmen, so gelten die Relationen

$$\begin{aligned} a_{x'}' &= h_1, & a_{x''}' &= 0, & a_{x'''}' &= 0, \\ a_{x'}'' &= 0, & a_{x''}'' &= h_2, & a_{x'''}'' &= 0, \\ a_{x'}''' &= 0, & a_{x''}''' &= 0, & a_{x'''}''' &= h_3. \end{aligned}$$

Wenn man aus den neun links stehenden Trinomen derselben die Determinante bildet, so mufs ihr Wert der Determinante der rechten Seiten gleich, d. i. gleich $h_1 h_2 h_3$ sein. Sie ist aber das Product der beiden Determinanten („Vorles." Art. 22)

$$A = \begin{vmatrix} a_1', & a_2', & a_3' \\ a_1'', & a_2'', & a_3'' \\ a_1''', & a_2''', & a_3''' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} x_1', & x_2', & x_3' \\ x_1'', & x_2'', & x_3'' \\ x_1''', & x_2''', & x_3''' \end{vmatrix},$$

und, da B nach dem Resultat des § 71 gleich $\frac{FM^2}{l_1 l_2 l_3}$ ist, so folgt $\frac{AM^2}{l_1 l_2 l_3} F = h_1 h_2 h_3$. Nun ist $l_{x'} = l_{x''} = l_{x'''} = M$, und man kann zwischen je einer von diesen Gleichungen und je drei bezüglichen Gleichungen oben die Coordinaten x_i', x_i'', x_i''' bez. eliminiren. Dies gibt die Resultate

$$\begin{vmatrix} a_1' , & a_2' , & a_3' , & h_1 \\ a_1'' , & a_2'' , & a_3'' , & 0 \\ a_1''' , & a_2''' , & a_3''' , & 0 \\ l_1 , & l_2 , & l_3 , & M \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_1' , & a_2' , & a_3' , & 0 \\ a_1'' , & a_2'' , & a_3'' , & h_2 \\ a_1''' , & a_2''' , & a_3''' , & 0 \\ l_1 , & l_2 , & l_3 , & M \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_1' , & a_2' , & a_3' , & 0 \\ a_1'' , & a_2'' , & a_3'' , & 0 \\ a_1''' , & a_2''' , & a_3''' , & h_3 \\ l_1 , & l_2 , & l_3 , & M \end{vmatrix} = 0$$

oder („Vorlesungen" Art. 16)

$$\frac{MA}{h_1} = \begin{vmatrix} a_1'' , & a_2'' , & a_3'' \\ a_1''' , & a_2''' , & a_3''' \\ l_1 , & l_2 , & l_3 \end{vmatrix}, \frac{MA}{h_2} = \begin{vmatrix} a_1' , & a_2' , & a_3' \\ a_1''' , & a_2''' , & a_3''' \\ l_1 , & l_2 , & l_3 \end{vmatrix}, \frac{MA}{h_3} = \begin{vmatrix} a_1' , & a_2' , & a_3' \\ a_1'' , & a_2'' , & a_3'' \\ l_1 , & l_2 , & l_3 \end{vmatrix};$$

daher durch Substitution in $F = \frac{h_1 h_2 h_3 l_1 l_2 l_3}{A M^2}$ endlich $\frac{F}{l_1 l_2 l_3 M}$

$$= \begin{vmatrix} a_1' , & a_2' , & a_3' \\ a_1'' , & a_2'' , & a_3'' \\ a_1''' , & a_2''' , & a_3''' \end{vmatrix}^2 : \left\{ \begin{vmatrix} a_1'' , & a_2'' , & a_3'' \\ a_1''' , & a_2''' , & a_3''' \\ l_1 , & l_2 , & l_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1' , & a_2' , & a_3' \\ a_1''' , & a_2''' , & a_3''' \\ l_1 , & l_2 , & l_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1' , & a_2' , & a_3' \\ a_1'' , & a_2'' , & a_3'' \\ l_1 , & l_2 , & l_3 \end{vmatrix} \right\}.$$

Man hätte diese Gestalt des Ausdrucks nach § 38. 5) erwarten dürfen; denn die Determinante des Zählers verschwindet wie dort für drei Gerade, die durch einen Punkt gehen, und die Determinanten des Nenners, wenn irgend zwei unter den drei Geraden parallel sind. Danach zeigt sich auch die Formel a. a. O. als Specialfall für rechtwinklige Coordinaten.

2) Die linke Seite der quadratischen Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

ist das Product von zwei linearen Factoren, wenn in der mit ihr identischen Form

$$x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ + x_3(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0$$

die drei linearen Functionen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \; a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \; a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

zu einander in constantem Verhältnis stehen, etwa $= m_1 : m_2 : m_3$; denn dann ist sie das Product von zwei zu $\Sigma a_{1i}x_i$, $\Sigma m_i x_i$ proportionalen Factoren. Die zu erfüllende Bedingung ist also die Erfüllung der Gleichheiten

$$\frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{m_1} = \frac{a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3}{m_2} = \frac{a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3}{m_3}$$

für alle Werte von x_1, x_2, x_3 oder die Existenz solcher Werte von x_1, x_2, x_3, für welche gleichzeitig $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$,

$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \quad a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$ sind. Die Elimination von x_1, x_2, x_3 zwischen diesen Gleichungen gibt die bezügliche Bedingung in der Form
$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwickelung der Determinante ergibt die Relation des § 59; also haben wir hiemit die Determinantenform der *Discriminante der Gleichung zweiten Grades.*

3) Die Bedingung der Coexistenz der Gleichungen

$$a_1x + a_2y + a_3 = b_1x + b_2y + b_3 = c_1x + c_2y + c_3 = d_1x + d_2y + d_3$$

lautet
$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } A + C = B + D,$$

wenn A, B, C, D die zu den Elementen der ersten Zeile gehörigen Unterdeterminanten bedeuten.

Die Bedingung ist erfüllt, wenn die linearen Functionen, gleich Null gesetzt, die Gleichungen von vier Tangenten desselben Kreises in der Normalform sind und $x \mid y$ der Mittelpunkt ist. Und zwar repräsentiren dann die Unterdeterminanten die Producte je einer Seite des Tangentenvierecks in die Sinus der beiden anliegenden Winkel.

88. Wir behandeln mittelst der Determinantentheorie hauptsächlich die *Lehre von den linearen Substitutionen.* Bei Beschränkung auf drei Variable versteht man darunter die Einführung von drei linearen homogenen Functionen der Variabeln als neue Variable. Es ist hier zweckmäfsig, die Substitutionscoefficienten durch Doppelindices zu unterscheiden (§ 86). Wir setzen

$$\mu x_1 = \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2' + \alpha_{13}x_3' = \Sigma \alpha_{1k}x_k',$$
$$\mu x_2 = \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \alpha_{23}x_3' = \Sigma \alpha_{2k}x_k',$$
$$\mu x_3 = \alpha_{31}x_1' + \alpha_{32}x_2' + \alpha_{33}x_3' = \Sigma \alpha_{3k}x_k',$$

also allgemein, wenn Σ sich auf den Index der Variabeln bezieht,

$$\text{I.} \qquad \mu x_i = \Sigma \alpha_{ik}x_k'.$$

Der erste Index von α_{ik} gibt die ungestrichene Variable

oder die Gleichung, der zweite die gestrichene Variable an, zu der der Coefficient gehört. Die Coefficientendeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

heifst *der Substitutionsmodul;* ihr Wert sei immer von Null verschieden vorausgesetzt.

Ist wieder A_{ik} die zu α_{ik} in Δ gehörige Unterdeterminante, so heifst die Determinante der A_{ik} die *Reciprocaldeterminante* zu Δ oder die *Determinante der adjungirten Elemente;* sie ist gleich Δ^2 („Vorles." Art. 30, vgl. § 78)

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{21}, & A_{31} \\ A_{12}, & A_{22}, & A_{32} \\ A_{13}, & A_{23}, & A_{33} \end{vmatrix}$$

und die zu A_{ik} gehörigen Unterdeterminanten sind gleich $\Delta \cdot \alpha_{ik}$. Die Auflösung der Substitutionsgleichungen liefert als *die umgekehrten Substitutionen*

$$\text{I}'. \qquad \frac{\Delta}{\mu} x_i' = \Sigma A_{ki} x_k,$$

wobei nun der zweite Index die Gleichung charakterisirt.

Unter dem Gesichtspunkt einer linearen Substitution in ein System linearer Gleichungen hat besondere Wichtigkeit für die analytische Geometrie das *Multiplicationsgesetz der Determinanten* („Vorles." Art. 23). Es lautet dann so: *Wenn ein System von linearen homogenen Gleichungen durch lineare Substitutionen für die Variabeln transformirt wird, so ist die Determinante des transformirten Systems gleich dem Producte aus der Determinante des Originalsystems in den Substitutionsmodul.*

Sind die Gleichungen gegeben $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$, so werden sie durch die obigen Substitutionen zu neuen Variabeln x_i' transformirt in

$$a'_{x'} = x_1' \Sigma a_i \alpha_{i1} + x_2' \Sigma a_i \alpha_{i2} + x_3' \Sigma a_i \alpha_{i3} = 0,$$
$$b'_{x'} = x_1' \Sigma b_i \alpha_{i1} + x_2' \Sigma b_i \alpha_{i2} + x_3' \Sigma b_i \alpha_{i3} = 0,$$
$$c'_{x'} = x_1' \Sigma c_i \alpha_{i1} + x_2' \Sigma c_i \alpha_{i2} + x_3' \Sigma c_i \alpha_{i3} = 0,$$

und die Determinante der transformirten Coefficienten a_i', b_i', c_i' wird

$$\begin{vmatrix} a_1', & a_2', & a_3' \\ b_1', & b_2', & b_3' \\ c_1', & c_2', & c_3' \end{vmatrix} = \Delta \cdot \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Hat nun die ursprüngliche Determinante den Wert Null, gehen also die Geraden a_x, b_x, $c_x = 0$ durch einen Punkt oder liegen die Punkte a_ξ, b_ξ, $c_\xi = 0$ in einer Geraden, so verschwindet gleichzeitig auch die Resultante der transformirten Gleichungen, d. h. auch die Geraden $a'_{x'}$, $b'_{x'}$, $c'_{x'} = 0$ bez. Punkte $a'_{\xi'}$, $b'_{\xi'}$, $c'_{\xi'} = 0$ gehören einem Büschel bez. einer Reihe an.

Man nennt aber *Invariante* jede Coefficientenfunction, die der Forderung genügt: Bildet man einerseits aus den Coefficienten der gegebenen Gleichungen, anderseits aus den Coefficienten der linear transformirten Gleichungen dieselbe Function, so soll der Quotient der beiden Functionen eine Potenz des Substitutionsmoduls Δ^k sein. Dafür sagt man kürzer: *eine Invariante gegebener Gleichungen ändert sich bei linearer Transformation derselben nur um eine Potenz des Substitutionsmoduls als Factor**). Daher ist die Coefficientendeterminante von drei linearen Gleichungen eine Invariante derselben.

Die Coefficienten einer transformirten linearen Gleichung sind ferner selbst lineare Functionen der gegebenen. Wird $\xi_x = 0$ durch die Substitution der x_i' in $\xi'_{x'} = \Sigma(x_k' \Sigma \alpha_{ik} \xi_i) = 0$ verwandelt ist, so ist

$$\text{II}'. \qquad \nu \xi_i' = \alpha_{1i} \xi_1 + \alpha_{2i} \xi_2 + \alpha_{3i} \xi_3 = \Sigma \alpha_{ki} \xi_k,$$

$$\text{II}. \qquad \frac{\Delta}{\nu} \xi_i = A_{i1} \xi_1' + A_{i2} \xi_2' + A_{i3} \xi_3' = \Sigma A_{ik} \xi_k'.$$

Man nennt diese Substitutionen, deren Coefficienten mit denen der ursprünglichen (I, I′) identisch sind, nur dafs die Zeilen und die Reihen derselben vertauscht erscheinen, die zu den

---

*) Ändert sich die Function gar nicht oder ist der Factor $\Delta^k = 1$, so nennt man sie eine *absolute Invariante.*

gegebenen *inversen* (*transponirten*) *Substitutionen* („Vorles.“ Art. 129). Variable ξ_i und Variable x_i, die mit einander gleichzeitig inverse Substitutionen erleiden, werden als unter einander *contragredient* bezeichnet. *Also sind Punkt- und Liniencoordinaten contragredient*, denn bei gleichzeitiger Anwendung der Substitutionen I auf x_i und II auf ξ_i geht $\mu \xi_x$ über in $\nu \xi'_{x'}$, also $\xi_x = 0$ in $\xi'_{x'} = 0$.

Aus den linearen homogenen Substitutionen gehen für nicht-homogene Variable *lineargebrochene Substitutionen* hervor (vgl. § 78)

$$x = \frac{\alpha_{11} x' + \alpha_{12} y' + \alpha_{13}}{\alpha_{31} x' + \alpha_{32} y' + \alpha_{33}}, \quad y = \frac{\alpha_{21} x' + \alpha_{22} y' + \alpha_{23}}{\alpha_{31} x' + \alpha_{32} y' + \alpha_{33}},$$

$$\xi = \frac{A_{11} \xi' + A_{12} \eta' + A_{13}}{A_{31} \xi' + A_{32} \eta' + A_{33}}, \quad \eta = \frac{A_{21} \xi' + A_{22} \eta' + A_{23}}{A_{31} \xi' + A_{32} \eta' + A_{33}}.$$

89. **Welche geometrische Bedeutung haben nun diese linearen Substitutionen?** Die homogenen Punktcoordinaten x_i und x_i' können wir im allgemeinen auf zwei ganz beliebige, von einander unabhängige Systyme von Fixelementen beziehen; natürlich aber auch unter der speciellen Annahme, dafs diese Systeme identisch seien. Wir machen zunächst die allgemeinste Voraussetzung, denken uns zugleich die Liniencoordinaten ξ_i und ξ_i' so eingeführt, dafs $\xi_x = 0$ und $\xi'_{x'} = 0$ in den beiden Systemen Gerade darstellen.

Die linearen Substitutionen I ordnen nun jedem bestimmten Punkt x_i' einen einzigen bestimmten Punkt x_i zu, aber vermöge der linearen Umkehrungen I′ entspricht auch jedem Punkt x_i ein und nur ein Punkt x_i'. *Die Punkte beider Systeme entsprechen einander eindeutig.* Der Grad einer Gleichung in Punktcoordinaten, also die Ordnung der durch sie dargestellten Ortscurve, wird durch lineare Substitution nicht geändert (§ 22). Somit entsprechen den Punkten einer geraden Reihe im System der x_i' auch die Punkte einer geraden Reihe im System der x_i und umgekehrt. Daraus folgerten wir aber, dafs auch die Liniencoordinaten ξ_i, ξ_i' entsprechender Geraden durch lineare Substitutionen II, II′, verbunden sind. *Also entsprechen sich die Geraden ebenfalls eindeutig.* Somit bleibt auch die Classe jeder Enveloppe bei

linearer Substitution ungeändert, insbesondere bleiben Strahlbüschel Strahlbüschel.

Man nennt dies ausnahmslos eindeutige Entsprechen von Punkten x_i und x_i', von Geraden ξ_i und ξ_i' zweier ebenen Gebilde eine *lineare Verwandtschaft* derselben. Und diese ausnahmslose Eindeutigkeit fordert als analytischen Ausdruck umgekehrt die lineare Substitution zwischen den Coordinaten. Alle rein descriptiven Relationen (§ 79) zwischen Elementen eines Gebildes finden sich wiederum vor zwischen den entsprechenden Elementen eines linear verwandten Gebildes, wie in § 79 die correlativen Relationen bei den dualistisch entsprechenden. Infolge des Invariantencharakters der Resultante von drei linearen Gleichungen ist eben die Eigenschaft, einem Büschel oder einer Reihe anzugehören, invariant.

Eine mehr geometrische Benennung gründet sich auf eine noch wichtigere Invariante der linearen Substitutionen: *das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Büschels und einer Reihe ist absolut invariant.* Denn, sind die Strahlen eines Büschels, bez. Punkte einer Reihe $a_x - k\,b_x = 0$, $\alpha_\xi - k\,\beta_\xi = 0$, so sind die entsprechenden Strahlen, bez. Punkte $a'_{x'} - k\,b'_{x'} = 0$, $\alpha'_{\xi'} - k\,\beta'_{\xi'} = 0$. Also haben nach § 83 in entsprechenden Büscheln bez. Reihen infolge der Parametergleichheit je vier homologe Elemente k_1, k_2, k_3, k_4 gleiches Doppelverhältnis (§ 82). *In jeder linearen Verwandtschaft sind entsprechende Strahlbüschel und Punktreihen projectivisch auf einander bezogen; daher heifst die durch lineare Substitution darstellbare geometrische Abhängigkeit Projectivität, Collineation*[14]) *oder Homographie der ebenen Systeme, und entsprechende Elemente derselben heifsen homolog.* Homologe oder *collineare Curven stimmen in Ordnung und Classe überein.* Zwei Systeme sind collinear, wenn sie zu demselben dritten collinear sind, denn x_i und x_i'' sind durch eine lineare Substitution verbunden, wenn solche zwischen x_i und x_i', x_i' und x_i'' bestehen.

Die beiden Fundamentaleigenschaften der Projectivität sind Eindeutigkeit des Entsprechens und Gleichheit homologer Doppelverhältnisse. Unter der allgemeinen projectivischen Ver-

wandtschaft sind zahlreiche specielle Formen enthalten, zu deren Aufzählung wir am Schlusse des Kapitels zurückkehren.

90. Es erübrigt noch die **Untersuchung der geometrischen Bedeutung der Substitutionscoefficienten,** welche offenbar mit der Abhängigkeit des analytischen Ausdrucks vom Coordinatensystem zugleich das Wesen der allgemeinen Coordinatenbestimmung selbst klar legen wird.

Das System der x_i und das der x_i' möge als erstes und zweites unterschieden werden. Die Fundamentalpunkte und der Einheitpunkt des ersten seien A_1, A_2, A_3, E, ihre homologen Punkte im zweiten also A_1', A_2', A_3', E'; die Fundamentalpunkte und der Einheitpunkt des zweiten seien $A_1^{*\prime}$, $A_2^{*\prime}$, $A_3^{*\prime}$, $E^{*\prime}$, ihre homologen im ersten also A_1^*, A_2^*, A_3^*, E^*. Also sind die gestrichenen Coordinaten von $A_i^{*\prime}$ $x_i' = h_i' : e_i'$, $x_j' = x_k' = 0$, die von $E^{*\prime}$ $1 | 1 | 1$; und die ungestrichenen Coordinaten von A_i $x_i = h_i : e_i$, $x_j = x_k = 0$, die von E $1 | 1 | 1$. Dann liefert die Substitution I, bez. I′ (§ 88) die folgende Coordinatentafel der homologen Punkte A_i^*, E^*, bez. A_i', E'

	x_1	x_2	x_3			x_1'	x_2'	x_3'	
A_1^*	α_{11}	α_{21}	α_{31}	$\times \frac{h_1'}{\mu e_1'}$	A_1'	A_{11}	A_{12}	A_{13}	$\times \frac{\mu h_1}{\Delta e_1}$
A_2^*	α_{12}	α_{22}	α_{32}	$\times \frac{h_2'}{\mu e_2'}$	A_2'	A_{21}	A_{22}	A_{23}	$\times \frac{\mu h_2}{\Delta e_2}$
A_3^*	α_{13}	α_{23}	α_{33}	$\times \frac{h_3'}{\mu e_3'}$	A_3'	A_{31}	A_{32}	A_{33}	$\times \frac{\mu h_3}{\Delta e_3}$
E^*	$\Sigma \alpha_{1k}$	$\Sigma \alpha_{2k}$	$\Sigma \alpha_{3k}$		E'	$\Sigma \mathsf{A}_{k1}$	$\Sigma \mathsf{A}_{k2}$	$\Sigma \mathsf{A}_{k3}$	

Somit sind die Substitutionscoefficienten selbst, bez. deren Unterdeterminanten die Coordinaten der zu den Fundamentalpunkten des zweiten bez. ersten Systems homologen Punkte des andern Systems; und zwar ist A_i^* der Punkt α_{ki}, A_i' der Punkt A_{ik}.

Die Projectivität ebener Systeme ist also durch vier Paare homologer Punkte bez. Geraden eindeutig bestimmt. Die Angabe der drei Paare A_i^*, $A_i^{*\prime}$ bestimmt die Verhältnisse der α_{ik}, aber erst die Angabe eines vierten Paares E^*, $E^{*\prime}$ durch $\Sigma \alpha_{ik}$ die neuen Coefficienten selbst bis auf einen gemein-

samen Factor oder also die acht Constanten der Substutionen. In derselben Weise reichen auch die Paare A_i, E; A_i', E' zur Bestimmung aus. Geometrisch geschieht *die lineare Construction homologer Elementenpaare* P, P' *aus vier gegebenen Paaren* A_i, E; A_i', E' gemäfs § 88. Zu P ergibt sich P' durch den Schnitt der homologen vierten Strahlen $A_i' P'$ zu $A_i P$ in den projectivischen Büscheln $(A_i \cdot A_j A_k E P) = (A_i' \cdot A_j' A_k' E' P')$; dualistisch für homologe Geraden der Systeme.

Es ist offenbar keine Specialisirung der Formeln oder der Collineation, wenn wir mit A_i, E auch $A_i^{*\prime}$, $E^{*\prime}$ zusammenfallen lassen, also beide projectivischen Gebilde auf dasselbe Coordinatensystem beziehen. Ohne die Allgemeinheit der projectivischen Zuordnung zu beeinträchtigen, wird hingegen eine aufserordentliche Vereinfachung der Substitution erzielt, wenn *die Fundamentalpunkte* $A_i^{*\prime}$ *des zweiten Systems zu den Fundamentalpunkten* A_i *des ersten der Reihe nach homolog* gewählt sind. Sind nämlich nach dieser Voraussetzung A_i^* mit A_i und A_i' mit $A_i^{*\prime}$ identisch, so müssen in der obigen Coordinatentafel offenbar $\alpha_{ik} = 0$, $\mathsf{A}_{ik} = 0$ sein, für alle Indices aufser $i = k$. Daher nehmen die Substitutionsformeln, wegen $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}$ und $\mathsf{A}_{ii} = \frac{\Delta}{\alpha_{ii}}$, die Gestalt an

$$\text{III.} \qquad \mu x_i = \alpha_{ii} x_i', \quad \nu \xi_i' = \alpha_{ii} \xi_i .$$

Alsdann liefert $\alpha_{11} \mid \alpha_{22} \mid \alpha_{33} \quad E^*$, $\quad \alpha_{22}\alpha_{33} \mid \alpha_{33}\alpha_{11} \mid \alpha_{11}\alpha_{22} \quad E'$.

Werden endlich die Einheitpunkte der beiden Coordinatensysteme als das vierte Paar homologer Punkte eingeführt, so dafs E^* mit E, $E^{*\prime}$ mit E' zusammenfällt, so müssen die $\alpha_{ii} = 1$ werden. *Die linearen Substitutionen reduciren sich auf die Proportionalität der Coordinaten* $\mu x_i = x_i'$, $\nu \xi_i' = \xi_i$. Man erhält dies auch aus den allgemeinen Formeln I, sobald man die Geraden $\Sigma \alpha_{ik} x_k = 0$ zu Fundamentallinien des zweiten Systems wählt und die Einheitpunkte entsprechend annimmt.

Die Coordinaten x_i *und* x_i', ξ_i *und* ξ_i' *homologer Elemente in projectivischen Gebilden sind unverändert dieselben, wenn sie*

auf der Reihe nach homologe Fixelemente bezogen sind. Darin liegt die Rechtfertigung für ihre Bennennung als projectivische Coordinaten: die unendlich vielen geometrischen Gebilde, deren Elemente denselben Wertegruppen der Coordinaten infolge verschiedener Wahl der Fixelemente entsprechen (vgl. § 12), sind projectivisch (collinear).

91. **Transformation projectivischer Coordinaten.** Es ist schon § 20 hervorgehoben worden, dafs die Transformation von Parallelcoordinaten analytisch nur ein Specialfall der linearen Substitution ist, wie ja auch § 12 jene Transformationsformeln als Ausdruck der Congruenz ebener Gebilde fafste, die sich offenbar als eine lineare Verwandtschaft erweisen wird. Ganz ebenso umfassen die linearen Substitutionen auch die Theorie der Transformation projectivischer Coordinaten im allgemeinsten Sinne nach demselben einfachen Gesetz.[15])

Wir haben im vorigen § nur die Voraussetzung zu machen, dafs x_i und x_i', ξ_i und ξ_i' sich als alte und neue Coordinaten auf dieselben Elemente der Ebene beziehen, d. h. die Lage eines Punktes und einer Geraden nur in Bezug auf verschiedene Fixelemente A_1, A_2, A_3, E und $A_1^{*\prime}, A_2^{*\prime}, A_3^{*\prime}, E^{*\prime}$ ausdrücken. Dann sind die Substitutionen des § 88

$$\mu x_i = \Sigma \alpha_{ik} x_k', \quad \frac{\Delta}{\mu} x_i' = \Sigma \mathsf{A}_{ki} x_k, \quad \nu \xi_i' = \Sigma \alpha_{ki} \xi_k,$$
$$\frac{\Delta}{\nu} \xi_i = \Sigma \mathsf{A}_{ik} \xi_k'$$

die allgemeinsten Transformationformeln. Die Bedeutung der Coefficienten folgt, da A_i', E' mit A_i, E, A_i^*, E^* mit $A_i^{*\prime}$ $E^{*\prime}$ zusammenfallen und a_i, e; $a_i^{*\prime}$ $e^{*\prime}$ die dualen Fixelemente der beiden Coordinatensysteme nach § 84 bezeichnen, aus der Coordinatentafel (vgl. § 90)

	x_1	x_2	x_3			ξ_1'	ξ_2'	ξ_3'	
$A_i^{*\prime}$	α_{1i}	α_{2i}	α_{3i}	$\times \dfrac{h_i'}{\mu e_i'}$	a_i	α_{i1}	α_{i2}	α_{i3}	$\times \dfrac{h_i'}{\nu e_i'}$
$E^{*\prime}$	$\Sigma \alpha_{1k}$	$\Sigma \alpha_{2k}$	$\Sigma \alpha_{3k}$		e	$\Sigma \alpha_{k1}$	$\Sigma \alpha_{k2}$	$\Sigma \alpha_{k3}$	

Die Substitutionscoefficienten in Reihen sind die Coordinaten der Fundamentalpunkte des neuen Systems im alten, während

ihre Summen in Zeilen die alten Coordinaten des neuen Einheitpunktes liefern, und *die Substitutionscoefficienten in Zeilen sind die Coordinaten der Fundamentallinien des alten Systems im neuen*, während ihre Summen in Reihen die neuen Coordinaten der alten Einheitlinie liefern.

Wenn also z. B. die neuen Fixpunkte $A_1^{*\prime}$, $A_2^{*\prime}$, $A_3^{*\prime}$, $E^{*\prime}$ durch ihre Coordinaten im alten System $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)}$, $x_i^{(e)}$ gegeben sind, so hat man zur Bestimmung der linearen Substitution, welche dieser Coordinatentransformation äquivalent ist, die Relationen

$$\alpha_{11} : \alpha_{21} : \alpha_{31} = x_1^{(1)} : x_2^{(1)} : x_3^{(1)}, \quad \mu x_1^{(e)} = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13},$$
$$\alpha_{12} : \alpha_{22} : \alpha_{32} = x_1^{(2)} : x_2^{(2)} : x_3^{(2)}, \quad \mu x_2^{(e)} = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23},$$
$$\alpha_{13} : \alpha_{23} : \alpha_{33} = x_1^{(3)} : x_2^{(3)} : x_3^{(3)}, \quad \mu x_3^{(e)} = \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33}.$$

Die Lösung kann („Vorles." Art. 27 f.) sehr einfach allgemein ausgedrückt werden mittelst der Coordinatendeterminante

$$X = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}, & x_1^{(2)}, & x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)}, & x_2^{(2)}, & x_2^{(3)} \\ x_3^{(1)}, & x_3^{(2)}, & x_3^{(3)} \end{vmatrix}$$

und ihrer adjungirten Elemente $X_i^{(k)}$. Man findet so

$$\alpha_{ik} X = \mu x_i^{(k)} \left\{ x_1^{(e)} X_1^{(k)} + x_2^{(e)} X_2^{(k)} + x_3^{(e)} X_3^{(k)} \right\}.$$

Behält man z. B. das Fundamentaldreieck bei und ändert nur die Einheitelemente, so geben die Formeln $X = \frac{h_1 h_2 h_3}{e_1 e_2 e_3}$, $\alpha_{ii} = \mu X^2 \frac{e_i}{h_i} x_i^{(e)}$, $\alpha_{ik} = 0$,

also $$\mu' x_i = x_i^{(e)} x_i', \quad \nu' \xi_i' = x_i^{(e)} \xi_i.$$

Sind die alten Coordinaten Cartesische, so setzen wir $x_1^{(i)} = x^{(i)}$, $x_1^{(e)} = x^{(e)}$; $x_2^{(i)} = y^{(i)}$, $x_2^{(e)} = y^{(e)}$; $x_3^{(i)} = x_3^{(e)} = 1$ und erhalten

$$\alpha_{1i} : \mu x^{(i)} = \alpha_{2i} : \mu y^{(i)} = \alpha_{3i} : \mu =$$
$$\frac{x^{(j)} y^{(k)} - x^{(k)} y^{(j)} + x^{(e)} \left(y^{(j)} - y^{(k)}\right) + y^{(e)} \left(x^{(k)} - x^{(j)}\right)}{x^{(2)} y^{(3)} - x^{(3)} y^{(2)} + x^{(3)} y^{(1)} - x^{(1)} y^{(3)} + x^{(1)} y^{(2)} - x^{(2)} y^{(1)}}.$$

Analog gestaltet sich der umgekehrte Übergang. Endlich erhält man die Transformation von Parallelcoordinaten durch

eine sehr einfache Grenzbetrachtung, indem man als Coordinaten einer Richtung α einführt $u\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega} \,\Big|\, u\frac{\sin\alpha}{\sin\omega} \,\Big|\, u\,.\,0$ und unter u eine sich der Grenze ∞ nähernde Zahl versteht.

B. 1) Dreiliniencoordinaten x_i und Flächencoordinaten x_i' (§ 85) sind durch die Substitution verbunden $x_i = \frac{M}{3l_i}x_i'$.

2) Sind die Cartesischen Coordinaten der neuen Fixpunkte A_1, A_2, A_3, E bez. $c\,|\,0$, $-c\,|\,0$, $0\,|\,b$, $0\,|\,-b$, so erhält man die Transformationsformeln

$$x = \frac{c(x_1-x_2)}{x_1+x_2-x_3}, \quad y = \frac{-bx_3}{x_1+x_2-x_3},$$

welche man leicht verificirt, z. B. dadurch, dafs die unendlich ferne Gerade $x_1+x_2-x_3=0$ in der Tat als die harmonisch conjugirte zur Einheitlinie bezüglich A_3 und A_1A_2 erscheint.

3) Ein gleichseitiges Dreieck $A_1A_2A_3$ von der Seitenlänge l habe den Mittelpunkt in O und A_3 auf der y-Axe rechtwinkliger Coordinaten, also die Ecken $\frac{l}{2}\,\Big|\,\frac{l}{\sqrt{3}}$, $\frac{-l}{2}\,\Big|\,\frac{l}{\sqrt{3}}$, $0\,\Big|\,\frac{-2l}{\sqrt{3}}$. Dann gelten für den Übergang von den Cartesisch-Plückerschen zu den Dreilinien- und Dreipunktcoordinaten die Substitutionen

$$x = \frac{l}{2}\,\frac{x_1'-x_2'}{x_1'+x_2'+x_3'}, \quad y = \frac{l}{2\sqrt{3}}\,\frac{x_1'+x_2'-x_3'}{x_1'+x_2'+x_3'};$$

$$\xi = \frac{3}{l}\,\frac{\xi_1'-\xi_2'}{\xi_1'+\xi_2'+\xi_3'}, \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{l}\,\frac{\xi_1'+\xi_2'-\xi_3'}{\xi_1'+\xi_2'+\xi_3'}.$$

4) Die Transformation schiefwinkliger Parallelcoordinaten (§ 10) als Specialfall der allgemeinen. Aus den Coordinaten

A_1	A_2	A_3	E
$u\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}$	$u\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}$	x_0	$x_0+\frac{\sin(\omega-\alpha)+\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}$
$u\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}$	$u\frac{\sin\beta}{\sin\omega}$	y_0	$y_0+\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\omega}$
$u\,.\,0$	$u\,.\,0$	1	1

folgen $X = u^2\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\omega} = \frac{u^2}{\mu^3}\Delta$ und die Elemente der ersten drei Reihen, nach Division durch u in den zwei ersten, als die mit μ dividirten Substitutionscoefficienten $\beta_{22}, \beta_{32}, \beta_{12}; \beta_{23}, \dots; \beta_{21}, \dots$

5) *Transformation rechtwinkliger Parallelcoordinaten zu rechtwinkligen Streifencoordinaten* $X\,|\,Y$, $\Xi\,|\,\mathrm{H}$ (§ 85). Ist $x_0\,|\,y_0$ der

Mittelpunkt der Seite $A_1 A_2$ von der Länge Zwei und ϑ die Richtung A_3, so lautet die Coordinatentafel

$x_0 + \cos\vartheta$	$x_0 - \cos\vartheta$	$u\cos\vartheta$	$x_0 + \cos\vartheta$
$y_0 - \sin\vartheta$	$y_0 + \sin\vartheta$	$u\sin\vartheta$	$y_0 + \sin\vartheta$
1	1	$u \,.\, 0$	1

Aus den ersten drei Reihen entsteht die Coefficientendeterminante, wenn man nur u durch 2 ersetzt. Daher ist

$$x:y:1 = \{(x_0+\cos\vartheta)X + (x_0-\cos\vartheta)Y + 2\cos\vartheta\}$$
$$:\{(y_0-\sin\vartheta)X + (y_0+\sin\vartheta)Y + 2\sin\vartheta\}:(X+Y),$$
$$\xi:\eta:1 = \sin\vartheta(-\Xi+\mathrm{H}-1):\cos\vartheta(\Xi-\mathrm{H}-1)$$
$$:\{(x_0\sin\vartheta - y_0\cos\vartheta - \sin 2\vartheta)\Xi$$
$$+(-x_0\sin\vartheta + y_0\cos\vartheta - \sin 2\vartheta)\mathrm{H}$$
$$+x_0\sin\vartheta + y_0\cos\vartheta + \sin 2\vartheta\}.$$

Sehr einfach werden die Formeln für $x_0 = y_0 = 0$.

92. Die Untersuchung der Projectivität ebener Gebilde erfordert eine *nähere Betrachtung der projectivischen Zuordnung in den beiden Elementargebilden:* Punktreihen und Strahlbüscheln (§ 83). Sind zwei Reihen, bez. Büschel projectivisch, so sind es auch die zu denselben perspectivischen Reihen von den Trägern $x_2 = 0$ und $x_2' = 0$, bez. Büschel von den Scheiteln $\xi_2 = 0$ und $\xi_2' = 0$. Den Ausdruck der Verwandtschaft bilden also die Substitutionen zweier Variabeln

$$\mu x_1 = \alpha_{11}x_1' + \alpha_{13}x_3' \quad \text{bez.} \quad \nu\xi_1' = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{31}\xi_3,$$
$$\mu x_3 = \alpha_{31}x_1' + \alpha_{33}x_3' \qquad\qquad \nu\xi_3' = \alpha_{13}\xi_1 + \alpha_{33}\xi_3.$$

Setzen wir

$$x_1 : x_3 = \lambda,\ x_1' : x_3' = \lambda', \ \text{bez.}\ \xi_1 : \xi_3 = \mu,\ \xi_1' : \xi_3' = \mu',$$

so sind diese Quotienten nach der Coordinatendefinition (§ 84) Doppelverhältnisse, zwischen denen eine Abhängigkeit vermöge der lineargebrochenen Substitution besteht

$$\lambda = \frac{\alpha_{11}\lambda' + \alpha_{13}}{\alpha_{31}\lambda' + \alpha_{33}}, \quad \text{bez.} \quad \mu = \frac{\alpha_{11}\mu' + \alpha_{31}}{\alpha_{13}\mu' + \alpha_{33}}.$$

Die Doppelverhältnisse homologer Elemente mit je drei willkürlichen Fixelementen sind unter einander in linearer Abhängigkeit; Doppelverhältnis-Gleichheit (§ 83) entsteht erst, wenn sich auch die Fixelemente der Reihe nach entsprechen.

Nun ist das Doppelverhältnis eines Elementes mit drei

festen sein allgemeiner Parameter in Bezug auf zwei derselben, der durch geeignete Wahl des dritten mit dem Teilverhältnis identisch wird (§ 80). Die folgenden Betrachtungen büfsen nichts an Allgemeinheit ein, wenn wir den Parameter λ als das Teilverhältnis selbst voraussetzen. Dann lautet obiges Resultat: *zwischen den Parametern* λ, λ' *) *homologer Elemente in projectivischen Elementargebilden besteht eine bilineare, d. h. sowol in* λ *als in* λ' *lineare, Gleichung*

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0;$$

denn aus derselben folgen die Parameter-Substitutionen

$$\lambda' = -\frac{b\lambda + d}{a\lambda + c}, \quad \lambda = -\frac{c\lambda' + d}{a\lambda' + b}.$$

Die Gleichung ist durch die Angabe von drei Paaren homologer Elemente mit den Parametern λ_1, λ_1'; λ_2, λ_2'; λ_3, λ_3' bestimmt, z. B. in der Determinantenform

$$\begin{vmatrix} \lambda\lambda', & \lambda, & \lambda', & 1 \\ \lambda_1\lambda_1', & \lambda_1, & \lambda_1', & 1 \\ \lambda_2\lambda_2', & \lambda_2, & \lambda_2', & 1 \\ \lambda_3\lambda_3', & \lambda_3, & \lambda_3', & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe ergibt sich auch durch Entwickelung des Ausdrucks für die Gleichheit homologer Doppelverhältnisse

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda} = \frac{\lambda_1' - \lambda_3'}{\lambda_2' - \lambda_3'} : \frac{\lambda_1' - \lambda'}{\lambda_2' - \lambda'}.$$

Umgekehrt ist die allgemeinste bilineare Gleichung

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$$

die Parametergleichung der Projectivität. Denn man verificirt sofort die Doppelverhältnis-Gleichheit durch Ausführung der Substitutionen, z. B. für λ, λ_i. Damit erhellt völlig allgemein: *Zwei Reihen von Punkten oder Büschel von Strahlen oder eine Reihe von Punkten und ein Büschel von Strahlen, die in einer algebraisch-geometrischen Abhängigkeit stehen, sind projectivisch, sobald einem Element des einen eindeutig ein Element des andern entspricht, und umgekehrt.*

---

*) Die duale Betrachtung ist bis auf die Bezeichnung identisch. An Stelle der Parameter kann man sich auch Abscissen x, x' eingeführt denken.

Den Elementen $\lambda = \infty,\ -\frac{c}{a},\ 0,\ -\frac{d}{b}$, entsprechen bez. die Elemente $\lambda' = -\frac{b}{a},\ \infty,\ -\frac{d}{c},\ 0$; also bestimmen diese Coefficientenverhältnisse die den beiden festen Elementen jedes Gebildes entsprechenden Elemente des andern, und umgekehrt (vgl. § 90). Wird daher das erste bez. das zweite Paar der Fixelemente einander entsprechend gedacht, so ist für $\lambda = 0$ auch $\lambda' = 0$, bez. für $\lambda = \infty$ auch $\lambda' = \infty$ und es gelten die einfacheren Formen der Projectivitätsgleichung

$$a + \frac{b}{\lambda'} + \frac{c}{\lambda} = 0, \quad \text{bez.}\ b\lambda + c\lambda' + d = 0.$$

Machen wir beide Voraussetzungen zugleich, so folgt

$$b\lambda + c\lambda' = 0 \ \text{oder}\ \lambda : \lambda' = \text{const.},$$

die Gleichungsform, die wir schon in § 83 gebraucht haben (vgl. Anm. p. 139). Und, wenn sich die Fixelemente verkehrt entsprechen, so dafs für $\lambda = 0, \infty$; $\lambda' = \infty, 0$, so reducirt sich die Projectivitätsgleichung auf

$$a\lambda\lambda' + d = 0 \ \text{oder}\ \lambda\lambda' = \text{const.}$$

Die zu den unendlich fernen Punkten $\lambda = -1$, $\lambda' = -1$ zweier Reihen homologen Punkte heifsen *die Gegenpunkte* derselben; ihre Parameter sind $\lambda' = \frac{b-d}{a-c}$, $\lambda = \frac{d-c}{b-a}$ und sie mögen mit Q' und R bezeichnet werden.

Sollen ferner die beiden unendlich fernen Punkte $\lambda = -1$, $\lambda' = -1$ homolog sein, so mufs die Coefficientenrelation bestehen $a + d = b + c$. *Projectivische Punktreihen sind ähnlich, wenn ihre unendlich fernen Punkte sich entsprechen,* denn homologe Strecken sind dann proportional wegen der Reduction von

$$(A_1 A_2 O \infty) = (A_1' A_2' O' \infty) \ \text{auf}\ OA_1 : OA_2 = O'A_1' : O'A_2'.$$

Also ist $a + d = b + c$ die Ähnlichkeitsbedingung (Probe durch § 13. 6)), zur Bestimmung der ähnlichen Reihen genügen zwei homologe Paare, und, insofern $A_1 A_2$ und $A_1' A_2'$ homologe Strecken sind, reducirt sich die Parametergleichung auf $\lambda = \lambda'$. Endlich entstehen aus ähnlichen offenbar *congruente Reihen*, sobald zwei homologe Strecken z. B. $A_1 A_2$, $A_1' A_2'$ gleich werden.

In projectivischen Büscheln können die Fixstrahlen zu einander rechtwinklig sein; dann ist das Product der Teilverhältnisse von zu einander normalen Strahlen -1. Somit schliessen die zu λ, $\frac{-1}{\lambda}$ homologen Strahlen $-\frac{b\lambda+d}{a\lambda+c}$, $-\frac{d\lambda-b}{c\lambda-a}$ einen rechten Winkel ein, wenn λ der quadratischen Gleichung genügt
$$(ac+bd)(\lambda^2-1)=(a^2+b^2-c^2-d^2)\lambda.$$
Ihre Wurzeln sind offenbar stets reell: *in projectivischen Strahlbüscheln gibt es also im allgemeinen ein und nur ein Paar von homologen rechten Winkeln.* Ist $ac+bd=0$, bez. $ab+cd=0$, so sind die Fixstrahlen selbst je das eine Rechtwinkelpaar.

Dagegen gibt es unendlich viele homologe Rechtwinkelpaare in der speciellen Projectivität, für die zugleich $a^2+b^2-c^2-d^2=0$ und $ac+bd=0$, also auch $ab+cd=0$ ist. Man findet leicht $a=\pm d$, $b=\mp c$ und speciell $\lambda\mp\lambda'=0$ für homologe Fixstrahlen. *Die projectivischen Büschel $\lambda=\lambda'$, bez. $\lambda=-\lambda'$ sind dann congruent bez. symmetrisch gleich.* So beschreiben z. B. Strahlen, die einen Winkel von constanter Gröfse ϑ einschliefsen, congruente Büschel, deren Parametergleichung lautet $(m_1 m_2+1)\tan\vartheta=m_1-m_2$ (§ 31).

93. **Involution.** Wichtig ist der Fall der *Projectivität der Elementargebilde bei vereinigter Lage ihrer Träger.* Wenn zwei projectivische Punktreihen in derselben Geraden liegen, so kann jeder Punkt derselben sowol zur ersten als zur zweiten Reihe gerechnet werden, und es entspricht ihm hiernach in der zweiten oder der ersten Reihe je ein Punkt. Ebenso gehören in zwei projectivischen Büscheln von demselben Scheitel zu jedem Strahl zwei homologe Strahlen, einer in jedem der concentrischen Büschel. Dem Element vom Teilverhältnis μ entspricht, insofern es zum Gebilde λ, bez. λ' gehört, ein Element $\lambda'=-\frac{b\mu+d}{a\mu+c}$, bez. $\lambda=-\frac{c\mu+d}{a\mu+b}$; diese beiden Elemente sind im allgemeinen von einander verschieden, wobei wir λ, λ' auf dieselben Fixelemente bezogen denken.

Sobald aber $b=c$ ist, entspricht jedem Werte μ in

jedem der Gebilde λ und λ' der eine Wert $\mu' = -\frac{b\mu+d}{a\mu+b}$. Die Projectivitätsgleichung

$$a\lambda\lambda' + b(\lambda + \lambda') + d = 0$$

definirt also zwei projectivische Gebilde in derselben Geraden oder um denselben Punkt, in denen *zwei homologe Elemente sich vertauschungsfähig oder involutorisch entsprechen*, d. h. unabhängig davon, zu welchem Gebilde man das eine derselben rechnen will. *Projectivische vereinigte Reihen oder Büschel, deren Parametergleichung symmetrisch ist, bilden eine Involution. Die Involution ist durch zwei Paare homologer Elemente bestimmt*, denn die Gleichung nimmt die Gestalt an

$$\begin{vmatrix} \lambda\lambda', & \lambda + \lambda', & 1 \\ \lambda_1\lambda_1', & \lambda_1 + \lambda_1', & 1 \\ \lambda_2\lambda_2', & \lambda_2 + \lambda_2', & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Involution aus Paaren wechselweise homologer Elemente besteht, können wir dieselben durch quadratische Gleichungen für die Parameter (oder die Abscissen § 15) gegeben denken. Sind also λ, λ' die Wurzeln von

$$A\mu^2 + 2B\mu + C = 0,$$

so kann die Determinante auch ersetzt werden durch

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Daher sind die Paare der durch $A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 = 0$, $A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 = 0$ bestimmten Strahleninvolution mittelst eines Parameters darstellbar durch die Gleichungen

$$(A_1 + kA_2)x^2 + 2(B_1 + kB_2)xy + (C_1 + kC_2)y^2 = 0.$$

Zwei vereinigte projectivische Elementargebilde sind schon in Involution, wenn sie nur *ein* Paar vertauschbarer Elemente enthalten, die nicht zusammenfallen. Denn sind λ, λ' zwei bestimmte und verschiedene Werte der Parameter, so folgt aus

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0, \quad a\lambda'\lambda + b\lambda' + c\lambda + d = 0$$

auch $b - c = 0$, also die Symmetrie der Projectivitätsgleichung. Daher drückt

$(ABCA') = (A'B'C'A)$ oder $AC.BA'.B'C' = -A'C'.B'A.BC$

aus, dafs AA', BB', CC' Paare derselben Involution sind.

Bezogen auf ein Paar als Fixelemente ($b = 0$) erhält die Gleichung die einfache Gestalt $\lambda\lambda' =$ const. Ein ausgezeichnetes Paar in involutorischen Reihen derselben Geraden bilden der unendlich ferne Punkt und sein homologer M, denn aus $(ABM\infty) = (A'B'\infty M)$ folgt einfach $AM.A'M = BM.B'M =$ const. Man nennt den zu ∞ homologen Punkt M den *Centralpunkt*, die Constante die *Potenz der Involution.* Also ist in der Involution das Product der Abstände homologer Punkte vom Centralpunkt constant, und die Potenz positiv oder negativ, je nachdem die Punkte jedes Paares auf derselben Seite oder entgegengesetzten Seiten von M liegen. *Durch Centralpunkt und Potenz ist die Involution bestimmt.*

In concentrischen involutorischen Strahlbüscheln existirt nach § 92 ein Paar homologer Rechtwinkelstrahlen, welches durch die Relation

$$\lambda^2 - \frac{a-d}{b}\lambda - 1 = 0$$

bestimmt wird. Man bezeichnet diese beiden zu einander orthogonalen homologen Strahlen als *die Axen r, r' der Involution.* Die Bedingung der Involution kann geschrieben werden $(abrr') = (a'b'r'r)$ oder

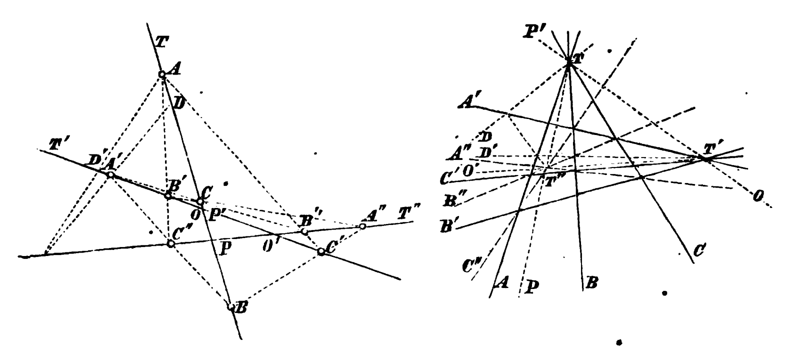
$$\tan ar \,.\, \tan a'r = \tan br \,.\, \tan b'r = \text{const.}$$

Das Product der Teilverhältnisse, welche homologe Strahlen mit den Axen bestimmen, ist constant und heifst die Potenz.

Das Rechtwinkelpaar ist unbestimmt für $a = d$, $b = 0$ oder die Gleichung $\lambda\lambda' + 1 = 0$, also dann, wenn die projectivischen Büschel congruent sind (nicht aber symmetrisch) und durch Drehung des einen um einen rechten Winkel zur Deckung kommen. *Die Strahlen durch O und ihre Normalen in O bilden so die wichtige sogen. Rechtwinkelinvolution, deren Axen unbestimmt sind.*

Nun kann man in zwei concentrischen projectivischen Strahlbüscheln die homologen Rechtwinkelpaare zur Deckung bringen durch Drehung des einen oder durch Drehung nach einer vorgängigen Umlegung (Sinnänderung) des einen. In vereinigten projectivischen Punktreihen kann man, indem man das eine bloſs verschiebt oder damit eine Drehung um π (Sinnänderung) verbindet, die dem Punkt ∞ entsprechenden *Gegenpunkte* R, Q' *in* M zusammenfallen lassen. Nach diesen Lagenänderungen sind zugleich mit r, r' bez. M, ∞ die Elemente aller Paare vertauschbar. *Zwei vereinigte projectivische Elementargebilde können stets auf zwei Arten in involutorische Lage gebracht werden.*

94. Da nun zwei projectivische Punktreihen in verschiedenen Geraden von einem beliebigen Punkt ihrer Ebene aus durch vereinigte projectivische Büschel projicirt und zwei projectivische Strahlbüschel von verschiedenen Scheiteln durch eine beliebige Gerade ihrer Ebene in vereinigten projectivischen Reihen geschnitten werden, so entspringt die Frage nach dem *Ort der Punkte, für welche insbesondere jene projicirenden Büschel in Involution*, und nach der *Enveloppe der Geraden, für welche insbesondere jene Schnittreihen in Involution sind.* Man beantwortet sie durch folgende Betrachtungen.



Wenn in zwei projectivischen Reihen von Punkten $A, B, \ldots$; $A', B', \ldots$ in verschiedenen Geraden T, T' die homologen

Wenn in zwei projectivischen Büscheln von Geraden $A, B, \ldots$; $A', B', \ldots$ von verschiedenen Scheiteln T, T' die homologen

Punkte wechselweise durch Gerade mit einander verbunden werden, so schneiden sich die zusammengehörigen Paare derselben AB', $A'B$; AC', $A'C$; BC', $B'C$; etc. in Punkten C'', B'', A'' einer Geraden T'', welche die Punkte O' und P enthält, die dem gemeinschaftlichen Punkte O, P' der Reihen in beiden entsprechen.

Strahlen wechselweise zum Schnitt gebracht werden, so liegen die zusammengehörigen Paare der Schnittpunkte $AB', A'B$; $BC', B'C$; $CA', C'A$; etc. in Geraden C'', B'', A'' aus einem Punkte T'', durch den die Strahlen O' und P gehen, die dem gemeinschaftlichen Strahl O, P' der Büschel in beiden entsprechen.

Denn man hat nach der Voraussetzung die Relation $(A\,.\,A'B'C'\ldots) = (A'\,.\,ABC\ldots)$; da aber AA' zwei entsprechende Elemente vereinigt, so sind (§ 83) die darin betrachteten Gebilde in perspectivischer Lage, und der Satz ist der Ausdruck derselben.

Sind die Gleichungen von T, T', AA' bez. $T = 0$, $T' = 0$, $S = 0$, so ist die Gleichung des Trägers T'' des gemeinsam-perspectivischen Gebildes

$$T'' = aS - bT' - cT = 0;$$

denn ist die Gleichung von $A'D$ $S + \lambda T = 0$, so ist die von AD' zu schreiben $(a\lambda + c)S - b\lambda T' = 0$ und es ist $\lambda T'' = (a\lambda + c)S - b\lambda T' - c(S + \lambda T)$, unabhängig von λ (vgl. § 83).

Offenbar führen diese Sätze zunächst zur bequemsten *Construction der Paare entsprechender Elemente von projectivischen Gebilden, sobald drei solche Paare AA', BB', CC' gegeben sind* (§ 83). In den gegebenen Gebilden hat man je die beiden Elemente einander zuzuordnen, die gleichzeitig zu einem Element des Gebildes T'' perspectivisch sind. Nützlich ist eine Betrachtung, wie sich die Construction specialisirt, wenn A, A' speciell gewählt werden.

Auf projectivische Gebilde mit vereinigten Trägern macht man die Constructionen anwendbar, indem man das eine Gebilde zunächst durch ein zu ihm perspectivisches Gebilde von einem anderen Träger ersetzt.

Zugleich ist der Träger T'' der gemeinsam-perspectivischen Reihe der Ort der Scheitel aller der involutorischen Büschel, durch welche die gegebenen projectivischen Reihen T, T' projicirt werden können. Denn dem Strahl, welcher den in T'' gewählten Scheitel mit dem gemeinsamen Punkt der Reihen T, T' verbindet, entspricht die Gerade T'', ob man ihn nun zum ersten oder zweiten Büschel rechnet.

Zugleich ist der Scheitel T'' des gemeinsam-perspectivischen Büschels die Enveloppe der Träger der involutorischen Reihen, in welchen die gegebenen projectivischen Büschel T, T' geschnitten werden können. Denn dem Punkte, in welchem der durch T'' gehende Träger den gemeinsamen Strahl der Büschel T, T' schneidet, entspricht der Punkt T'', ob man ihn nun zur ersten oder zweiten Reihe zählt.

Hieraus entspringt *die lineare Construction der Involution AA', BB' mittelst des vollständigen Vierecks bez. Vierseits* (vgl. § 63): Paare einer Involution liefern die drei Gegenseitenpaare des Vierecks, geschnitten mit irgend einer Geraden, und die drei Gegeneckenpaare des Vierseits, verbunden mit irgend einem Punkt. Wählt man nämlich im ersten Fall auf einer beliebigen Geraden durch A zwei Ecken T, T', die dritte U in $T'B$, TC, so ist die vierte U' durch $A'U$, $B'T$ gegeben und bestimmt mit T', $T'C'$, denn die Büschel $(T\,.\,AA'B'C) = (T'\,.\,A'ABC')$ sind projectivisch, weil sie von der Geraden UU', als durch $T'' = A'$ gehend, in involutorischen Reihen geschnitten werden; in der Tat sind aber die sechs gezogenen Geraden die Seiten des Vierecks $TT'UU'$.

Wir haben so eine Involution zu zwei projectivischen Gebilden perspectivisch gemacht. Wir können aber auch zwischen einer Involution und einem Elementargebilde ein projectivisches Entsprechen herstellen und dadurch dem Hauptsatz des § 92 von der Eindeutigkeit der Projectivität eine ähnliche Definition der Involution zur Seite stellen.

Man denke einen beliebigen Punkt in der Geraden der beiden Reihen oder eine beliebige Gerade durch den Scheitel der beiden Büschel und zu diesem Element stets das har-

monisch conjugirte $\alpha, \beta, \ldots$ in Bezug auf ein Elementenpaar $AA', BB' \ldots$ der Involution bestimmt. Ebenso mögen zu irgend einem zweiten Element die harmonischen $\alpha', \beta', \ldots$ genommen werden. Dann sind die aus den harmonisch conjugirten Elementen bestehenden Gebilde $\alpha, \beta, \ldots; \alpha', \beta', \ldots,$ welche zwei verschiedenen Elementen so entsprechen, projectivisch, denn zum Beweis genügt nach dem Satz des § 92 die nach der Construction evidente Eindeutigkeit der Zuordnung $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \ldots$ Man darf jenes Doppelverhältnis $(\alpha\beta\gamma\delta)$ als das der involutorischen Paare (AA', BB', CC', DD') selbst bezeichnen und kann dann sagen: *Wenn zwei Gebilde* (Punktreihen oder Strahlbüschel oder Reihe und Büschel) *einander so entsprechen, dafs jedem Element $A, B, \ldots$ des ersten ein Element $\alpha, \beta, \ldots$ des zweiten und jedem Element $\alpha, \beta, \ldots$ des zweiten zwei Elemente $AA', BB', \ldots$ des ersten in vertauschbarer Weise entsprechen, so sind diese Paare von Elementen in Involution und entsprechen den Elementen des zweiten Gebildes nach gleichem Doppelverhältnis oder projectivisch.*

Diese Definition einer Projectivität zwischen einem Gebilde aus einfachen Elementen und einem Gebilde aus Elementenpaaren erlaubt endlich auch die Ausdehnung des Begriffs projectivischer Zuordnung auf die Paare zweier Involutionen. *Zwei Involutionen sind zu einander projectivisch, wenn sie zu projectivischen Reihen oder Büscheln projectivisch sind.*

95. **Doppelelemente.** In projectivischen Elementargebilden mit vereinigten Trägern gibt es Elemente, die mit ihren homologen zusammenfallen. Denn, beziehen wir die Elemente beider Gebilde auf dieselben beiden festen $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, so dafs ihre Gleichungen lauten

$$s_1 - \lambda s_2 = 0,\ (a\lambda + c)s_1 + (b\lambda + d)s_2 = cs_1 + ds_2 + \lambda(as_1 + bs_2) = 0,$$

so findet ein *Zusammenfallen homologer Elemente* statt für die zwei durch Elimination von s_1 und s_2 bestimmten Werte von λ, d. h. für die Wurzeln der Gleichung

$$a\lambda^2 + (b + c)\lambda + d = 0,$$

welche auch aus der allgemeinen Projectivitätsgleichung (§ 92) für $\lambda = \lambda'$ entsteht. *In projectivischen Reihen bez.*

Büscheln existiren immer zwei sich selbst entsprechende oder tautologe Punkte bez. Strahlen F_1, F_2, *welche die Doppelpunkte bez. Doppelstrahlen der Projectivität heifsen.* Dieselben sind reell und verschieden, wenn die Discriminante $\mathsf{D} = (b + c)^2 - 4ad$ der reell gedachten Gleichung positiv ist, reell und vereinigt für $(b + c)^2 = 4ad$, und conjugirt imaginär, wenn D negativ ist (§ 16). Eine Projectivität kann nicht mehr als zwei Doppelelemente haben, ohne eine Identität zu sein.

Nun folgt aus der Doppelverhältnisgleichheit $(F_1 F_2 A B) = (F_1 F_2 A' B')$ die neue $(F_1 F_2 A A') = (F_1 F_2 B B') =$ const., d. h. *das Doppelverhältnis, welches zwei homologe Elemente projectivischer Gebilde mit den Doppelelementen derselben bestimmen, ist constant.* Sind λ_1, λ_2 die Wurzeln obiger Gleichung, so ist, da $\lambda = -\frac{c}{a}$, $\lambda' = \infty$ homolog sind, das constante Doppelverhältnis

$$\delta = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} : \frac{\lambda' - \lambda_1}{\lambda' - \lambda_2} = \frac{c + a\lambda_1}{c + a\lambda_2} = \frac{c - b + \sqrt{\mathsf{D}}}{c - b - \sqrt{\mathsf{D}}}.$$

Somit ist dasselbe für $\mathsf{D} > 0$ reell, für $\mathsf{D} = 0$ gleich 1, für $\mathsf{D} < 0$ complex, jedoch dann wieder reell und gleich -1, wenn $b = c$ ist. *Zwei getrennte Doppelelemente und der Wert* δ *dieses charakteristischen Doppelverhältnisses bestimmen die Projectivität;* bei reellen und getrennten Doppelelementen folgt unmitelbar eine Construction derselben. *Die Projectivität vom Doppelverhältnis* $+1$ macht hiervon eine Ausnahme, kann aber nach dem Princip des § 94 behandelt werden. Für Reihen $F_1 F_2$; A, A' z. B. wählt man in einer Geraden durch $F_1 F_2$ zwei Centra T, T' und erhält aus ihnen über jenen perspectivische Büschel mit der von $F_1 F_2$ nach dem Schnittpunkt der Geraden TA, $T'A'$ gehenden Axe; mittelst dieser aber X' zu jedem X, und umgekehrt. (Vergl. § 99. 1).) Hierher gehört der besondere Fall der vereinigten gleichen Reihen von gleichem Sinn. Die Fälle $\delta = 0$, $\delta = \infty$ mit getrennten Doppelelementen sind *singulär*, nämlich in den einen Doppelpunkt fallen die A' zu allen A, in den andern die B zu allen B' zusammen.

Für vereinigte ähnliche Reihen ist infolge der Bedingung

$a + d = b + c$ (§ 92) der unendlich ferne Punkt der eine Doppelpunkt. Concentrische symmetrisch-gleiche Büschel $a = d$, $b = c$ ergeben rechtwinklige Doppelstrahlen, denn die Gleichung $a\lambda^2 + 2b\lambda - a = 0$ hat die Wurzeln λ', $\frac{-1}{\lambda'}$. Bezogen auf rechtwinklige Fixstrahlen $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ repräsentiren die Gleichungen

$s_1 - \lambda s_2 = 0$, $s_1 \cos\alpha - s_2 \sin\alpha - \lambda(s_1 \sin\alpha + s_2 \cos\alpha) = 0$

congruente Büschel, deren Doppelstrahlen nach $\lambda^2 + 1 = 0$ *oder* $\lambda = \pm i$ *die durch ihren Scheitel gehenden Strahlen absoluter Richtung sind;* wirklich bilden ja diese Strahlen mit allen Richtungen gleiche Winkel arc tan $(\pm i)$ (§ 58).

Bezogen auf die Doppelelemente als Fixelemente $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ erscheinen die projectivischen Gebilde infolge der Reduction der Parametergleichung auf $\lambda : \lambda' =$ const. (§ 92) dargestellt durch Gleichungen der Form

$$s_1 - m\lambda s_2 = 0, \quad s_1 - m'\lambda s_2 = 0,$$

wo m, m' Constanten sind, deren Quotient $\frac{m}{m'}$ das Doppelverhältnis δ der Projectivität liefert.

Auch die Involution besitzt im allgemeinen zwei Doppelelemente F_1, F_2, deren Parameter hervorgehen aus

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + d = 0.$$

Bezogen auf F_1, F_2 als Fixelemente reducirt sich die Parametergleichung der Involution auf $\lambda + \lambda' = 0$; auch folgt aus $(AF_1F_2A') = (A'F_1F_2A)$ das charakteristische Doppelverhältnis $(F_1F_2AA') = -1$. Also: *jedes Paar der Involution wird durch die Doppelelemente harmonisch getrennt* oder *die Involution besteht aus den zu den Doppelelementen harmonischen Elementenpaaren.* Zu irgend zwei Elementenpaaren AA', BB' bilden die Doppelelemente der durch sie bestimmten Involution das einzige gemeinsame harmonische Paar (vergl. § 15).

Führt man in der involutorischen Reihe den Centralpunkt M, im involutorischen Büschel das Axenpaar rr' ein, so fliefst aus dieser Definition der Satz: *die Doppelelemente*

F_1, F_2 bez. f_1, f_2 der Involution liegen symmetrisch zum Centralpunkt M, bez. zu den Axen r, r'; letzteres folgt auch aus den Gleichungen der Axen (§ 93) und Doppelstrahlen nach § 56. Die dadurch bedingte Umformung obiger Doppelverhältnisgleichheit (vergl. § 14) gibt die Definition der involutorischen Potenz

$$MA \, . \, MA' = \overline{MF}^2, \quad \tan ra \, . \tan ra' = \tan^2 rf.$$

Diese ist negativ bez. positiv, die Doppelelemente sind somit imaginär bez. reell, je nachdem homologe Elemente durch den Centralpunkt bez. je *eine* der Axen getrennt bez. nicht getrennt werden. Offenbar greifen alsdann überhaupt irgend zwei Paare der Involution in einander über oder nicht; durchläuft ein Element das ganze Gebilde in einem festen Sinn, so bewegt sich das homologe Element im gleichen bez. im entgegengesetzten Sinn.

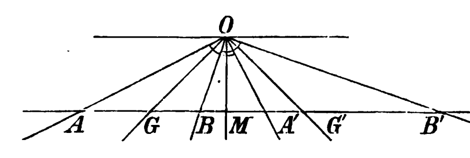
Man unterscheidet die Involutionen, je nachdem $b^2 - ad \gtreqless 0$ oder die Doppelelemente reell, vereint oder conjugirt imaginär sind, als *hyperbolische, parabolische und elliptische.* Jedoch ist der parabolische Fall *singulär*, denn für $b^2 = ad$ fallen nicht nur die Doppelelemente in das reelle Element F $\lambda = -\frac{b}{a}$ zusammen, sondern es fällt auch von jedem Paar der Involution ein Element nach F, da die Parametergleichung in $(a\lambda + b)(a\lambda' + b) = 0$ zerfällt.

Wenn in einer involutorischen Reihe einer der Doppelpunkte unendlich entfernt ist, so ist der andere der Mittelpunkt aller Paare. *Also sind ähnliche Punktreihen nur dann in Involution, wenn sie entgegengesetzt gleich, somit symmetrisch sind.*

96. Unter den Strahleninvolutionen gibt es zwei besondere, *die symmetrische und die rechtwinklige Involution.* Da sie aus congruenten bez. symmetrisch-gleichen Büscheln in vereinigter Lage bestehen, also unbestimmte Rechtwinkelpaare haben (§ 92), sind sie durch die Coefficientenbedingungen charakterisirt $a + d = 0$, bez. $a = d$, $b = 0$. Auf homologe Fixstrahlen bezogen ($b = 0$), lauten daher ihre Gleichungen $\lambda\lambda' - 1 = 0$, bez. $\lambda\lambda' + 1 = 0$. *Daher sind in der*

symmetrischen Involution die Doppelstrahlen $\lambda = \pm 1$ *auf einander normal,* also die gemeinsamen Winkelhalbirenden aller ihrer Paare; *in der Rechtwinkelinvolution sind die Doppelstrahlen die Geraden absoluter Richtung* $\lambda = \pm i$, also harmonisch conjugirt zu allen Rechtwinkelpaaren (§ 58).

*Zu jeder Punktinvolution mit reellen bez. imaginären Doppelpunkten gibt es perspectivische symmetrische, bez. rechtwinklige Strahleninvolutionen**). In der Tat geht aus obigen Gleichungen die Gleichung $a\mu\mu' + d = 0$ einer beliebigen Reihe hervor, wenn man, für ϱ als den Winkel ihres Trägers mit einer der Axen r, r', setzt $\frac{a}{d} = \mp \tan^2 \varrho$; denn das Sinus- und das Streckenteilverhältnis stehen nach § 81 in der Beziehung $\lambda = \mu \tan \varrho$. Zu einer durch reelle Doppelpunkte F_1, F_2 gegebenen Involution wählen wir den Scheitel O der perspectivischen symmetrischen Strahleninvolution so, dafs OF_1, OF_2 rechtwinklig sind und die Axen durch zwei homologe Punkte A, A' gehen; alsdann finden wir zu B den homologen B', indem wir $\sphericalangle F_1OB' = - F_1OB$ machen. Denken wir die Doppelpunkte F_1, F_2 conjugirt imaginär, so sind als Doppelstrahlen OF_1, OF_2 der perspectivischen Rechtwinkelinvolution nicht-parallele Strahlen absoluter Richtung durch F_1, F_2 zu nehmen; AA' sind dann homolog, wenn $\sphericalangle AOA' = \frac{\pi}{2}$, so dafs O durch zwei gegebene Punktepaare elementar bestimmt ist. Man bemerkt namentlich, dafs zu jedem Paar A, A' ein reelles harmonisches Paar B, B' der Involution existirt, ausgeschnitten durch die Halbirungslinien des Winkels AOA', während offenbar kein reelles Paar mit dieser Eigenschaft bei reellen F_1, F_2 möglich ist.



Die Betrachtung der elliptischen Involution gewährt nun, gemäfs der *von Staudt*'schen Theorie, die wahre Ein-

*) und zwar unendlich viele, bez. nur zwei.

sicht in die reelle Darstellbarkeit der imaginären Elemente (§§ 17, 43). *Conjugirt imaginäre Elemente* F_1, F_2 *können stets definirt werden als die Doppelelemente* $a\lambda^2 + 2b\lambda + d = 0$ *einer Involution mit sich trennenden Paaren.* Und, da homologe Elemente die Involution in demselben Sinn durchlaufen (§ 95), *so können die beiden Doppelpunkte* F_1 *und* F_2 *durch den der Involution beigelegten Sinn unterschieden werden.* Setzt man dann fest, dafs die beiden die Involution bestimmenden Paare A, A'; B, B' stets unter einander harmonisch gewählt sein sollen, so *ist ein imaginäres Element eindeutig definirbar durch drei reelle Elemente* $\{ABA'\}$, wenn, B' durch $(AA'BB') = -1$ gegeben, A, A' und B, B' der Involution F_1, F_2 angehören und die Aufeinanderfolge ABA' den Sinn der Involution angibt. Es ist hievon nur ein specieller Fall, wenn wir statt F_1, F_2 das zum Centralpunkt bez. zu den Axen symmetrische Paar als die reellen Stellvertreter $\{FF'\}$ einführen (l. c.).

Vielmehr erhellt deutlich, dafs man jedes beliebige Element A der Reihe bez. des Büschels als Anfangselement einer Darstellung desselben imaginären Elements nehmen kann, indem A', B, B' dazu eindeutig folgen durch $(F_1F_2AA') = (F_1F_2BB') = (AA'BB') = -1$ oder mittelst der perspectivischen Rechtwinkelinvolution. Hierauf beruht die Möglichkeit, die elementaren geometrischen Operationen mit den die Involutionen oder imaginären Elemente definirenden harmonischen Gruppen vorzunehmen. Sind zwei nicht-conjugirte imaginäre Punkte F_1, G_1 definirt durch $\{ABA'\}$, $\{A^*B^*A^{*\prime}\}$ und ist C der Schnittpunkt der Träger ihrer Involutionen, so stelle man F_1, G_1 durch harmonische Gruppen $\{CDC'\}$, $\{CD^*C^{*\prime}\}$ mit dem Anfangspunkt C dar; dann bestimmen DD^*, $C'C^{*\prime}$ einen Punkt O, durch den auch $D'D^{*\prime}$ geht wegen $(CC'DD') = (CC^{*\prime}D^*D^{*\prime})$; also sind die Involutionen perspectivisch für das Centrum O, so dafs auch F_1G_1 durch O geht und dargestellt ist durch $\{O\,.\,CDC'\}$. Genau die dualistische Construction liefert zu zwei imaginären Strahlen die Darstellung des Schnittpunktes vom Verbindungsstrahl der Scheitel aus.

Bei jeder projectivischen Zuordnung von Elementargebilden, nach welcher reellen Elementen reelle entsprechen, entsprechen auch imaginären Elementen F_1, F_2 imaginäre G_1, G_2, und zwar sind auch in den reellen Darstellungen derselben gleichbedeutende Elemente homolog, sobald die Anfangselemente homolog gewählt sind, einfach infolge der Doppelverhältnisgleichheiten.

Immerhin bleibt die speciell jener Darstellung zu Grunde liegende analytische Beziehung besonders bequem.

Wir können leicht das Element F_1 von gegebenem complexen Doppelverhältniswert construiren. Die Elemente $G'M\ GM'$ von den Doppelverhältnissen $\mu - \nu$, $\mu + \nu$; μ, ∞ bilden eine offenbar harmonische Gruppe in der Involution, deren Doppelelemente zu den durch (§ 92)

$$\begin{vmatrix} \lambda^2, & -\lambda, & 1 \\ \mu^2-\nu^2, & -\mu, & 1 \\ 2\mu, & -1, & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\mu\lambda + \mu^2 + \nu^2 = 0$$

bestimmten Doppelverhältniswerten $\mu \pm \nu i$ gehören. So können wir auch Elemente von complexen projectivischen Coordinaten ganz analog wie aus Cartesischen reell darstellen.

B. 1) Die Strahlen absoluter Richtung durch F_1, F_2 oder $\alpha \pm \beta i \mid \gamma \pm \delta i$ schneiden sich in den associirten Scheiteln[16]) O_1, O_2 oder $\alpha \mp \delta \mid \gamma \pm \beta$, rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt. In der Rechtwinkelinvolution an diesen Scheiteln ist eine Axe dem geraden Träger parallel und das symmetrische Strahlenpaar geht nach $\alpha \pm \beta \mid \gamma \pm \delta$, dem symmetrischen Punktepaar F, F' der F_1, F_2 definirenden Involution $(x-\alpha)(x'-\alpha)+\beta^2=0$, $(y-\gamma)(y'-\gamma)+\delta^2=0$. Bezogen auf diese symmetrischen Elementenpaare ist die Parametergleichung der Rechtwinkelinvolutionen sowie der involutorischen Reihe $\lambda\lambda' + 1 = 0$.

Nehmen wir anderseits F, F' als Doppelpunkte der Involution $(x-\alpha)(x'-\alpha)-\beta^2=0$, $(y-\gamma)(y'-\gamma)-\delta^2=0$, so sind O_1, O_2 Scheitel der perspectivischen symmetrischen Involutionen, deren Parametergleichung zugleich mit der der Reihe lautet $\lambda + \lambda' = 0$, bezogen auf die Doppelelemente.

2) Die Paare der Verbindungslinien eines beliebigen Punktes mit den Doppelpunkten F_1, F_2 und den Scheiteln O_1, O_2 haben dieselben Winkelhalbirenden. Denn vom Nullpunkt aus gehen die Paare

$$(\gamma^2 + \delta^2)\, x^2 - 2\,(\alpha\gamma + \beta\delta)\, xy + (\alpha^2 + \beta^2)\, y^2 = 0$$
$$(\gamma^2 - \beta^2)\, x^2 - 2\,(\alpha\gamma + \beta\delta)\, xy + (\alpha^2 - \delta^2)\, y^2 = 0$$

mit den Winkelhalbirenden (vgl. § 91)

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)\,(y^2 - x^2) - 2\,(\gamma^2 + \delta^2 - \alpha^2 - \beta^2)\, xy = 0.$$

3) Die Involutionen $(x - \alpha)(x' - \alpha) + \beta^2 = 0$ in der x-Axe, $(y - \gamma)(y' - \gamma) + \delta^2 = 0$ in der y-Axe werden vom Nullpunkt aus dargestellt durch die harmonischen Paare $0, \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}$; $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha \pm \beta}$ bez. $0, \frac{\gamma^2+\delta^2}{\gamma}$; $\frac{\gamma^2+\delta^2}{\gamma \pm \delta}$. Die zu denselben perspectivischen Strahlenpaare aus $\delta \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\delta - \beta\gamma} \,\Big|\, \beta \frac{\gamma^2+\delta^2}{\beta\gamma - \alpha\delta}$ definiren die Involution

$$(\alpha^2+\beta^2)\xi\xi' + \alpha(\xi+\xi') + 1 = 0, \quad (\gamma^2+\delta^2)\eta\eta' + \gamma(\eta+\eta') + 1 = 0.$$

97. Wir nehmen mit den neu gewonnenen Begriffen die in § 91 abgebrochene Theorie der allgemeinen Projectivität ebener Gebilde wieder auf und untersuchen zunächst *die Doppelelemente der Collineation.* Setzen wir in den Substitutionen $\mu x_i = \Sigma \alpha_{ik} x_k'$, $\nu \xi_i' = \Sigma \alpha_{ki} \xi_k$ die Coordinaten x_i, ξ_i und x_i', ξ_i' auf dasselbe Fundamentalsystem bezogen voraus, so folgen die sich selbst entsprechenden Elemente aus $x_i' = x_i$, $\xi_i' = \xi_i$, d. h. aus den Gleichungen

$$-\mu x_i + \Sigma \alpha_{ik} x_k = 0, \quad -\nu \xi_i + \Sigma \alpha_{ki} \xi_k = 0.$$

Dieselben sind jedoch nur verträglich, wenn μ bez. ν aus der Resultante, einer cubischen Gleichung, berechnet werden

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \mu, & \alpha_{12} & , \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & , \alpha_{22} - \mu, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & , \alpha_{32} & , \alpha_{33} - \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \nu, & \alpha_{21} & , \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & , \alpha_{22} - \nu, & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & , \alpha_{23} & , \alpha_{33} - \nu \end{vmatrix} = 0,$$

oder mit den Bezeichnungen A_{ii} und Δ von § 88

$$R = \mu^3 - (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\,\mu^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})\,\mu - \Delta = 0.$$

Zu jeder Wurzel derselben liefert das erste bez. zweite Gleichungssystem die Coordinaten eines Doppelelements, und zwar hängt die Realität desselben von der jener Wurzel ab. *Es existiren daher drei Doppelpunkte und drei Doppellinien, von denen je ein Element stets reell ist, während die beiden andern reell oder conjugirt imaginär sein können.*

Die Doppelelemente sind Ecken und Seiten desselben Hauptdreiecks der Collineation. In der Tat ist klar, dafs die drei Verbindungsgeraden je zweier Doppelpunkte, ebenso die drei Schnittpunkte je zweier Doppellinien sich auch selbst entsprechen, und zwar sind sie die Träger vereinigter projectivischer Reihen bez. Büschel der Collineation. Aber jede Wurzel $\mu = \nu$ liefert speciell gegenüberliegende Elemente des Hauptdreiecks. Denn sind $\mu = \varrho$, $\nu = \sigma$ verschiedene Wurzelwerte und $x_i^{(\varrho)}$, $\xi_i^{(\sigma)}$ die Coordinaten der zugehörigen Doppelelemente, so liegen diese in einander, da identisch $0 = \Sigma \xi_i^{(\sigma)}(-\varrho x_i^{(\varrho)} + \Sigma \alpha_{ik} x_k^{(\varrho)}) - \Sigma x_i^{(\varrho)}(-\sigma \xi_i^{(\sigma)} + \Sigma \alpha_{ki} \xi_k^{(\sigma)})$ $= (\sigma - \varrho) \cdot \Sigma \xi_i^{(\sigma)} x_i^{(\varrho)}$ ist. Ferner ist alsdann $\mu \Sigma \xi_i^{(\sigma)} x_i$ $= \Sigma(\xi_i^{(\sigma)} \Sigma \alpha_{ik} \xi_k') = \Sigma(x_k' \Sigma \alpha_{ik} \xi_i^{(\sigma)}) = \sigma \Sigma \xi_k^{(\sigma)} x_k'$, d. h. die linearen Functionen $\xi_x^{(\sigma)}$, $x_\xi^{(\varrho)}$ ändern sich infolge der linearen Substitutionen nur um je eine Wurzel von $R = 0$ als Factor. Führen wir also *das Hauptdreieck als Coordinatendreieck* ein, so erhalten die Substitutionen die einfache Gestalt von § 90 III

$$\mu x_i = \alpha_i x_i', \quad \nu \xi_i' = \alpha_i \xi_i,$$

wo α_1, α_2, α_3 die Wurzeln von $R = 0$ sind. Es ist hieraus evident, dafs, nach Angabe der drei Doppelelemente, die Collineation bestimmt wird durch ein weiteres Paar homologer Elemente.

Diese Darstellung kommt insbesondere dem Fall der Projectivität mit reellem Hauptdreieck zu. In dem Fall, dafs nur eine Ecke und die Gegenseite reell sind, erhalten die reducirten Substitutionen zwei complexe Coefficienten, daher reelle Punkte im allgemeinen complexe Coordinaten. Reelle Darstellung kann man durch Wahl eines Dreiecks, das die reellen Elemente des Hauptdreiecks als $\xi_3 = 0$, $x_3 = 0$ enthält, erreichen mit $\alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = \alpha_{31} = 0$, worauf die übrigen Elemente definirt sind als die Doppelelemente der vereinigten projectivischen Elementargebilde

$$\alpha_{21} x_1 x_1' + \alpha_{22} x_2 x_1' - \alpha_{11} x_1 x_2' - \alpha_{12} x_2 x_2' = 0.$$

Besondere Collineationen entspringen, falls $R = 0$ zwei gleiche Wurzeln oder eine dreifache Wurzel hat. Unter der ersten Annahme fallen zwei von den Ecken, also auch deren

Gegenseiten des Hauptdreiecks zusammen und bilden eine zweifache Ecke und Seite; die dritte Ecke ist ein Punkt der zweifachen Doppellinie, die dritte Seite geht durch den zweifachen Doppelpunkt. Bei der zweiten Voraussetzung reducirt sich das Dreieck auf einen dreifachen Punkt und eine dreifache Gerade durch ihn. Zwischen den Substitutionscoefficienten müssen in diesen Fällen eine bez. zwei Relationen bestehen.

B. Man untersuche die fünf Arten der Collineation

I. $\mu x_1 = \alpha_1 x_1', \quad \mu x_2 = \alpha_2 x_2', \quad \mu x_3 = \alpha_3 x_3'$

a) mit ungleichen α_i, b) wenn zwei derselben gleich sind;

II. $\mu x_1 = \alpha_1 x_1', \quad \mu x_2 = \alpha_2 x_2', \quad \mu x_3 = x_2' + \alpha_2 x_3'$

a) für α_1, α_2 verschieden, b) für $\alpha_1 = \alpha_2$;

III. $\mu x_1 = \alpha_1 x_1', \quad \mu x_2 = x_1' + \alpha_1 x_2', \quad \mu x_3 = x_2' + \alpha_1 x_3'$.

98. **Central-Collineation.** Von besonderem Interesse ist der Fall, wo die Gleichungssysteme zur Bestimmung der Coordinaten der Doppelelemente mit je einer einzigen Gleichung $\alpha_x = 0$, bez. $\beta_\xi = 0$ äquivalent werden, nach Einsetzung einer Wurzel $\mu = m$ der Resultante. Dazu ist notwendig und hinreichend, dafs die sämmtlichen Unterdeterminanten von R für $\mu = m$ verschwinden. Bei Erfüllung dieser Bedingung sind drei homogene Gleichungen von der Coefficientendeterminante R bis auf constante Factoren identisch, so dafs man die α_{ik} durch sechs Gröfsen α_i, β_i ausdrücken kann

$$\begin{array}{lll} -m + \alpha_{11} = \alpha_1 \beta_1, & \alpha_{21} = \alpha_1 \beta_2, & \alpha_{31} = \alpha_1 \beta_3, \\ \alpha_{12} = \alpha_2 \beta_1, & -m + \alpha_{22} = \alpha_2 \beta_2, & \alpha_{32} = \alpha_2 \beta_3, \\ \alpha_{13} = \alpha_3 \beta_1, & \alpha_{23} = \alpha_3 \beta_2, & -m + \alpha_{33} = \alpha_3 \beta_3, \end{array}$$

und die Substitutionen reduciren sich auf

IV. $\mu x_i = m x_i' + \beta_i \alpha_{x'}, \quad \nu \xi_i' = m \xi_i + \alpha_i \beta_\xi$.

Gleichzeitig geht der Ausdruck für die Resultante über in

$$R = (\mu - m)^2 (m + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 - \mu) = 0,$$

so dafs $\mu = m$ sich als eine Doppelwurzel der Gleichung $R = 0$ erweist.

Die einfache Wurzel $\mu = m + \Sigma \alpha_i \beta_i = m_0$ ergibt die Gleichungssysteme $m_0 x_i = \beta_i \alpha_x$, $m_0 \xi_i = \alpha_i \beta_\xi$, also den reellen

Doppelpunkt S und die reelle Doppellinie s von den Coordinaten

$$x_1^{(0)} : x_2^{(0)} : x_3^{(0)} = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3, \quad \xi_1^{(0)} : \xi_2^{(0)} : \xi_3^{(0)} = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3.$$

Zu der Doppelwurzel m dagegen gehören unendlich viele Doppelelemente, nämlich alle Punkte in der Geraden $\alpha_x = 0$ oder in der Doppellinie s, alle Strahlen durch den Punkt $\beta_\xi = 0$ oder durch den Doppelpunkt S als sich selbst entsprechend.

Man nennt den geraden Träger s der Punkt für Punkt sich selbst entsprechenden Reihe die *Axe*, und den Scheitel S des Strahl für Strahl sich selbst entsprechenden Büschels das *Centrum* der besondern Collineation. Diese durch drei Coefficientenbedingungen ausgezeichnete Projectivität heifst *centrische Collineation* (Homologie) oder man spricht *von projectivischen Systemen in collinearer oder perspectivischer Lage.* In der Tat sind homologe Reihen der beiden Systeme perspectivisch mit dem Centrum S und homologe Büschel perspectivisch mit der Axe s. Denn:

da jeder Strahl aus dem Collineationscentrum S sich selbst entspricht, liegen homologe Punkte P, P' mit S in einer Geraden. Jeder Strahl durch S ist somit der Träger von zwei projectivischen Reihen, deren Doppelpunkte S selbst und der Schnittpunkt P_0 mit der Axe s sind. Infolgedessen bestimmt jedes Paar homologer Punkte mit dem Centrum und dem Schnittpunkt der Axe eine Reihe von constantem Doppelverhältnis (§ 95).

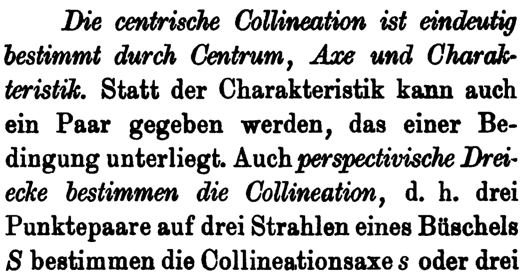
da jeder Punkt auf der Collineationsaxe s sich selbst entspricht, schneiden sich homologe Gerade p, p' mit s in einem Punkt. Jeder Punkt in s ist somit der Scheitel von zwei projectivischen Büscheln, deren Doppelstrahlen s selbst und die Verbindungsgerade p_0 mit dem Centrum S sind. Infolgedessen bestimmt jedes Paar homologer Strahlen mit der Axe und dem Strahl nach dem Centrum ein Büschel von constantem Doppelverhältnis.

Es ist aber auch

$$(SP_0PP') = (sp_0p'p) = \text{const.},$$

weil die Verbindungsgeraden der Punkte P, P' mit einem Punkt von s oder die Schnittpunkte der Strahlen p, p' mit

einem Strahl aus S ebenfalls homolog sind. Diesen Doppelverhältniswert, der alle projectivischen Elementargebilde von vereinigter Lage beherrscht, bezeichnet man als *die Charakteristik δ der centrischen Collineation.*



Die centrische Collineation ist eindeutig bestimmt durch Centrum, Axe und Charakteristik. Statt der Charakteristik kann auch ein Paar gegeben werden, das einer Bedingung unterliegt. Auch *perspectivische Dreiecke bestimmen die Collineation,* d. h. drei Punktepaare auf drei Strahlen eines Büschels S bestimmen die Collineationsaxe s oder drei Strahlenpaare aus drei Punkten einer Reihe s bestimmen das Collineationscentrum S (vgl. § 64. 4)).

Die einfachste analytische Ausdrucksform collinearer Systeme in perspectivischer Lage ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : \frac{1}{\delta} x_3', \quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \xi_1' : \xi_2' : \delta \xi_3'.$$

Denken wir nämlich das Centrum S als die Ecke $0 \mid 0 \mid 1$, die Axe s als die Gegenseite $x_3 = 0$ des Fundamentaldreiecks, so können wir dasselbe als reelles Hauptdreieck (§ 97) betrachten, also die Substitutionen III annehmen, und müssen nur noch die Identität der projectivischen Gebilde der Träger S und s, also $x_1 : x_2 = x_1' : x_2'$ verlangen; in der Tat ist dann $\delta = (A_2 \cdot A_3 A_1 P P') = \frac{x_1 : x_3}{x_1' : x_3'} = \frac{\xi_1' : \xi_3'}{\xi_1 : \xi_3}$.

Man kann die Centralcollineationen nach dem Werte von δ classificiren und erhält insbesondere *für die Werte* $\delta = 0, \infty, 1$ *specielle Collineationen.* Von ausgezeichneter Bedeutung sind jedoch namentlich die Centralcollineationen von der Charakteristik -1. In diesen sind die vereinigten projectivischen Reihen und Büschel involutorisch; *somit entsprechen überhaupt die homologen Elemente der collinearen Systeme einander vertauschbar* (§ 93). Man nennt diese Centralcollineation harmonisch oder involutorisch oder *die Involution der ebenen collinearen Systeme.* Analytisch kann sie durch den

Vorzeichenwechsel einer einzigen Coordinate x_i, ξ_i dargestellt werden, nämlich für $x_i = 0$ als Axe und $\xi_i = 0$ als Centrum der Involution.

Um die allgemeine Bedingung der Involution zu erkennen, benutzen wir die aus den anfänglich gebrauchten Substitutionen entspringenden Relationen $\mu\alpha_x = m_0\alpha_{x'}$, $\nu\beta_{\xi'} = m_0\beta_\xi$ zur Umformung jener Substitutionen in

$$mm_0 x_i' = \mu m_0 x_i - \mu\beta_i\alpha_x, \quad mm_0\xi_i = \nu m_0\xi_i' - \nu\alpha_i\beta_{\xi'}.$$

Bilden wir auch die Auflösungen, so erkennen wir, dafs die rechten Seiten der Substitutionen bei Vertauschung von x_i, ξ_i' mit x_i', ξ_i sich dann nur um einen constanten Factor ändern, wenn $m_0 = -m$ oder $2m = \Sigma\alpha_i\beta_i$ ist. *Also ist die Bedingung der Involution die, dafs die Unterdeterminanten von R verschwinden und die einfache und die doppelte Wurzel von $R = 0$ entgegengesetzt gleich sind.*

B. Als Coefficientenbedingungen der Centralcollineation ergeben sich, sobald man die Coefficienten der Gleichungen $-mx_i + \Sigma\alpha_{ik}x_k = 0$ einander wirklich proportional setzt, die drei
$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} = \alpha_{21}\alpha_{13}\alpha_{32}$,

$$\alpha_{11} - \frac{\alpha_{21}\alpha_{13}}{\alpha_{23}} = \alpha_{22} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{31}} = \alpha_{33} - \frac{\alpha_{13}\alpha_{32}}{\alpha_{12}} = m.$$

99. Wir legen weiterhin den Untersuchungen der Collineation rechtwinklige Parallelcoordinaten zu Grunde, um die Beziehungen zum Unendlichfernen der Ebene einfach darstellen zu können. Die allgemeinen linearen Substitutionen behalten wir unverändert bei, denken uns nur x_3, ξ_3; x_3', ξ_3' durch 1 ersetzt (§ 73). Nun hängt die allgemeine Transformation der rechtwinkligen Coordinaten von drei Constanten $x_0 \mid y_0$; φ ab (§ 12); wendet man sie also auf das eine von zwei collinearen Systemen an, so mufs sich über jene so verfügen lassen, dafs die sechs Constanten der neuen Collineation die drei Bedingungen der perspectivischen Lage erfüllen. *Also können je zwei collineare ebene Systeme durch Parallelverschiebung und Drehung in ihrer Ebene stets in perspectivische Lage gebracht werden.*

Eine beliebige Lagenänderung des Systems $x \mid y$ verwandelt die gegebene Collineation in die neue

$$\mu(x_0 + x\cos\varphi - y\sin\varphi) = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13},$$
$$\mu(y_0 + x\sin\varphi + y\cos\varphi) = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23},$$
$$\mu \qquad\qquad\qquad\qquad = \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}.$$

Damit für $x = x'$, $y = y'$, $\mu = m$ alle Unterdeterminanten der Resultante R verschwinden, müssen fünf Gröfsen $\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \alpha$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \alpha'$, $\frac{\beta_1}{\beta_3} = \beta$, $\frac{\beta_2}{\beta_3} = \beta'$, $\alpha_3 = \varrho$ $(\beta_3 = 1)$ so eingeführt werden können, dafs die Bedingungen erfüllt sind

$$\alpha_{11} - m\cos\varphi = \varrho\alpha\beta\;,\quad \alpha_{21} - m\sin\varphi = \varrho\alpha\beta'\,,\quad \alpha_{31} = \varrho\alpha\,,$$
$$\alpha_{12} + m\sin\varphi = \varrho\alpha'\beta,\quad \alpha_{22} - m\cos\varphi = \varrho\alpha'\beta,\quad \alpha_{32} = \varrho\alpha',$$
$$\alpha_{13} - mx_0 = \varrho\beta\;,\quad \alpha_{23} - my_0 = \varrho\beta'\;,\quad \alpha_{33} - m = \varrho\;,$$

und zwar sind dann $\alpha \mid \alpha'$ und $\beta \mid \beta'$ die Coordinaten der Axe und des Centrums der Collineation in Bezug auf das alte System.

Nun ergeben sich ϱ, $x_0 \mid y_0$ aus den Gleichungen der letzten Zeile, wenn m, β, β' gefunden sind. Aus den beiden ersten Zeilen folgt

$$m(\alpha_{32}\cos\varphi + \alpha_{31}\sin\varphi) = \alpha_{11}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{31} = \mathrm{A}_{23},$$
$$m(\alpha_{32}\sin\varphi - \alpha_{31}\cos\varphi) = \alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31} = \mathrm{A}_{13},$$

also
$$m^2 = \frac{\mathrm{A}_{13}^2 + \mathrm{A}_{23}^2}{\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2},$$

$$m\cos\varphi = \frac{\alpha_{32}\mathrm{A}_{23} - \alpha_{31}\mathrm{A}_{13}}{\alpha_{32}^2 + \alpha_{31}^2},\quad m\sin\varphi = \frac{\alpha_{32}\mathrm{A}_{13} + \alpha_{31}\mathrm{A}_{23}}{\alpha_{32}^2 + \alpha_{31}^2}.$$

Mittelst m lassen sich dann α, α', β, β' linear ausdrücken

$$\alpha = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33} - m},\quad \beta = \frac{(\alpha_{11} - \alpha_{22})\,\alpha_{31} + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\,\alpha_{32}}{\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2},$$

$$\alpha' = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33} - m},\quad \beta' = \frac{(\alpha_{22} - \alpha_{11})\,\alpha_{32} + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\,\alpha_{31}}{\alpha_{32}^2 + \alpha_{31}^2}.$$

Allein m selbst ist nur bis auf das Vorzeichen bestimmt und zu $\pm m$ gehören zwei um π verschiedene Winkel φ. *Daher ist die Überführung collinearer Systeme in collineare Lage im allgemeinen auf doppelte Weise möglich.* Für beide ist das Collineationscentrum $\beta \mid \beta'$, als von m unabhängig, das nämliche, die beiden Collineationsaxen $\alpha \mid \alpha'$ sind verschieden, jedoch

parallel, als von den Gleichungen $\alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{23} = \pm m$. Eine Ausnahme machen nur die Collineationen $\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$, deren Cartesische Gleichungen wegen

$$\mu = 0 \cdot x' + 0 \cdot y' + \alpha_{33} \qquad \text{sind}$$

$$\alpha_{33}x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}, \quad \alpha_{33}y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}$$

und die man als *Affinitäten* bezeichnet. Sie sind (vgl. § 90) durch zwei homologe Dreiecke bestimmt. Die geometrische Bestimmung unserer Lagenveränderung führt sogleich auf sie zurück.

Dieselbe erhellt folgendermafsen. Der unendlich fernen Geraden entsprechen, je nachdem wir sie als q oder r' zum System der x_i oder der x_i' rechnen, die beiden *Gegenaxen der Systeme* q' und r

$$\alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33} = 0, \quad \mathsf{A}_{13}x + \mathsf{A}_{23}y + \mathsf{A}_{33} = 0.$$

Denken wir aber die Centralcollineation hergestellt, so sind die Gegenaxen der perspectivischen Systeme der Collineationsaxe parallel, da sie zur unendlich fernen Geraden homolog sind. *Also ist die Gröfse der auszuführenden Drehung durch den Winkel φ zwischen den Gegenaxen der collinearen Systeme bis auf den Sinn bestimmt* (Probe für $\tan\varphi$ nach § 31). Für eine Affinität fallen wegen $\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$, $\mathsf{A}_{13} = \mathsf{A}_{23} = 0$ die Gegenaxen in der unendlich entfernten Geraden der Ebene zusammen, die auch die eine der Lösung $\mu = \alpha_{33}$ der cubischen Gleichung des § 97 entsprechende Doppelgerade der Systeme ist. Parallelen Geraden des einen entsprechen parallele des andern Systems und zweimal stimmen entsprechende Richtungen überein. Alle homologen Strahlenpaare sind als den Gegenaxen parallel anzusehen und der Winkel der Gegenaxen ist unbestimmt. Sind A, B, C drei Punkte einer Geraden von der Richtung Q und A', B', C' die entsprechenden in ihrer homologen von der Richtung Q', so liefert die Doppelverhältnisgleichheit $(ABCQ) = (A'B'C'Q')$ die Proportionalität $AC : BC = A'C' : B'C'$ oder die Ähnlichkeit homologer Reihen. Die Richtungen der Gegenaxen q' und r sind auch im allgemeinen Falle homolog, also entspricht

einem zu q' parallelen Strahl p' ein zu r paralleler Strahl p und zwar ergeben sich als deren Gleichungen leicht

$$\alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33} = c, \quad \mathsf{A}_{13}x + \mathsf{A}_{23}y + \mathsf{A}_{33} = \frac{\Delta}{c}.$$

Somit sind die zur Gegenaxe ihres Systems parallelen homologen Punktreihen ähnlich (§ 92). Es mufs unter denselben sogar congruente homologe Reihen geben, denn die Collineationsaxe kann nur infolge der Deckung von zwei solchen sich Punkt für Punkt selbst entsprechen. *Deshalb gibt es zwei Paare congruenter homologer Reihen von den Trägern*

$$\alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33} = \pm m, \quad \mathsf{A}_{13}x + \mathsf{A}_{23}y + \mathsf{A}_{33} = \pm \frac{\Delta}{m},$$

denn mit jeder der ersteren kann die Collineationsaxe s nach der obigen Verschiebung vereinigt sein. Gehört s zu dem Werte $+ m$, so entspricht dem Werte $- m$ eine Parallele $\mathfrak{r}'$, die mit ihrer homologen $\mathfrak{r}$ zur Deckung gelangt, sobald man das System derselben noch eine Drehung π um das Collineationscentrum ausführen läfst; also durchlaufen homologe Elemente $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ in entgegengesetztem Sinne. Nach Ausführung der Drehung φ ist die Gröfse der noch erforderlichen Parallelverschiebung des einen collinearen Systems dadurch eindeutig bestimmt, dafs die beiden congruenten homologen Reihen von gleichem Sinn zur Deckung kommen. Im Fall affiner Systeme wird eine Ähnlichkeitstransformation der einen genügen, um zwei bekannte homologe Reihen congruent zu machen und durch ihre Deckung die perspectivische Lage der Systeme herbeizuführen.

Im Vorigen ist die allgemeinste Collineation ebener Systeme auf die Centralcollineation zurückgeführt, in welcher die Gegenaxen ausgezeichnet verwendbar sind. *Die Centralcollineation ist durch Centrum S, Axe s und eine der Gegenaxen r, $q' \parallel s$ bestimmt* (vgl. Fig. § 98), denn das charakteristische Doppelverhältnis δ ist für die letzteren auf einfache Teilverhältnisse reducirt $\delta = \frac{SR}{R_0 R} = \frac{Q_0 Q'}{SQ'}$. Die Constructionen vereinfachen sich durch den Satz: Der Gegenpunkt R bez. Q' einer jeden Geraden p bez. p' bestimmt mit dem

Centrum einen Parallelstrahl zu der homologen Geraden p' bez. p. Endlich ist die Bemerkung nützlich, dafs die durch das Centrum gehende Axenparallele t ähnliche homologe Reihen trägt, da ihre Doppelpunkte ∞, S sind oder $\delta = ST : ST'$ ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung der ebenen Involution ist das Zusammenfallen der Gegenaxen r, q' (vgl. § 93). Alsdann sind homologe Punkte der Geraden t in Bezug auf S symmetrisch (§ 95).

B. 1) Die Centralcollineation vom Centrum $\beta \mid \beta'$, der Axe $\alpha x + \alpha' y + 1 = 0$ und der Gegenaxe r $\alpha x + \alpha' y + 1 + m = 0$ hat die Substitutionen

$$x' = \frac{mx + \beta(\alpha x + \alpha' y + 1)}{m + \alpha x + \alpha' y + 1}, \quad y' = \frac{my + \beta'(\alpha x + \alpha' y + 1)}{m + \alpha x + \alpha' y + 1},$$

die Gegenaxe q' $\alpha(x' - \beta) + \alpha'(y' - \beta') - m = 0$ und die Charakteristik $\delta = 1 + \frac{\alpha\beta + \alpha'\beta' + 1}{m}$. Liegt das Centrum in der Axe, so wird $\delta = +1$ (§ 95) und die Gegenaxen sind von beiden äquidistant $\alpha x + \alpha' y + 1 \pm m = 0$.

2) Die einfachste Ausdrucksform der perspectivischen Affinität wird das System der Streifencoordinaten liefern, wenn man den unendlich fernen Fundamentalpunkt zum Centrum und die Gegenseite des Fundamentaldreiecks zur Axe wählt. Man bildet sie nach § 98.

100. Die in der Elementargeometrie bekannten einfachen Formen der Collineation ergeben sich aus den *besonderen Centralcollineationen, in denen das Centrum oder die Axe oder beide unendlich fern sind.* Die in diesem elementaren Sinn perspectivischen Figuren haben zugleich gewisse von der Lage unabhängige Eigenschaften. Daher umfafst man das ganze Gebiet der elementaren Verwandtschaften, wenn man von jenen homologen Figuren noch die eine einer allgemeinen Lagenveränderung unterwirft. Den analytischen Ausgangspunkt bilden die homogenen Substitutionen IV. $\mu x_i = m x_i' + \beta_i \alpha_x$ der Collineation mit dem Centrum β_i und der Axe α_i, unter Specialisirung ($x_3 = x_3' = 1$) für rechtwinklige Coordinaten.

Dabei erfordert die Annahme eines unendlich fernen Centrums $\beta_3 = 0$ die einer unendlich fernen Axe $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, so dafs die dritte Gleichung übergeht in $\mu = m$, bez. $\mu = m + \beta_3 \alpha_3$,

jedenfalls eine Constante. Somit sind, auch nach Aufhebung der perspectivischen Lage, *die elementaren Verwandtschaften durch Substitutionen linearer ganzer Functionen für $x \mid y$ charakterisirt,* also (vgl. § 99 den Fall der Affinität) mit $\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$, $\alpha_{33} = 1$, durch

$$x = \alpha_{11} x' + \alpha_{12} y' + \alpha_{13}, \quad y = \alpha_{21} x' + \alpha_{22} y' + \alpha_{23}.$$

Daher besitzen sie, wenn sie nicht perspectivisch sind, nur *einen* Doppelpunkt in Endlichen, den obige Gleichungen für $x = x'$, $y = y'$ definiren, dagegen zwei unendlich ferne Doppelpunkte, deren Richtungscoefficienten $\tan \vartheta$ erhalten werden als die der Doppelstrahlen der projectivischen Büschel $x = \alpha_{11} x' + \alpha_{12} y'$, $y = \alpha_{21} x' + \alpha_{22} y'$ (§ 92), also als die Wurzeln (§ 95) von

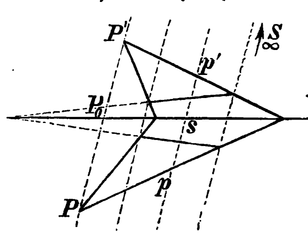
$$\alpha_{12} \tan^2 \vartheta + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) \tan \vartheta - \alpha_{21} = 0.$$

Das Hauptdreieck wird von den Strahlen dieser Richtungen, aus dem endlichen Doppelpunkt und der unendlich fernen Geraden gebildet.

Sei 1) *das Centrum S ein unendlich ferner Punkt,* also $\beta_3 = 0$, so lauten mit $\beta_1 = m\beta$, $\beta_2 = m\beta'$, $\alpha_i = \alpha \mid \alpha' \mid 1$ die Substitutionen

$$x - x' = \beta(\alpha x' + \alpha' y' + 1), \; y - y' = \beta'(\alpha x' + \alpha' y' + 1),$$

enthalten also nur noch vier Constanten, von denen zwei die Axe, eine $\beta' : \beta$ die Richtung des Centrums, die vierte δ bestimmt. Homologe Punkte liegen auf parallelen Strahlen (Richtung S) und bilden ähnliche Reihen mit dem Doppelpunkt in s und dem Verhältnis $\delta = (\infty P_0 P P') = P_0 P' : P_0 P$, während homologe Gerade sich auf s schneiden. Man nennt diese Verwandtschaft *perspectivische Affinität.*



Die Affinität wird für $\delta = P_0 P' : P_0 P = -1$ involutorisch und die Bedingung der Involution (§ 98 Schlufs) reducirt die vier Constanten auf drei durch die Relation

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + 2 = 0.$$

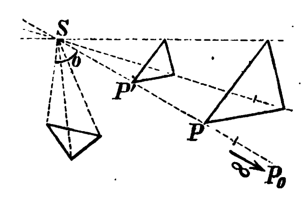
Homologe Punkte liegen auf den Parallelen aus S symmetrisch zu s, homologe Strahlen sind bezüglich s und der Richtung S harmonisch conjugirt. Die Verwandtschaft charakterisirt sich so als *schiefe axiale Symmetrie der Figuren.* Unter der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ wird sie zur gewöhnlichen orthogonalen Symmetrie.

Endlich erhalten wir für $\delta = +1$ eine specielle Affinität, deren Centrum die Richtung der Axe ist: $\beta' : \beta = -\alpha : \alpha'$. Die affinen Figuren, deren homologe Punkte auf Parallelen zur Axe liegen, sind *flächengleich*, wie geometrisch evident ist und analytisch aus der Gleichheit der Coordinatendeterminanten von Punkten und ihren drei homologen folgt. *Die Verwandtschaft flächengleicher Figuren* ist durch die Axe und ein Punktepaar auf einer Axenparallelen bestimmt.

Nehmen wir die x-Axe als Affinitäts- bez. Symmetrieaxe, so erhalten wir aus IV für $\alpha_i = 0 \mid 1 \mid 0$, $\beta_3 = 0$ die Substitutionen der Affinität $x = x' + \beta y'$, $y = (1 + \beta')y'$ und die der Symmetrie $x = x' + \beta y'$, $y = -y'$,*) dagegen für $\alpha_i = 0 \mid 1 \mid 0$, $\beta_i = 1 \mid 0 \mid 0$ die der Flächengleichheit $x = x' + \frac{1}{m}y'$, $y = y'$. Demnach sind *affine Gebilde in allgemeiner Lage* zu definiren durch

$$x \cos\varphi - y \sin\varphi + x_0 = x' + \beta y'$$
$$x \sin\varphi + y \cos\varphi + y_0 = (1 + \beta')y'.$$

Sei 2) *die unendlich ferne Gerade die Collineationsaxe s*, also $\alpha_i = 0 \mid 0 \mid 1$, so ergeben sich mit $\beta_i = m\beta \mid m\beta' \mid 1$ und $m + 1 : m = \sigma$ die Substitutionen



$$\sigma x = x' + \beta,\quad \sigma y = y' + \beta' \text{ mit}$$
$$\frac{\beta}{\sigma - 1} \,\Big|\, \frac{\beta'}{\sigma - 1}$$

als Centrum. Somit sind die Coordinatendifferenzen homologer Punktepaare d. h. homologe Strecken pro-

*) In schiefwinkligen Coordinaten mit $\beta_i = 0 \mid 1 \mid 0$ noch einfacher $x = x'$, $y = \left(1 + \frac{1}{m}\right)y'$, bez. $y = -y'$.

portional. Auch ist $\delta = (S\infty PP') = SP:SP'$ und homologe Gerade schneiden sich im Unendlichen. Die collinearen Systeme sind also *ähnlich und ähnlich gelegen* (*homothetisch*) *mit* S *als Ähnlichkeitscentrum und* $\sigma = 1:\delta$ *als Ähnlichkeitsverhältnis* (*Verjüngungsmafsstab*).

Diese Verwandtschaft wird für $\delta = -1$ zur Involution, d. h. die homologen Punkte liegen in Bezug auf S symmetrisch. *Also ist centrische Symmetrie ebener Systsme involutorische Ähnlichkeit derselben in ähnlicher Lage.* Die Substitutionen der Symmetrie in Bezug auf $\beta_1 | \beta_2$ sind $x + x' = 2\beta_1$, $y + y' = 2\beta_2$.

Seien endlich 3) *Centrum und Axe der Collineation unendlich fern, so sind die collinearen Systeme zugleich affin und homothetisch, also congruent in paralleler Lage.* Denn homologe Punkte liegen auf Strahlen gleicher Richtung und homologe Gerade sind parallel, also homologe Strecken gleich. In der Tat liefert die Annahme $\delta = 1 : \sigma = +1$, $\beta = x_0$, $\beta' = y_0$ die Substitutionen $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$ der Paralleltransformation (§ 9).

Ähnliche, insbesondere auch symmetrische und congruente Systeme in allgemeiner Lage erhalten wir, indem wir mit $\sigma x = x' + \beta$, $\sigma y = y' + \beta'$ (mit ev. $\sigma = \mp 1$) die Formeln der orthogonalen Transformation von $x' | y'$ verbinden*), also mittelst der Substitutionen

$$\sigma x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi + \beta, \quad \sigma y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi + \beta'.$$

Demgemäfs wird die allgemeine Collineation zur Verwandtschaft ähnlicher Systeme, wenn die Substitutionen lauten

$$x = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3, \quad x = -\gamma_2 x + \gamma_1 y + \gamma_3';$$

Symmetrie oder Congruenz bedingt $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$. Alsdann reducirt sich die obige Gleichung zur Bestimmung der sich selbst entsprechenden Richtungen auf $\tan^2\vartheta + 1 = 0$. *Somit besitzen alle Ähnlichkeitsverwandtschaften die imaginären absoluten Richtungen zu Doppelpunkten.* Dadurch ist der endliche

*) Eine Verschiebungstransformation ändert nur die Constanten, ist also unwesentlich.

Doppelpunkt S als derjenige gekennzeichnet, dessen homologe Strahlen einen constanten Winkel φ einschliefsen oder congruente Büschel bilden (§ 92). Daher werden die ähnlichen Figuren homothetisch, die congruenten identisch durch eine Drehung um S; man findet durch einfache Rechnung $\tan\varphi = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ und $1 : \sigma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ als Ähnlichkeitsverhältnis.

Umgekehrt ist jede Collineation, welche die absoluten Richtungen zu Doppelpunkten hat, eine allgemeine Ähnlichkeitsverwandtschaft. Denn, damit die unendlich ferne Gerade sich selbst entspricht, mufs $\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$ sein, und damit die Richtungscoefficienten ihrer Doppelpunkte $\pm i$ seien, mufs $-\alpha_{12} \pm (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, i - \alpha_{21} = 0$, also $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, $\alpha_{12} + \alpha_{21} = 0$ sein. *Und jede Collineation, in welcher die absoluten Richtungen homologe Elemente sind, ist durch die Verbindung einer Ähnlichkeitsverwandtschaft mit orthogonaler Symmetrie (Umkehrung des Sinnes) erzeugbar.* Denn, damit $-i = \frac{\alpha_{21} + \alpha_{22} i}{\alpha_{12} + \alpha_{12} i}$ sei, müssen die Substitutionen lauten $x = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3$, $-y = -\gamma_2 x' + \gamma_1 y' + \gamma_3'$ (vgl. § 11). Diese collinearen Verwandtschaften sind die einzigen, in welchen Orthogonalität eine invariante Eigenschaft ist, da sie als Harmonie in Bezug auf die absoluten Richtungen definirt ist.

Die allgemeine Collineation ordnet den absoluten Richtungen zwei beliebige conjugirt imaginäre Punkte zu, nämlich für $x' = u$, $y' = ui$, $1 = u \cdot 0$ $(u = \infty)$

$$x^{(i)} = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{12} i}{\alpha_{31} + \alpha_{32} i}, \quad y^{(i)} = \frac{\alpha_{21} + \alpha_{22} i}{\alpha_{31} + \alpha_{32} i}.$$

B. 1) Zwei zu derselben dritten homothetische Figuren sind auch unter einander homothetisch für ein Centrum in der Verbindungslinie der beiden ersten.

2) Durch Centralcollineation gehen symmetrische Figuren in involutorische über.

Sechstes Kapitel.

Der Kreis.

---

101. In den vorhergehenden Kapiteln haben wir neben der Entwickelung des Coordinatenbegriffs im wesentlichen die Geometrie der linearen Elementargebilde und Verwandtschaften behandelt. Innerhalb dieser Grenzen erscheint die analytische Geometrie als der geometrische Ausdruck der Theorie der linearen Gleichungen. Deshalb gelangten Gleichungen höheren Grades nur insofern zur Besprechung, als sie mit mehreren linearen gleichbedeutend sind, d. h. in solche zerfallen (§ 53). So wurden auch von den Gleichungen zweiten Grades nur diejenigen der Linienpaare untersucht (§§ 54—60). Indessen hat sich auch schon ein einfachstes Beispiel einer nicht-zerfallenden Gleichung zweiten Grades dargeboten, die Gleichung des Kreises (§ 18).

Nach der gewöhnlichen Anschauung ist der Kreis ein der Geraden coordinirtes Constructionsmittel. Vor einer Untersuchung der allgemeinen Curven zweiter Ordnung (§ 22) wird es daher zweckmäſsig sein, an dem elementaren Beispiel des Kreises ausführlich zu zeigen, wie die geometrischen Eigenschaften einer Curve aus ihrer analytischen Definition heraus zu entwickeln sind (§ 21). Immerhin wird dabei die genaue Kenntnis des Gebildes ein nützlicher Wegweiser für das einzuhaltende Verfahren sein. Zugleich führt dieser Weg auf gewisse Begriffsbildungen, die sich überhaupt für Probleme zweiten Grades als wichtig erweisen werden.

Die *allgemeinste Gleichung des zweiten Grades in* $x \mid y$ enthält die quadratischen Glieder mit x^2, xy, y^2, die linearen

mit x, y und ein constantes Glied, erfordert also sechs Coefficienten oder fünf wesentliche Constanten (Coefficientenverhältnisse). Wir schreiben sie (§ 87. 2))

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

102. **Die Gleichung des Kreises vom Centrum $\alpha | \beta$ und dem Radius ϱ lautet in rechtwinkligen Coordinaten**

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2$$

und in schiefwinkligen Coordinaten

$$(x - \alpha)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos\omega + (y - \beta)^2 = \varrho^2.$$

Es sind dies in der Tat die analytischen Ausdrücke dafür, dafs der Kreis geometrisch definirt ist als Ort eines Punktes, der von einem festen Punkt (dem Centrum) eine constante Entfernung (gleich dem Radius) hat (§ 5). In der Theorie des Kreises bietet aber die Verwendung schiefwinkliger Coordinaten selten Vorteile vor dem Gebrauch der rechtwinkligen. Daher wird weiterhin die letztere Annahme vorausgesetzt, wo nichts anderes bemerkt ist.

In den Anwendungen erscheinen besonders häufig die einfachsten Formen der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = \varrho^2$$

für einen Kreis um den Nullpunkt als Centrum, und

$$x^2 + y^2 \mp 2\varrho x = 0$$

für einen Kreis, dessen Peripherie den Nullpunkt enthält und dessen Centrum auf der x-Axe liegt ($\alpha = \pm \varrho$, $\beta = 0$).

Die Gleichung des Kreises ist vom zweiten Grade, aber sie hängt statt von fünf nur von den drei Constanten $\alpha | \beta$; ϱ ab. In der auf rechtwinklige Axen bezogenen Gleichung des Kreises fehlt das Glied xy und die Coefficienten von x^2 und y^2 sind gleich. *Daher kann die allgemeine Gleichung zweiten Grades nur dann einen Kreis darstellen, wenn von ihren Coefficienten die Bedingungen erfüllt werden*

$$a_{12} = 0, \quad a_{11} = a_{22}.$$

Umgekehrt sind diese Bedingungen hinreichend, um eine ihnen genügende Gleichung $a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

auf die Form $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$ zu bringen. Das Verfahren ist dem bei der Auflösung quadratischer Gleichungen ganz analog. Man macht den Coefficienten von x^2+y^2 durch Division der Gleichung mit a_{11} der Einheit gleich und bringt das absolute Glied auf die rechte Seite. Durch Addition der Quadrate der halben Coefficienten von x und y beiderseits vervollständigt man die linke Seite zur Summe zweier Quadrate von Binomen:

$$\left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+\left(y+\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2=\frac{a_{13}^2+a_{23}^2-a_{11}a_{33}}{a_{11}}.$$

Also sind die Coordinaten des Centrums

$$\alpha=-\frac{a_{13}}{a_{11}},\quad \beta=-\frac{a_{23}}{a_{11}}$$

und das Radiusquadrat ist $\varrho^2=\dfrac{a_{13}^2+a_{23}^2-a_{11}a_{33}}{a_{11}}$.

Vergleichen wir ferner die auf schiefwinklige Axen bezogene Kreisgleichung mit der allgemeinen Form, so finden wir als notwendige Bedingungen

$$a_{12}=a_{11}\cos\omega,\quad a_{11}=a_{22}.$$

Sind aber diese erfüllt, so zeigt die Coefficientenvergleichung, dafs Centrum und Radius durch die Gleichungen bestimmt sind

$$\alpha+\beta\cos\omega=-\frac{a_{13}}{a_{11}},\quad \beta+\alpha\cos\omega=-\frac{a_{23}}{a_{11}},$$

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\omega-\varrho^2=\frac{a_{33}}{a_{11}}.$$

B. 1) Die Gleichungen

$$x^2+y^2-2x-4y-20=0,\quad 3(x^2+y^2)-5x-7y+1=0$$

lassen sich auf die Formen bringen

$$(x-1)^2+(y-2)^2=25,\quad (x-\tfrac{5}{6})^2+(y-\tfrac{7}{6})^2=\tfrac{62}{36}.$$

Die Coordinaten des Centrums und der Radius sind im ersten Falle $1 \mid 2$ und 5, im zweiten $\frac{5}{6} \mid \frac{7}{6}$ und $\frac{1}{6}\sqrt{62}$.

2) Es ist irgend eine Anzahl von Punkten gegeben; man soll den Ort eines Punktes finden, der so liegt, dafs die Summe der $m_1, m_2, \ldots$ fachen Quadrate seiner Entfernungen $r_1^2, r_2^2, \ldots,$ vom ersten, zweiten ... Punkte bez. eine constante Gröfse ist oder (vgl. § 49. 4)), dafs $\Sigma m_i r_i^2=\text{const.}$

Das Quadrat der Entfernung eines Punktes $x \mid y$ vom Punkt $x_i \mid y_i$, d. i. $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$, multipliciren wir mit m_i und addiren alle Glieder, die man so bilden kann. So finden wir für die Gleichung des Ortes

$$x^2 \Sigma m_i + y^2 \Sigma m_i - 2x \Sigma m_i x_i - 2y \Sigma m_i y_i + \Sigma m_i x_i^2 + \Sigma m_i y_i^2 = C.$$

Also ist der Ort ein Kreis vom Mittelpunkt $\alpha = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}$, $\beta = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}$, d. h. das Centrum ist (§ 49. 4)) das Centrum der mittleren Entfernungen der gegebenen Punkte.

Für den Radius R dieses Kreises finden wir $R^2 \Sigma m_i = \Sigma m_i r_i^2 - \Sigma m_i \varrho_i^2$, wo $\Sigma m_i r_i^2 = C$ gleich der Summe der $m_i$fachen Entfernungsquadrate jedes der gegebenen Punkte von einem Punkt des Kreises und $\Sigma m_i \varrho_i^2$ gleich der Summe der $m_i$fachen Entfernungsquadrate aller Punkte von dem Centrum der mittleren Entfernungen ist.

103. **Als Normalform der Kreisgleichung** mit den drei wesentlichen Constanten $\alpha \mid \beta \mid \pi$*) werde bezeichnet

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0.$$

Der Mittelpunkt ist $\alpha \mid \beta$; also stellen Gleichungen, die nur im constanten Glied von einander abweichen, *concentrische Kreise* dar. Die dritte Constante π bestimmt das Quadrat des Kreisradius durch

$$\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \pi.$$

Also stellt im elementaren Sinn die Gleichung nur dann einen Kreis dar, wenn ϱ^2 positiv, also ϱ reell oder $\pi < \alpha^2 + \beta^2$ ist. Wenn hingegen $\pi > \alpha^2 + \beta^2$, der Radius ϱ imaginär wird, so kann obiger Gleichung kein reelles Wertepaar $x \mid y$ genügen, da $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$ für solche nie einen negativen Wert annimmt.

Um wiederum analytisch und geometrisch gleichwertige Begriffe zu schaffen, nennen wir *jede Gleichung obiger Form, deren Coefficienten $\alpha \mid \beta \mid \pi$ reell sind, Gleichung eines Kreises.* Insbesondere stellt sie unter der Bedingung $\pi > \alpha^2 + \beta^2$ einen *imaginären Kreis* dar; derselbe hat einen reellen Mittelpunkt

*) Eine Verwechslung mit der Ludolfschen Zahl π erscheint ausgeschlossen!

und rein imaginären Radius $\varrho = \varrho' i$, also keine reellen Peripheriepunkte. Zu demselben steht in enger Beziehung der reelle Kreis von dem nämlichen Mittelpunkt und dem Radius ϱ'; er möge kurz der *Stellvertreterkreis* des imaginären genannt werden. Seine Gleichung ist $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \varkappa' = 0$,

$$\varkappa + \varkappa' = 2(\alpha^2 + \beta^2).$$

Ist endlich $\varkappa = \alpha^2 + \beta^2$, der Radius ϱ also Null, so wird die Kreisgleichung, als mit

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0$$

äquivalent, durch kein anderes reelles Wertepaar als $x = \alpha$, $y = \beta$ befriedigt. Daher müssen wir sie als die Gleichung eines unendlich kleinen Kreises vom Centrum $\alpha \mid \beta$ oder *des Nullkreises am Punkte* $\alpha \mid \beta$ bezeichnen. Anderseits kennen wir sie schon (§ 58) als die Gleichung des imaginären Linienpaares $x - \alpha \pm i(y - \beta) = 0$, *der Strahlen der absoluten Richtungen aus dem Punkt* $\alpha \mid \beta$. So ist $x^2 + y^2 = 0$ ebensowohl als die Gleichung des Nullkreises am Ursprung, wie als die des Linienpaares $x \pm iy = 0$ aufzufassen; in der Tat haben alle Punkte des letzteren vom Ursprung den Abstand Null (§ 58). Daher gehen alle Nullkreise durch die absoluten Richtungen.

* Für die Coordinaten von Punkten, die nicht auf der Kreisperipherie liegen, hat die linke Seite der Gleichung einen positiven oder negativen Wert. Bei Einsetzung von $\alpha \mid \beta$ insbesondere ist dieser Wert $\varkappa - \alpha^2 - \beta^2 = -\varrho^2$, also negativ beim reellen, positiv beim imaginären Kreis. Daher ist auch für die Coordinaten eines jeden Punktes im Innern eines reellen Kreises jenes Substitutionsresultat negativ und ist dies nur für einen solchen (§ 19). Dagegen erteilen die Coordinaten aller reellen Punkte der Ebene der linken Seite der Gleichung eines imaginären Kreises positive Werte.

104. **Der Kreis ist durch drei Punkte seiner Peripherie bestimmt.** Denn soll ein Kreis einen vorgeschriebenen Punkt enthalten, so liefert die Einsetzung seiner Coordinaten in die allgemeine Gleichung $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \varkappa = 0$ eine lineare Bedingung zwischen den drei unbekannten Coefficienten.

Da also α, β, $\varkappa$ durch die drei Gleichungen definirt sind

$$x_1^2 + y_1^2 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1 + \varkappa = 0,$$
$$x_2^2 + y_2^2 - 2\alpha x_2 - 2\beta y_2 + \varkappa = 0,$$
$$x_3^2 + y_3^2 - 2\alpha x_3 - 2\beta y_3 + \varkappa = 0,$$

so kann durch die drei Punkte $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$, $x_3 \mid y_3$ nur *ein* Kreis beschrieben werden.

Das Resultat der Substitution dieser Coefficientenwerte in die allgemeine Gleichung oder der Elimination von α, β, $\varkappa$ aus den vorigen vier Gleichungen, wird auch in der Determinantenform erhalten

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist *die Gleichung des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises.* Wir können sie auch als die Bedingung deuten, unter welcher vier Punkte in einem Kreise liegen, indem wir statt $x \mid y$ etwa $x_4 \mid y_4$ schreiben. Die Entwickelung der Determinante nach den Elementen der ersten Reihe erteilt ihr folgenden geometrischen Inhalt: Bilden A_1, A_2, A_3, A_4 ein Kreisviereck und ist O ein willkürlicher Punkt, so besteht zwischen den Flächeninhalten der vier aus jenen gebildeten Dreiecke die Relation

$$\overline{OA}_1^2 \cdot A_2 A_3 A_4 + \overline{OA}_3^2 \cdot A_1 A_2 A_4 = \overline{OA}_2^2 \cdot A_1 A_3 A_4 + \overline{OA}_4^2 \cdot A_1 A_2 A_3.$$

Die Gleichung des Kreises reducirt sich dann und nur dann auf eine lineare, wenn der Entwickelungscoefficient von $x^2 + y^2$ verschwindet. Da derselbe aber den Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ angibt, so ist dadurch die Lage der drei Punkte $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$, $x_3 \mid y_3$ in einer Geraden bedingt (§ 35). In der allgemeinen Form der Kreisgleichung werden mit $a_{11} = 0$ zugleich Mittelpunktscoordinaten und Radius unendlich grofs (§ 102). *Also darf die Gerade auch als ein unendlich grofser Kreis aufgefafst werden, jedoch nur unter Hinzunahme der unendlich fernen Geraden.* Denn nach

dem Princip des § 15 ist die Reduction einer quadratischen Function auf eine lineare nur zu denken als ihr Zerfallen durch Absonderung eines Factors $0 \cdot x + 0 \cdot y + c$ (§ 72).

B. 1) Der Kreis durch die Punkte $2 \mid 3$, $4 \mid 5$, $6 \mid 1$ ist

$$\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}.$$

2) Für den Kreis durch die Punkte $2 \mid 3$, $3 \mid 4$ und den Nullpunkt ist $a_{33} = 0$, $13 + 4 a_{13} + 6 a_{23} = 0$, $25 + 6 a_{12} + 8 a_{23} = 0$, also $2 a_{13} = -23$, $2 a_{23} = 11$.

3) Für die Coordinatenaxen von § 47. 1) bilde man die Gleichung des Kreises durch den Nullpunkt und die Mitten von AC, BC und zeige, dafs derselbe auch durch die Mitte von AB geht. Sie ist
$$2p(x^2 + y^2) - p(s - s')x - (p^2 + ss')y = 0.$$

4) Man entwickle die Relation zwischen den gegenseitigen Entfernungen von vier Punkten eines Kreises. Man bildet das Product aus den folgenden beiden äquivalenten Schreibweisen der Determinante des Textes

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & -2x, & -2y, & 1 \\ x_1^2 + y_1^2, & -2x_1, & -2y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & -2x_2, & -2y_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & -2x_3, & -2y_3, & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1, & x, & y, & x^2 + y^2 \\ 1, & x_1, & y_1, & x_1^2 + y_1^2 \\ 1, & x_2, & y_2, & x_2^2 + y_2^2 \\ 1, & x_3, & y_3, & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix}.$$

Wenn wir die vier Punkte als 1, 2, 3, 4 und ihre Entfernungen durch 12, 13, 14, 23 etc. bezeichnen, so ist das Product

$$\begin{vmatrix} 0, & \overline{12}^2, & \overline{13}^2, & \overline{14}^2 \\ \overline{12}^2, & 0, & \overline{23}^2, & \overline{24}^2 \\ \overline{13}^2, & \overline{23}^2, & 0, & \overline{34}^2 \\ \overline{14}^2, & \overline{24}^2, & \overline{34}^2, & 0 \end{vmatrix}.$$

Das Verschwinden dieser Determinante gibt die entwickelte Relation

$$\overline{12}^4 . \overline{34}^4 + \overline{23}^4 . \overline{14}^4 + \overline{13}^4 . \overline{24}^4 =$$
$$2\left\{\overline{12}^2 . \overline{13}^2 . \overline{24}^2 . \overline{34}^2 + \overline{13}^2 . \overline{14}^2 . \overline{23}^2 . \overline{24}^2 + \overline{12}^2 . \overline{23}^2 . \overline{14}^2 . \overline{34}^2\right\}.$$

Formen wir die Determinante um in

$$\begin{vmatrix} 0, & 12 . 34, & 13 . 24, & 14 . 23 \\ 12 . 34, & 0, & 14 . 23, & 13 . 24 \\ 13 . 24, & 14 . 23, & 0, & 12 . 34 \\ 14 . 23, & 13 . 24, & 12 . 34, & 0 \end{vmatrix},$$

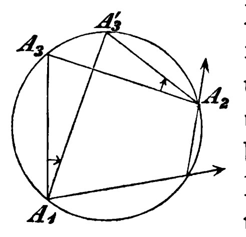
so folgt in Übereinstimmung mit der entwickelten Form, für

$$2S = 12\,.\,34 + 13\,.\,24 + 14\,.\,23,$$
$$S(S - 12\,.\,34)(S - 13\,.\,24)(S - 14\,.\,23) = 0;$$

d. h. endlich die bekannte Relation des *Ptolemäus*[17])

$$12\,.\,34 \pm 13\,.\,24 \pm 14\,.\,23 = 0.$$

105. **Lineare Erzeugung des Kreises.** Sind von einem Dreieck $A_1A_2A_3$ nur die Basisecken A_1, A_2 oder $x_1|y_1$, $x_2|y_2$ fest und wird den übrigen Elementen desselben *eine* Bedingung auferlegt, so ist die Spitze A_3 offenbar nur soweit bestimmt, dafs sie einem gewissen Ort angehören mufs.



Nun sei der Ort dieser Spitze zu bestimmen, wenn sich die Seite A_1A_3 um A_1 und die Seite A_2A_3 um A_2 gleichzeitig um dieselbe Winkelgröfse und in demselben Sinn dreht. Ist $A_1A_2A_3'$ eine neue Lage des Dreiecks und sind die Richtungscoefficienten der Geraden A_1A_3, A_1A_3', A_2A_3, A_2A_3' bez. m_1, m_1', m_2, m_2', so erfordert

$$\sphericalangle\, A_3A_1A_3' = A_3A_2A_3', \quad \text{dafs } \frac{m_1' - m_1}{1 + m_1 m_1'} = \frac{m_2' - m_2}{1 + m_2 m_2'} \quad (\S\,31).$$

Hieraus folgt aber auch

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{m_1' - m_2'}{1 + m_1' m_2'} = \mu, \text{ oder } \tan A_1A_3A_2 = \tan A_1A_3'A_2,$$

d. h. der Winkel der Seiten ist unveränderlich von der Gröfse $A_1A_3A_2$.

Somit können wir nach § 35, wenn die Geraden A_1A_3' und A_2A_3' den Winkel von der vorgeschriebenen Tangente $\tan A_1A_3A_2 = \mu$ einschliefsen, ihre Gleichungen schreiben

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m, \quad \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{m - \mu}{1 + m\mu},$$

wo m nun jeden beliebigen Wert annehmen kann. Je zwei zu demselben Wert von m gehörige Geraden schneiden sich in einem Punkt des gesuchten Ortes. Die Gleichung, welcher alle diese Schnittpunkte genügen, entspringt also durch Elimination von m aus jenen linearen in der Form

$$\mu\Big[(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)\Big]$$
$$= \Big[(x - x_1)(y - y_2) - (x - x_2)(y - y_1)\Big].$$

Dieser Ort ist also ein Kreis, der durch die beiden festen Punkte A_1 und A_2 geht. Die Gleichung wird mit der des Kreises durch die drei Punkte A_1, A_2, A_3 (§ 104) identisch, sobald wir μ ersetzen durch den Wert, den es bei der Substitution von $x_3 | y_3$ für $x | y$ wirklich erhält.

Diese Erzeugung des Kreises beweist den bekannten *Satz von der constanten Gröfse der über einem Kreisbogen $A_1 A_2$ stehenden Peripheriewinkel.* Man hat dazu nur zu bemerken, dafs der an A_3' der Basis gegenüberliegende Dreieckswinkel in das Supplement des ursprünglichen übergeht, sobald sich A_3' mit A_3 nicht mehr auf derselben Seite der Basis befindet, da alsdann der in demselben Sinn von der Seite $A_1 A_3'$ zur Seite $A_2 A_3'$ gemessene Winkel arc tan μ dem Dreieck nicht angehören kann.

Drehen sich die Strahlen durch A_1 und A_2 insbesondere so, dafs sie zu einander normal bleiben oder sind die Dreiecke rechtwinklig ($\mu = \infty$), so erhalten wir durch Elimination von m aus

$$y - y_1 - m(x - x_1) = 0, \quad m(y - y_1) + x - x_1 = 0$$

die Gleichung des Kreises von gegebenem Durchmesser $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

* Nach der Ausdrucksweise des V. Kapitels sind die Schenkel eines constanten Peripheriewinkels homologe Strahlen congruenter Büschel. *Daher ist der Kreis das Erzeugnis des Schnittes homologer Strahlen in congruenten Büscheln.*

B. 1) Man prüfe, welche Beispiele des § 48 auf kreisförmige Örter führen und bestimme deren Mittelpunkte und Radien.

2) Ort des Höhenschnittpunktes eines Dreiecks aus der Basis und dem Winkel an der Spitze.

Die Gleichungen der zu den Scheitelseiten gehörigen Höhen sind

$$m(y - y'') + (x - x'') = 0,$$

$$(m - \tan C)(y - y') + (1 + m \tan C)(x - x') = 0.$$

Indem wir m eliminiren, erhalten wir die Gleichung des Ortes

$$\tan C\Big[(y - y')(y - y'') + (x - x')(x - x'')\Big]$$
$$= x(y' - y'') - y(x' - x'') + x'y'' - y'x'';$$

eine Gleichung, welche von der im letzten Paragraphen gefun-

denen lediglich im Vorzeichen von $\tan C$ abweicht. Sie stellt daher den Ort dar, den wir dort für die Spitze finden, wenn wir dieselbe Basis und den Winkel an der Spitze gleich dem Supplement des obigen geben.

3) Man soll den Ort eines Punktes O bestimmen, wenn von Parallelen durch ihn zu den Seiten a, b, c eines Dreiecks in den andern Seiten desselben Punkte B, C; C', A'; A'', B'' so bestimmt werden, dafs die Summe der drei Rechtecke

$$BO \,.\, OC + C'O \,.\, OA' + A''O \,.\, OB'' \quad \text{constant ist.}$$

Wenn man die Seiten a, b des Dreiecks zu Coordinatenaxen wählt, so ist die Gleichung des Ortes

$$x\left(a - x - \frac{a}{b}\,y\right) + \left(b - y - \frac{b}{a}\,x\right) + \frac{c^2 xy}{ab} = m^2$$

oder $$x^2 + y^2 + 2xy\cos C - ax - by + m^2 = 0.$$

Diese Gleichung repräsentirt einen Kreis, dessen Centrum $\alpha \mid \beta$ durch $2(\alpha + \beta\cos C) = a,\ 2(\beta + \alpha\cos C) = b$ gegeben ist. Derselbe geht, falls $m = 0$, durch die Ecken $0 \mid 0$, $a \mid 0$, $0 \mid b$, ist also mit dem dem Dreieck umgeschriebenen Kreis concentrisch. Diese Gleichungen gestatten die Lösung des Problems, den Ort für das Centrum des umgeschriebenen Kreises zu finden, wenn zwei Seiten eines Dreiecks der Lage nach gegeben sind und eine ihre Längen verbindende Relation bekannt ist.

4) Man bestimme den Ort eines Punktes O so, dafs die Verbindungslinie desselben mit einem festen Punkt denselben Abschnitt in der x-Axe bilde, wie die in O auf der Verbindungslinie errichtete Normale in der y-Axe.

5) Man bestimme den Ort eines Punktes so, dafs die in den Ecken eines Dreiecks auf ihren Verbindungslinien mit ihm errichteten Normalen sich in einem Punkt schneiden.

106. **Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden.** Durch Verlegung des Anfangspunktes können wir die Gleichung eines reellen Kreises immer auf die Form bringen $x^2 + y^2 = \varrho^2$. Die Gleichung einer gegebenen reellen Geraden bringen wir (§ 30) auf die Normalform $x\cos\gamma + y\sin\gamma = p$. Dann finden wir die beiden Gleichungen genügenden Wertepaare $x \mid y$ durch Gleichsetzung der aus ihnen entwickelten Werte je einer Variabeln

$$\frac{p - x\cos\gamma}{\sin\gamma} = \sqrt{\varrho^2 - x^2}, \quad \frac{p - y\sin\gamma}{\cos\gamma} = \sqrt{\varrho^2 - y^2}.$$

In rationaler Form sind diese Gleichungen quadratisch und liefern die Wurzeln

$$x', x'' = p \cos\gamma \pm \sin\gamma \sqrt{\varrho^2 - p^2},$$
$$y', y'' = p \sin\gamma \mp \cos\gamma \sqrt{\varrho^2 - p^2},$$

wo die Paare $x' | y'$ und $x'' | y''$ so zusammengehören, dafs die oberen bez. unteren Vorzeichen gleichzeitig gelten. Falls ein imaginärer Kreis gegeben war, ist nur ϱ^2 durch $-\varrho'^2$ zu ersetzen. Es bleibt also, wenn die Gerade reell ist, auch dann noch Summe und Product der Wurzeln reell

$$\tfrac{1}{2}(x' + x'') = p \cos\gamma, \qquad \tfrac{1}{2}(y' + y'') = p \sin\gamma,$$
$$x'x'' = p^2 - \varrho^2 \sin^2\gamma, \qquad y'y'' = p^2 - \varrho^2 \cos^2\gamma.$$

Weil wir so durch quadratische Gleichungen die gemeinsamen Wertepaare erhalten, so müssen wir (§ 23) sagen: *Eine Gerade und ein Kreis besitzen stets zwei Schnittpunkte.* Es sind aber drei Fälle zu unterscheiden.

Ist erstens der Kreis reell und $p < \varrho$, d. h. der Abstand der Geraden vom Kreiscentrum kleiner als der Radius, so sind die Wurzelpaare reell: *die Gerade schneidet den Kreis in zwei reellen und verschiedenen Punkten.*

Ist dagegen zweitens $p > \varrho$, d. h. der Abstand gröfser als der Radius, oder ist der Kreis imaginär, so sind, anschaulich gesprochen, keine Schnittpunkte vorhanden. Weil aber die Wurzelwerte als conjugirt complexe Zahlen existiren, so sagen wir: *die Gerade schneidet den Kreis in zwei conjugirt imaginären Punkten* (§ 16).

Ist endlich drittens $p = \varrho$, d. h. das Perpendikel vom Centrum auf die Gerade gleich dem Radius, so fallen die Schnittpunkte in *einen* reellen Punkt $x = \varrho\cos\gamma$, $y = \varrho\sin\gamma$ zusammen. Man spricht dann bekanntlich von einer *Berührung des Kreises durch die Gerade.* Allgemein bezeichnet die analytische Geometrie eine Gerade als *Tangente einer Curve,* im Unterschied von den *Secanten,* wenn von ihren Schnittpunkten mit derselben zwei vereinigt liegen (§ 15)*).

*) Dabei sind aber gewisse Punkte wie der reelle Punkt des Nullkreises vorläufig auszuschliefsen.

Die Tangenten in imaginären Punkten eines Kreises sind ebenfalls imaginäre Gerade.

Die von zwei Punkten eines Kreises begrenzte Strecke heifst eine *Sehne.* Die Mitte M der Sehne in der gegebenen Geraden hat die Coordinaten $p \cos \gamma \mid p \sin \gamma$; der sie enthaltende Kreisdurchmesser hat die Gleichung $y = x \tan \gamma$, ist also zur Sehne normal. Also geht die Mittelnormale jeder Kreissehne durch das Centrum und *die Mitten aller parallelen Sehnen liegen auf dem zu ihnen normalen Durchmesser.* Verschieben wir also eine reelle Gerade parallel mit sich selbst, so dafs p von Null an wächst, so nimmt die Sehnenlänge $2\sqrt{\varrho^2 - p^2}$ im reellen Kreis ab, wird zu Null für die Tangente $p = \varrho$, und bei weiterer Entfernung rein imaginär. Die Sehnenmitte bleibt reell und fällt in der Tangente mit dem Berührungspunkt zusammen. *Daher ist die Tangente in einem Punkt des Kreises die Normale zum Radius desselben und umgekehrt.*

B. 1) Die Coordinaten der Schnittpunkte von
$x^2 + y^2 = 65$ und $3x + y = 25$ sind $7 \mid 4$, $8 \mid 1$.

2) Die Schnittpunkte von $(x - c)^2 + (y - 2c)^2 = 25c^2$ mit $4x + 3y = 35$ sind im Punkt $5c \mid 5c$ vereinigt.

3) Die Schnittpunkte einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden $y = mx$ mit dem Kreis

$$a_{11}(x^2 + 2xy \cos \omega + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

sind gegeben durch die Gleichung

$$a_{11}(1 + 2m \cos \omega + m^2)x^2 + 2(a_{13} + a_{23}m)x + a_{33} = 0.$$

Diese hat gleiche Wurzeln, wenn man m aus der quadratischen Gleichung bestimmt

$$(a_{13} + a_{23}m)^2 = a_{11}a_{33}(1 + 2m \cos \omega + m^2).$$

4) Unter welcher Bedingung fafst die durch den Kreis $x^2 + y^2 = \varrho^2$ in der Linie $x \cos \gamma + y \sin \gamma = p$ gebildete Sehne einen rechten Winkel am Punkt $x_0 \mid y_0$?

Seien $x' \mid y'$, $x'' \mid y''$ die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis, so liefert die Einsetzung der Werte des Textes für $x' + x''$, $y' + y''$, $x'x''$, $y'y''$ in $(x_0 - x')(x_0 - x'') + (y_0 - y')(y_0 - y'') = 0$ die Bedingung der Rechtwinkligkeit der Geraden $x_0 \mid y_0$, $x' \mid y'$ und $x_0 \mid y_0$, $x'' \mid y''$ (§ 105)

$$x_0^2 + y_0^2 - 2px_0 \cos \gamma - 2py_0 \sin \gamma + 2p^2 - \varrho^2 = 0.$$

5) Ort des Mittelpunktes $x|y$ einer Sehne, welche einen rechten Winkel an einem Punkt $x_0|y_0$ spannt.

Es ist $p \cos\gamma = x$, $p \sin\gamma = y$, $p^2 = x^2 + y^2$; durch die Substitution dieser Werte wird die in 2) gefundene Bedingung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + x^2 + y^2 = \varrho^2.$$

6) Man soll einen Punkt $x_0|y_0$ so finden, daſs, wenn man durch ihn eine Sehne eines Kreises zieht, das Rechteck der senkrechten Abstände ihrer Endpunkte von einer gegebenen Geraden constant ist.

Man nehme die Gerade als x-Axe, und als y-Axe die vom Centrum des Kreises auf sie gefällte Normale, deren Länge β sei. Dann ist die Gleichung des Kreises $x^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2$. Die Gleichung einer Geraden durch $x_0|y_0$ ist $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Eliminirt man nun zwischen diesen zwei Gleichungen x, so erhält man eine quadratische Gleichung für y, für welche das Product der Wurzeln ist $\frac{(y_0 - mx_0)^2 + m^2(\beta^2 - \varrho^2)}{1 + m^2}$. Dies Product kann also nur dann von m unabhängig sein, wenn der Zähler durch $(1 + m^2)$ teilbar ist, d. h. nur dann, wenn

$$x_0 = 0, \quad {y_0}^2 = \beta^2 - \varrho^2 \text{ ist.}$$

7) Unter welcher Bedingung bestimmt die Sehne der Geraden $x \cos\gamma + y \sin\gamma - p = 0$ im Kreis

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0$$

am Anfangspunkt der Coordinaten einen rechten Winkel?

Multiplicirt man die Glieder vom zweiten Grade in der Gleichung des Kreises mit p^2, diejenigen vom ersten mit $p(x\cos\gamma + y\sin\gamma)$ und das absolute Glied mit $(x\cos\gamma + y\sin\gamma)^2$, so entsteht eine in $x|y$ homogene Gleichung, welche daher zwei Gerade durch den Nullpunkt darstellt. Da sie durch diejenigen Punkte des Kreises befriedigt wird, in welchen $x\cos\gamma + y\sin\gamma = p$ ist, so ist sie die Gleichung des verlangten Linienpaares, nämlich geordnet

$$(p^2 - 2\alpha p\cos\gamma + \pi\cos^2\gamma)x^2 - 2(\alpha\sin\gamma + \beta\cos\gamma - \pi\sin\gamma\cos\gamma)xy$$
$$+ (p^2 - 2\beta p \sin\gamma + \pi \sin^2\gamma)\, y^2 = 0.$$

Nach § 55 ist dies ein Rechtwinkelpaar, wenn

$$2p^2 - 2p(\alpha\cos\gamma + \beta\sin\gamma) + \pi = 0 \text{ ist.}$$

8) Ort des Fuſspunktes der Normale, die vom Nullpunkt auf eine Sehne gefällt wird, die an ihm einen rechten Winkel bestimmt.

Die Polarcoordinaten des Ortes sind die Gröſsen p und α in der zuletzt gefundenen Gleichung, und die Gleichung des Ortes

ist daher $2(x^2 + y^2) - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0$. Die weitere Untersuchung zeigt, dafs dieser Ort der schon in 5) gefundene Kreis ist.

9) Wenn durch irgend einen festen Punkt in einem Durchmesser des Kreises eine Sehne gezogen und jeder ihrer Endpunkte mit einem der Endpunkte des Durchmessers verbunden wird, so schneiden die Verbindungslinien in der Tangente des Kreises am andern Endpunkt des Durchmessers Segmente ab, deren Rechteck constant ist.

Man entwickelt wie in 7) die Gleichung der Geraden, welche den Nullpunkt mit den Schnittpunkten des Kreises $x^2 + y^2 - 2\varrho x = 0$ und der Sehne $y = m(x - x_0)$ verbinden, die durch den festen Punkt $x_0 \,|\, 0$ gezogen ist. Man findet aus ihr die in der bezeichneten Tangente gebildeten Abschnitte durch die Substitution $x = 2\varrho$ als die zugehörigen Werte von y. Ihr Product wird als von m unabhängig gefunden, nämlich gleich $4\varrho^2 \frac{x_0 - 2\varrho}{x_0}$.

107. Die Resultate des vorigen Paragraphen gelten unmittelbar auch für die Bestimmung der Schnittpunkte eines Kreises von allgemeiner Gleichung $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2$ mit einer Geraden $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$, wenn wir letztere Gleichung auf die Form bringen $(x - \alpha)\cos\gamma + (y - \beta)\sin\gamma = p$. Alsdann ist nur $x \,|\, y$ durch $x - \alpha \,|\, y - \beta$ zu ersetzen.

Zur Bestimmung der Lage eines Kreises von gegebener Gleichung $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0$, ist es oft ebenso zweckmäfsig, die in den Axen erzeugten Abschnitte zu ermitteln, als Centrum und Radius zu suchen. Von den vier Axenschnittpunkten reichen dann schon drei aus (§ 104). Man erhält diese Abschnitte für $y = 0$, bez. $x = 0$ aus den Gleichungen

$$x^2 - 2\alpha x + \pi = 0, \quad y^2 - 2\beta y + \pi = 0.$$

Daher berührt der Kreis die x-Axe, bez. y-Axe, falls α^2, bez. $\beta^2 = \pi$ ist.

Sind umgekehrt in der x-Axe zwei conjugirt imaginäre Punkte gegeben, so können wir sie statt nach § 17 auch dadurch geometrisch definiren, dafs wir einen reellen Kreis angeben, dessen Axenschnittpunkte sie sind. So liegt das Punktepaar $\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \pi}$ auf allen Kreisen $\alpha \,|\, \beta \,|\, \pi$, für welche β beliebig und $\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \pi$ gewählt wird.

Somit kann überhaupt jedes Punktepaar durch seinen reellen Träger und einen reellen Kreis definirt werden.

B. 1) Die Axenschnittpunkte des Kreises
$x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ sind $3|0$, $2|0$; $0|6$, $0|1$.

2) Die Gleichung des Kreises, der die Axen in Abständen $= a$ vom Anfangspunkt berührt, ist

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0.$$

3) Soll man die Gleichung eines Kreises so bestimmen, dafs die eine der Axen eine Tangente ist, die andere sie im Berührungspunkt unter dem Winkel ω schneidet, so erkennt man aus der Figur leicht, dafs der Abschnitt in der letzteren $2r \sin \omega$ ist, erhält somit die fragliche Gleichung als

$$x^2 + 2xy \cos \omega + y^2 - 2ry \sin \omega = 0.$$

*108. **Imaginäre Kreispunkte im Unendlichen.** Ebenso wie jede reelle Gerade, deren Abstand vom Centrum den Radius übersteigt, schneidet auch die unendlich ferne Gerade jeden Kreis in zwei conjugirt imaginären Punkten oder Richtungen. Um zu erkennen, für welche unendlich grofsen Wertepaare die Kreisgleichung befriedigt wird, dividiren wir sie zuerst durch $(x - \alpha)^2$

$$1 + \left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)^2 \mp \left(\frac{\varrho}{x-\alpha}\right)^2 = 0.$$

Setzen wir dann $x = \infty$, $y = \infty$ voraus, so wird $\varrho:(x-\alpha) = 0$, dagegen $(y - \beta) : (x - \alpha)$ behält seinen Wert als Richtungscoefficient m der nach jenem unendlich fernen Punkt aus $\alpha|\beta$ gezogenen Geraden. Also liefert die Gleichung eines jeden Kreises dieselbe, von $\alpha|\beta$ und ϱ unabhängige, Relation

$$1 + m^2 = 0, \quad \text{woraus } m = \pm i.$$

Hierdurch sind aber die beiden absoluten Richtungen der Ebene definirt (§ 58). *Somit gehen alle Kreise der Ebene durch die absoluten Richtungen, welche deshalb auch als die zwei unendlich fernen imaginären Kreispunkte bezeichnet werden.*

Zu demselben Ergebnis führt auch die Bemerkung des § 103, dafs alle Nullkreise durch obige Punkte gehen. Denn der Nullkreis $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0$ kann jeden concentrischen Kreis $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \mp \varrho^2 = 0$ nur in denselben Punkten schneiden, in welchen er die unendlich ferne

Gerade trifft, weil die Gleichzeitigkeit beider Gleichungen $\varrho^2 = 0$ erfordert und dies nur als Gleichung der unendlich fernen Geraden einen Sinn hat (§ 72). Demnach schneidet jede durch das Centrum eines Kreises gezogene Gerade absoluter Richtung denselben nur in einem, dem unendlich fernen Punkt. Daher ist sie in jenem ausgezeichneten Punkt Tangente des Kreises, wie sie in der Tat auch auf dem Radius des Berührungspunktes, d. h. auf sich selbst normal ist (§ 58). Man nennt Tangenten in unendlich fernen Punkten einer Curve insbesondere Asymptoten derselben. *Die Linienpaare absoluter Richtung aus $\alpha \mid \beta$ sind also die imaginären Asymptoten aller Kreise vom Centrum $\alpha \mid \beta$.*

Umgekehrt können wir nunmehr die Kriterien des § 102 durch den Satz ersetzen: *Die durch eine Gleichung zweiten Grades dargestellte Curve ist ein Kreis, wenn sie durch die absoluten Richtungen geht.* Denn, dividiren wir die allgemeine quadratische Gleichung des § 101 durch x^2 und setzen nachher $x = \infty$, so reducirt sie sich auf

$$a_{11} + 2a_{12}\frac{y}{x} + a_{22}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0;$$

soll dies mit der Grenzform der Kreisgleichung $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$ identisch sein, so mufs $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ sein. Der Kreis ist also eine Curve zweiter Ordnung, die zwei ausgezeichnete feste Punkte enthält.

109. **Gleichung der Tangente in einem Punkt $x' \mid y'$ des Kreises.** Sind $x' \mid y'$ und $x'' \mid y''$ zwei Punkte des Kreises $x^2 + y^2 = \varrho^2$, so hat ihre Verbindungsgerade, wegen

$$\varrho^2 = x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2 \text{ oder } x'^2 - x''^2 = y''^2 - y'^2,$$

den Richtungscoefficienten

$$(y' - y'') : (x' - x'') = -(x' + x'')(y' + y'').$$

Also lautet *die Gleichung der Kreissehne $x' \mid y'$, $x'' \mid y''$* (vgl. § 106)

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{x' + x''}{y' + y''}.$$

Halten wir nun $x' \mid y'$ fest und lassen $x'' \mid y''$ sich auf dem Kreise gegen $x' \mid y'$ hin bewegen, so dreht sich die

Sehne um $x'|y'$ und nimmt an Länge ab. Wenn ihr zweiter Endpunkt $x''|y''$ jenem unendlich nahe rückt oder mit ihm zusammenfällt, so besitzt die Secante die Sehnenlänge Null oder wird nach Definition (§ 106) zur Tangente in $x'|y'$. Die Gleichung dieser Grenzlage erhalten wir, durch Einsetzung von $x'' = x'$, $y'' = y'$ als

$$\frac{y - y'}{x - x'} = -\frac{x'}{y'}.$$

Die ursprüngliche Gleichung der Verbindungsgeraden würde bei dieser Substitution kein bestimmtes Resultat mehr geben, sondern erst, wenn die Wertepaare $x'|y'$, $x''|y''$ einer Gleichung genügen. Durch den Grenzübergang wird also *die Tangente als die Verbindungsgerade zweier unendlich nahen Punkte der Curve* definirt.

Durch eine einfache Reduction folgt als *Gleichung der Tangente*

$$x'x + y'y - \varrho^2 = 0.$$

Dieselbe zeigt die Tangente in der Tat normal zu dem Radius $y'x - x'y = 0$ des Berührungspunktes. Man kann sie auch in der scheinbar quadratischen Form schreiben[18])

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 - \varrho^2.$$

Durch die Substitution von $x - \alpha | y - \beta$, $x' - \alpha | y' - \beta$ für $x|y$, $x'|y'$ folgt: *Die Tangente des Kreises*

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \varrho^2 = 0$$

im Punkt $x'|y'$ *hat die Gleichung*

$$(x' - \alpha)(x - \alpha) + (y' - \beta)(y - \beta) - \varrho^2 = 0$$

und unter Voraussetzung der Normalform der Kreisgleichung

$$x'x + y'y - \alpha(x' + x) - \beta(y' + y) + \pi = 0.$$

Beide Formen sind infolge ihrer Ähnlichkeit mit der Kreisgleichung leicht zu merken.

B. 1) Die Tangente im Punkt $5|4$ zu $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$ ist $3x + y = 19$.

2) Die Gerade $y = mx + b$ berührt den Kreis $x^2 + y^2 = \varrho^2$, wenn $b^2 = \varrho^2(1 + m^2)$ ist.

***110. Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten.**

Eine Gerade von den Liniencoordinaten $\xi \mid \eta$ oder der Gleichung $\xi x + \eta y + 1 = 0$ berührt den Kreis vom Centrum $\alpha \mid \beta$ und Radius ϱ, wenn ihr senkrechter Abstand von $\alpha \mid \beta$ gleich ϱ ist (§ 106). Nach § 76 haben also $\xi \mid \eta$ nur der Bedingung zu genügen $\frac{\xi\alpha + \eta\beta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \varrho$ oder

$$(\alpha\xi + \beta\eta + 1)^2 - \varrho^2 (\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

Alle Geraden, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, sind Tangenten des Kreises, und umgekehrt. Daher heifst dieselbe *die Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten oder die Tangentialgleichung des Kreises.*

Die Gleichung ist wiederum vom zweiten Grade in $\xi \mid \eta$, aber von einer weniger übersichtlichen Gestalt, als die Kreisgleichung in Punktcoordinaten. Nur für die Kreise um den Anfangspunkt der Coordinaten $x^2 + y^2 = \varrho^2$ bleibt die analoge Form bestehen $\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{\varrho^2}$.

Ist $\xi \mid \eta$ eine Tangente dieses Kreises, so ist ihr Berührungspunkt ihr Schnittpunkt mit $\eta x - \xi y = 0$, also

$$x = -\varrho^2\xi \mid y = -\varrho^2\eta.$$

Eine Tangente dieses Kreises geht durch einen nicht auf der Peripherie liegenden Punkt $x' \mid y'$, wenn ihre Coordinaten gleichzeitig mit $\varrho^2 (\xi^2 + \eta^2) = 1$ die lineare Bedingung erfüllen $x'\xi + y'\eta + 1 = 0$ (§ 76). Da aber diese Gleichungen stets zwei gemeinsame Wertepaare $\xi \mid \eta$ besitzen, so *gehen durch jeden Punkt der Ebene zwei Tangenten des Kreises*, wie in jeder Geraden zwei Punkte desselben liegen (§ 79). Aus diesem Grunde wird der Kreis auch als *Curve zweiter Classe* bezeichnet.

111. **Tangenten aus einem Punkt $x' \mid y'$ an den Kreis.** Durch einen nicht auf der Peripherie liegenden Punkt $x' \mid y'$ gehen zwei Kreistangenten, deren Berührungspunkte zunächst zu bestimmen sind. Ist $x'' \mid y''$ einer derselben, so erfüllen seine Coordinaten gleichzeitig die Gleichungen

$$x''^2 + y''^2 = \varrho^2, \quad x'x'' + y'y'' = \varrho^2,$$

letztere weil die Tangente $x''x + y''y = \varrho^2$ durch den ge-

gebenen Punkt gehen soll. Durch Auflösung dieser Bedingungen erhalten wir für *die Coordinaten der Berührungspunkte*:

$$x'' = \frac{\varrho^2 x' \pm \varrho y' \sqrt{x'^2 + y'^2 - \varrho^2}}{x'^2 + y'^2}, \quad y'' = \frac{\varrho^2 y' \mp \varrho x' \sqrt{x'^2 + y'^2 - \varrho^2}}{x'^2 + y'^2}.$$

Somit sind die Tangenten aus einem reellen Punkt nur dann reell und gesondert, wenn der Kreis reell und $x'^2 + y'^2 > \varrho^2$ ist, d. h. der Punkt aufserhalb des Kreises liegt. Aus einem Punkt des Innern oder an einen imaginären Kreis gehen conjugirt imaginäre Tangenten. Die beiden Tangenten fallen zusammen, wenn $x'^2 + y'^2 = \varrho^2$ ist oder der Punkt auf der Kreisperipherie selbst liegt. [Dasselbe tritt ein, wenn der Kreisradius Null ist und zwar ist dann der Berührungspunkt der Mittelpunkt. Alle Radien des Nullkreises sind zugleich Tangenten, da sie in vereinigten Punkten schneiden. Für die imaginären Punkte $x' | y'$ des Nullkreises werden $x'' | y''$ unbestimmt, denn die Tangente in allen solchen Punkten ist die Gerade absoluter Richtung.] Unter allen Umständen werden die Berührungspunkte definirt als die Schnittpunkte des Kreises mit der bestimmten Geraden $x'x + y'y = \varrho^2$. Die Gleichung derselben hat die Form derjenigen der Tangente und wird mit dieser identisch, wenn $x' | y'$ dem Kreise angehört. Wir werden diese Gerade später (§ 115) als Polare von $x' | y'$ benennen.

Die Gleichungen der Tangenten ergeben sich durch Einsetzung obiger Ausdrücke in $x''x + y''y - \varrho^2 = 0$ als

$$\varrho\left[x'(x - x') + y'(y - y')\right]^2 \pm (y'x - x'y)\sqrt{x'^2 + y'^2 - \varrho^2} = 0.$$

Das Product dieser beiden Gleichungen liefert, in einer von Wurzelgröfsen freien Form, *die Gleichung des Tangentenpaares aus* $x' | y'$ (vgl. § 54)

$$\varrho^2\left[x'(x - x') + y'(y - y')\right]^2 - (x'^2 + y'^2 - \varrho^2)(y'x - x'y)^2 = 0.\text{*)}$$

Für die Abstände der Berührungspunkte von $x' | y'$, die

*) Man weist leicht nach, dafs diese Gleichung gemäfs § 53 in $x - x' \mid y - y'$ homogen ist.

Längen der Tangenten, erhält man einen einfachen, für beide gleichen Ausdruck. Es ist nämlich, da $x''^2 + y''^2 = \varrho^2$, $x'x'' + y'y'' = \varrho^2$, *das Quadrat der Tangentenlänge*

$$t^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = x'^2 + y'^2 - \varrho^2,$$

d. h. gleich dem um das Radiusquadrat verminderten Quadrat der Entfernung des Punktes $x' | y'$ vom Kreiscentrum. In der Tat bilden die Tangenten mit den Radien der Berührungspunkte die Katheten rechtwinkliger Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse.

112. **Parameterdarstellung des Kreises.** Beim Gebrauch von Polarcoordinaten sind die Kreise um den Nullpunkt bekanntlich von den Gleichungen $r = \varrho$ (§ 7). Jeder einzelne Punkt eines solchen Kreises ist also durch den Winkel ϑ seines Radius gegen die Axe bestimmt. Statt die Lage eines Punktes im Kreise durch zwei unter einander abhängige Coordinaten $x | y$ zu fixiren, ist es oft zweckmäfsig, dieselben in Function dieser einzigen unabhängigen Veränderlichen ϑ auszudrücken, die wir dann den *Parameter des Punktes* $x | y$ *oder* ϑ *im Kreise* nennen.

Ein Punkt $x' | y'$ eines Kreises vom Centrum $\alpha | \beta$ und dem Radius ϱ wird mittelst seines Parameters ϑ' dargestellt als

$$x' = \alpha + \varrho \cos \vartheta', \quad y' = \beta + \varrho \sin \vartheta'.$$

Nimmt ϑ' alle Werte an, so durchläuft der Punkt die Peripherie.

Demnach wird *die Gleichung der Tangente im Punkt* ϑ'

$$(\S\ 109) \quad (x - \alpha) \cos \vartheta' + (y - \beta) \sin \vartheta' - \varrho = 0.$$

Wenn daher umgekehrt die Gleichung einer Geraden eine Unbestimmte ϑ' derart enthält, dafs sie obige Form annimmt, so berührt sie den Kreis $\alpha | \beta; \varrho$.

Jene Gleichung der Tangente ist leicht zu verificiren, indem wir *die Gleichung der Sehne der Punkte* ϑ', ϑ'' direct bilden. Der sie halbirende Radius gehört zu dem Winkel $\frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'')$ und der senkrechte Abstand der Sehne vom Centrum ist $\varrho \cos \frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta'')$. Also lautet die Hesse'sche Normalform der Gleichung

$$x \cos \tfrac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'') + y \sin \tfrac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'') - \varrho \cos \tfrac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta'') = 0.$$

B. 1) Die Coordinaten des Schnittpunktes der Tangenten in zwei Punkten ϑ', ϑ'' des Kreises sind

$$x = \varrho \frac{\cos\frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'')}{\cos\frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta'')}, \quad y = \varrho \frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'')}{\cos\frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta'')}.$$

2) Ort des Schnittpunktes der Tangenten an den Enden einer Sehne von constanter Länge.

Indem wir die Substitution dieses Paragraphen in die Gleichung $(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = \text{const.}$ machen, reducirt sie sich auf $\cos(\vartheta' - \vartheta'') = \text{const.}$

War die Länge der Sehne $= 2\varrho \sin\delta$, so ist $\vartheta' - \vartheta'' = 2\delta$. Die im letzten Beispiel gefundenen Coordinaten erfüllen die Bedingung $(x^2 + y^2)\cos^2\vartheta = \varrho^2$ als die Gleichung des Ortes.

3) Der Ort eines Punktes, welcher eine Sehne von gegebener Länge in einem bestimmten Verhältnis r teilt, ist $x^2 + y^2 = \text{const.}$

4) Die Diagonalen zwischen den Gegenecken eines dem Kreis umgeschriebenen Sechsecks schneiden sich in einem Punkt.

Seien die Berührungspunkte der sechs Seiten $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_6$, dann ist die Gleichung der Verbindungslinie des Schnittpunktes der Tangenten in ϑ_1, ϑ_2 mit dem der Tangenten ϑ_4, ϑ_5

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\frac{1}{2}(\vartheta_2 - \vartheta_5)\left[x\cos\frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_4) + y\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_4) - \varrho\cos\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_4)\right] \\ + \sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_4)\left[x\cos\frac{1}{2}(\vartheta_2 + \vartheta_5) + y\sin\frac{1}{2}(\vartheta_2 + \vartheta_5) - \varrho\cos\frac{1}{2}(\vartheta_2 + \vartheta_5)\right] = 0. \end{array}\right\}$$

Addiren wir sie zu den andern zwei Gleichungen derselben Form für $\vartheta_2\vartheta_3$, $\vartheta_5\vartheta_6$ und $\vartheta_3\vartheta_4$, $\vartheta_6\vartheta_1$, so ist die Summe Null.

5) Alle Sehnen von constanter Länge in einem Kreis berühren einen zweiten Kreis. Denn in der Gleichung der Sehne nach dem Text ist gemäfs 2) $\vartheta' - \vartheta'' = \delta$ bekannt und $\vartheta' + \vartheta''$ unbestimmt; die Sehne berührt daher stets den Kreis

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 \cos^2\delta.$$

6) Wenn eine Anzahl von Punkten gegeben ist und eine Gerade so gelegt wird, dafs das $m_1$fache ihres Abstands vom ersten Punkt und das $m_2$fache ihres Abstands vom zweiten Punkt etc. eine constante Summe gibt, so umhüllt die Linie einen festen Kreis. (Vgl. § 49. 4), wo die Summe Null ist.)

Indem wir die Bezeichnung jenes Beispiels annehmen, haben wir statt der dort gefundenen Gleichung nur zu schreiben:

$$\left[x\Sigma m_i - \Sigma m_i x_i\right]\cos\alpha + \left[y\Sigma m_i - \Sigma m_i y_i\right]\sin\alpha = \text{const.}$$

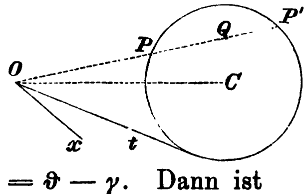
Also berührt die Gerade stets den Kreis

$$\left[x - \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}\right]^2 + \left[y - \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}\right]^2 = \text{const.},$$

dessen Centrum das Centrum der mittleren Entfernungen der gegebenen Punkte ist.

113. **Die allgemeine Polargleichung des Kreises** können wir erhalten, indem wir in die auf rechtwinklige Axen bezogene Gleichung desselben durch $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$; $\alpha = c\cos\gamma$, $\beta = c\sin\gamma$ die Polarcoordinaten einführen.

Sie folgt auch selbständig aus der geometrischen Natur des Kreises so: Sei O der Nullpunkt, C das Kreiscentrum, seien $OP = r$, $OC = c$, endlich ϑ und γ die Winkel von OP und OC gegen eine beliebige Axe, also $\sphericalangle COP = \vartheta - \gamma$. Dann ist



$$\overline{CP}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OP}^2 - 2OC \,.\, OP \,.\cos COP$$

und dies gibt die Gleichung in Polarcoordinaten

$$r^2 - 2cr\cos(\vartheta - \gamma) + c^2 - \varrho^2 = 0.$$

Fällt die Nullaxe mit OC zusammen, so ist $\gamma = 0$ zu setzen, und für $c = 0$ bleibt $r^2 = \varrho^2$. Nehmen wir den Nullpunkt auf dem Kreise an, so dafs $c = \varrho$ wird, so lautet die Gleichung nach Absonderung eines Factors r $r = 2\varrho\cos(\vartheta - \gamma)$. Die geometrische Bedeutung derselben ist offenbar die, dafs der Peripheriewinkel über dem Halbkreis ein Rechter ist, denn nur so kann der Vector die Projection des Durchmessers sein.

Umgekehrt stellt jede Polargleichung von der Form

$$r^2 + 2hr\cos\vartheta + 2kr\sin\vartheta + l = 0$$

einen Kreis dar; es wird nämlich

$$c^2 = h^2 + k^2, \quad \tan\gamma = k : h, \quad \varrho^2 = h^2 + k^2 - l.$$

Sie enthält den Vector scheinbar nur linear, wenn $l = 0$ oder $l = \infty$, während $h : l$, $k : l$ endliche Werte behalten, d. h. wenn der Kreis den Nullpunkt enthält oder zerfällt (§ 104).

Die Polargleichung der Tangente in $r' \,|\, \vartheta'$ ergibt sich auf dem Wege der Substitution in die Schlufsform des § 109 als

$$r'r\cos(\vartheta' + \vartheta) - cr\cos(\gamma + \vartheta) - cr'\cos(\gamma + \vartheta') + \pi = 0.$$

B. 1) Ort der Mittelpunkte Q der Sehnen PP' im Kreise, welche durch einen festen Punkt O gehen.

Es soll $OP + OP' = 2\,OQ$ sein, aber die Summe der Wurzeln der Polargleichung ist $= 2c\cos\vartheta$, daher $OQ = c\cos\vartheta$. Also hat der Ort die Polargleichung $r = d\cos\vartheta$ und ist der über OC als Durchmesser beschriebene Kreis.

2) Ein Punkt und eine Gerade $r\cos(\vartheta - \alpha) = p$ sind gegeben. Der Ort von Q, wenn OQ als der inverse Wert von OP, dem Vector eines Punktes der Linie, genommen wird, ist der durch O gehende Kreis $pr = \cos(\vartheta - \alpha)$.

3) Von einem Dreieck ist der Scheitel, der Scheitelwinkel und das Rechteck unter den Seiten gegeben; welchen Ort beschreibt die eine Basisecke, wenn die andere sich in einer Geraden oder einem Kreise bewegt?

Wir nehmen den Scheitel zum Pol, setzen die Längen der Seiten gleich r und r', und ihre Winkel gegen die Axe gleich ϑ und ϑ'; alsdann finden wir, indem wir für r und für ϑ in die Gleichung des gegebenen Ortes $k^2 : r'$ und $C + \vartheta'$ einsetzen, eine Relation zwischen r' und ϑ', welche die Polargleichung des durch die andere Basisecke beschriebenen Ortes ist. Diese Aufgabe wird in derselben Art gelöst, wenn anstatt ihres Products das Verhältnis der Seiten gegeben ist.

4) Durch einen Schnittpunkt zweier Kreise ist eine Gerade gezogen; man hat den Ort für den Mittelpunkt des zwischen die Kreise gefaſsten Stückes derselben zu finden.

Die Gleichungen der Kreise sind von der Form $r = 2\varrho\cos(\vartheta - \gamma)$ und $r = 2\varrho'\cos(\vartheta - \gamma')$, die Gleichung des Ortes ist alsdann $r = \varrho\cos(\vartheta - \gamma) + \varrho'\cos(\vartheta - \gamma')$; sie repräsentirt einen Kreis.

5) Wenn durch einen beliebigen Punkt O in der Peripherie eines Kreises drei Sehnen willkürlich gezogen werden und über jeder als Durchmesser ein Kreis beschrieben wird, so schneiden sich diese drei Kreise in drei andern Punkten, welche in einer Geraden liegen.[19])

Nehmen wir den festen Punkt zum Pol O und d als den Durchmesser des ursprünglichen Kreises, so ist seine Gleichung $r = d\cos\vartheta$. Bildet der Durchmesser eines der andern Kreise mit der Axe den Winkel η, so ist seine Länge $= d\cos\eta$ und die Gleichung des Kreises $r = d\cos\eta\cos(\vartheta - \eta)$; die Gleichung des zweiten Kreises ist ebenso $r = d\cos\eta'\cos(\vartheta - \eta')$.

Um die Polarcoordinaten des Schnittpunktes dieser zwei Kreise zu finden, suchen wir den Wert von ϑ, für welchen

$$\cos\eta\cos(\vartheta - \eta) = \cos\eta'\cos(\vartheta - \eta')$$

und finden leicht $\vartheta = \eta + \eta'$ und den entsprechenden Wert von

$r = d \cos\eta \cos\eta'$. Ebenso sind die Polarcoordinaten des Schnittpunktes des ersten und eines dritten Kreises $\vartheta = \eta + \eta''$, $r = d \cos\eta \cos\eta''$.

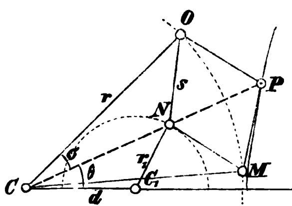
Um nun die Polargleichung der diese beiden Punkte verbindenden Linie zu finden, setzen wir in die allgemeine Gleichung der Geraden $r\cos(\vartheta - \sigma) = p$ (§ 44) nach einander diese Werte von ϑ und r; aus den zwei Gleichungen zur Bestimmung von p und σ ergibt sich

$$p = d\cos\eta\cos\eta' \cos\left[\sigma - (\eta + \eta')\right] = d\cos\eta\cos\eta'' \cos\left[\sigma - (\eta + \eta'')\right],$$

also $\quad \sigma = \eta + \eta' + \eta''$ und $p = d \cos\eta \cos\eta' \cos\eta''$.

Die Symmetrie dieser Werte zeigt, dafs es dieselbe Gerade ist, welche die Schnittpunkte des ersten und zweiten und des zweiten und dritten Kreises verbindet.

6) Ein Rhombus $MNOP$ von gegebener Seite s aber veränderlichen Winkeln bewegt sich so, dafs die Ecken M und O auf einem festen Kreise vom Mittelpunkt C und Radius ϱ bleiben, während die Ecke N einen andern festen Kreis vom Mittelpunkt C_1 in der Distanz $CC_1 = c$ und vom Radius ϱ_1 durchläuft; man bestimme den Ort der vierten Ecke P.



Wenn wir den Mittelpunkt C zum Pol und die Centrale CC_1 zur Axe von Polarcoordinaten nehmen, so dafs $CP = r$ und $\sphericalangle\, C_1CP = \sphericalangle\, C_1CN = \vartheta$ ist, so haben wir für L als Mittelpunkt des Rhombus

$$CN = CL - NL, \quad CP = CL + NL \text{ oder } CN . CP = \overline{CL}^2 - \overline{NL}^2,$$

somit für $\sphericalangle\, NCO = \lambda$

$$CN . CP = \varrho^2 \cos^2\sigma - s^2 + \varrho^2 \sin^2\sigma = \varrho^2 - s^2;$$

auch ist $CN = c\cos\vartheta + \sqrt{\varrho_1^2 - c^2\sin^2\vartheta}$, also

$$\left[c\cos\vartheta + \sqrt{\varrho_1^2 - c^2\sin^2\vartheta}\right] r = \varrho^2 - s^2$$

oder nach leichter Umformung

$$r^2 - 2r\frac{c(\varrho^2 - s^2)\cos\vartheta}{c^2 - \varrho_1^2} + \frac{(\varrho^2 - s^2)^2}{c^2 - \varrho_1^2} = 0.$$

Der Ort ist also nach dem Text ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Centrale im Abstand $\frac{c(\varrho^2 - s^2)}{c^2 - \varrho_1^2}$ vom Pol liegt. Derselbe geht mit $c = \varrho_1$ oder für C als auf der Peripherie des von N durchlaufenen Kreises in eine Gerade über, die zu CC_1 senk-

recht steht im Abstande $\frac{\varrho^2 - s^2}{2\varrho_1}$. Dies ist die Peaucellier'sche Geradführung:[20]) eine Kurbelbewegung von N erzeugt durch das Gliederviereck $MNOP$ eine geradlinige Hinundherbewegung von P.

114. **Potenz.** *Auf allen Secanten eines Kreises, die durch einen festen Punkt O gehen, ist das Rechteck aus den von O aus gemessenen Segmenten von constantem Inhalt.*

Denn, nehmen wir O als Nullpunkt der Polarcoordinaten (§ 113), so entsprechen einer Secante von gegebenem Winkel ϑ Segmente $OP = r'$, $OP'' = r''$, deren Werte Wurzeln sind der Polargleichung

$$r^2 - 2cr\cos(\vartheta - \gamma) + c^2 - \varrho^2 = 0.$$

Somit ist ihr Product gleich dem constanten Gliede

$$r'r'' = c^2 - \varrho^2 = \Pi,$$

also von der Richtung ϑ der Secante unabhängig.

Hat nun O die Coordinaten $x_0 | y_0$ in dem Axensystem, für welches die Kreisgleichung die Constanten $\alpha | \beta | \pi$ besitzt, so ist der Wert jenes constanten Products $c^2 - \varrho^2$

$$\begin{aligned}\Pi &= (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - \varrho^2 \\ &= x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \pi.\end{aligned}$$

Das Resultat Π der Substitution der Coordinaten $x_0 | y_0$ eines Punktes in die linke Seite der Normalform der Kreisgleichung heifst die Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis (oder die Potenz des Kreises in dem Punkt).[21]) Hiernach ist die Potenz nur Null in Punkten der Peripherie. Die Potenz des Nullpunktes in Bezug auf den Kreis ist einfach das constante Glied π der normalen Kreisgleichung. Die Potenz des Kreiscentrums ist $-\varrho^2$, das negative Radiusquadrat.

Für jeden reellen Punkt ist die Potenz reell. Bei reellem Kreise ist sie positiv oder negativ, je nachdem die reellen Segmente r' und r'' gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind. Im ersten Fall gibt es unter den reellen Segmenten insbesondere gleiche, nämlich in den durch $c^2\sin^2(\vartheta - \gamma) = \varrho^2$ bestimmten Tangenten aus O. *Also ist die Potenz eines äusseren Punktes positiv und gleich dem Quadrat der Länge t seiner*

Tangenten (§ 119). Für unendlich ferne Punkte ist die Potenz unendlich grofs.

Im zweiten Fall können die Segmente speciell entgegengesetzt gleich sein, $r' + r'' = 0$, nämlich für die in O (Q in der Figur) halbirte Sehne, die wegen $\cos(\vartheta - \gamma) = 0$ zum Durchmesser von O normal ist. *Also ist die Potenz eines inneren Punktes das negative Quadrat der halben kürzesten Sehne durch denselben.* In Bezug auf einen Nullkreis ist die Potenz jedes Punktes gleich seinem Abstandsquadrat vom Mittelpunkt.

Auch in Bezug auf einen imaginären Kreis läfst sich die Potenz eines reellen Punktes reell definiren. Ist nämlich $\varrho = \varrho' i$, also $\Pi = c^2 + \varrho'^2$, so bedeutet in dem reellen Stellvertreterkreis Π das Quadrat des Abstandes des gegebenen Punktes von den Endpunkten des zu dem seinigen normalen Kreisdurchmessers. Für jeden Punkt des Kreises ϱ' ist die Potenz in Bezug auf den concentrischen Kreis $\varrho = \varrho' i$ constant gleich $-2\varrho^2$.

Man nennt die Quadratwurzel $\sqrt{\Pi}$ allgemein die *Tangentenlänge*, auch wenn sie imaginär ist, und den mit $\sqrt{\Pi}$ als Radius um O beschriebenen Kreis den *Potenzkreis* von O in Bezug auf den gegebenen. Derselbe ist nur für Punkte im Innern eines reellen Kreises imaginär, sonst stets reell. Er geht nach Definition stets durch die Berührungspunkte der aus O gezogenen Tangenten an den gegebenen Kreis.

Die Potenz einer Geraden, als eines unendlich grofsen Kreises ist in jedem nicht auf ihr liegenden Punkt unendlich grofs. In der Tat geht für $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$, $\pi = \infty$ die Gleichung des Kreises nach Division durch π über in

$$-2\frac{\alpha}{\pi}x - 2\frac{\beta}{\pi}y + 1 = 0.$$

Also bleiben die Verhältnisse der Potenz des Nullpunktes zu den Coordinaten der zu einer Geraden normalen Richtung endlich und sind gleich den doppelten Axenabschnitten derselben (§ 28).

B. 1) Vier Punkte $x_1|0$, $x_2|0$, $0|y_3$, $0|y_4$ liegen auf einem Kreis, wenn $x_1x_2 = y_3y_4$ ist (vgl. § 107).

2) Durch zwei feste Punkte P_1, P_2 gehen zwei Kreise, die eine gegebene Gerade berühren.

Denn, ist O der Schnittpunkt von P_1P_2 mit derselben, so schneidet der aus O mit dem Radius $\sqrt{OP_1 \,.\, OP_2}$ beschriebene Kreis die Berührungspunkte der Geraden heraus.

115. **Pol und Polare.** Die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis können wir nach der Methode des § 51 auch durch die Verhältnisse angeben, nach welchen sie eine Strecke $x'|y'$, $x''|y''$ der Geraden teilen. Denn, sind diese Teilverhältnisse $n_1 : n_2$ bestimmt, so ergeben sich die Coordinaten der Teilpunkte nach § 13.

Die Schnittpunkte des Kreises $\alpha|\beta|\pi$ mit der Verbindungsgeraden der Punkte $x'|y'$, $x''|y''$ sind in der Form enthalten $\frac{n_1x''+n_2x'}{n_1+n_2} \Big| \frac{n_1y''+n_2y'}{n_1+n_2}$. Setzen wir diese Ausdrücke für $x|y$ in die Kreisgleichung ein und multipliciren dieselbe mit $(n_1+n_2)^2$, so erhalten wir zur Bestimmung des Parameters $n_1 : n_2$ eine quadratische Gleichung

$$\Pi'' n_1^2 + 2\mathsf{P} n_1 n_2 + \Pi' n_2^2 = 0.$$

In derselben sind offenbar die Factoren von n_1^2 und n_2^2 einfach die Resultate der Substitution von $x''|y''$ ($n_2 = 0$) und von $x'|y'$ ($n_1 = 0$) statt $x|y$ in die Gleichung, also die Potenzen der gegebenen Punkte in Bezug auf den Kreis. Den Coefficienten P von $2n_1n_2$ erhalten wir in den beiden symmetrischen Gestalten

$$\begin{aligned}\mathsf{P} &= (x'-\alpha)(x''-\alpha) + (y'-\beta)(y''-\beta) - \varrho^2\\ &= x'x'' + y'y'' - \alpha(x'+x'') - \beta(y'+y'') + \pi.\end{aligned}$$

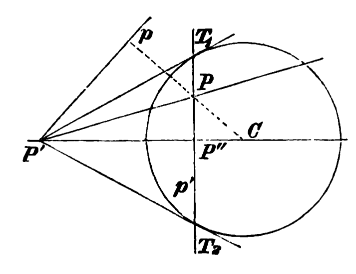
Nun können wir offenbar durch andere Wahl der festen Punkte in der gegebenen Geraden über die Gröfse der Teilzahlen oder der Gleichungscoefficienten verfügen. Die beiden Wurzeln werden insbesondere entgegengesetzt gleich, d. h. die Schnittpunkte teilen die Strecke harmonisch (§ 14), wenn der Coefficient P verschwindet. *Man nennt zwei Punkte $x'|y'$, $x''|y''$, die durch den Kreis harmonisch getrennt sind oder deren Coordinaten der Bedingung $\mathsf{P} = 0$ genügen, conjugirt harmonische Pole in Bezug auf den Kreis.*

Ziehen wir eine beliebige Gerade durch den Punkt $x'|y'$, so ist der von ihm durch den Kreis harmonisch getrennte Punkt $x''|y''$ ihr Schnittpunkt mit der Geraden von der Gleichung

$$(x'-\alpha)(x-\alpha)+(y'-\beta)(y-\beta)-\varrho^2=0.$$

Den Ort der zu einem gegebenen Punkt P' harmonisch conjugirten Pole P'' heifst die Polare p' des gegebenen Pols in Bezug auf den Kreis. Zu einem reellen Pol gehört stets auch eine reelle Polare.

Die Polare steht auf dem Durchmesser des Pols P' senkrecht, da dessen Gleichung lautet



$$(y'-\beta)(x-\alpha)-(x'-\alpha)(y-\beta)=0.$$

Ihr Schnittpunkt P'' ist der in Bezug auf die Durchmesser-endpunkte conjugirt harmonische Punkt zu P', wird also mittelst des Centrums C stets reell construirt nach der harmonischen Relation des § 14

$$CP'.\,CP''=\varrho^2.$$

In der Tat berechnet man die Coordinaten $x''|y''$ desselben (§ 32) aus

$$x''-\alpha=\frac{\varrho^2(x'-\alpha)}{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2},\quad y''-\beta=\frac{\varrho^2(y'-\beta)}{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2},$$

wonach die vorige Streckenrelation verificirt werden kann. Damit ist die reelle Construction der Polare als Normale zum Durchmesser in dem conjugirten Pol auf demselben gesichert. Ist der Kreis imaginär $\varrho=\varrho' i$, so bemerkt man, dafs die Polare wegen $CP'.\,CP''=-\varrho'^2$ bezüglich des Centrums symmetrisch liegt zu der Geraden, die als Polare von P' im Stellvertreterkreis erhalten wird (vgl. § 17. 1)).

Insbesondere hat die Polare eines Punktes $x'|y'$ in Bezug auf einen Kreis $x^2+y^2=\varrho^2$ die Gleichung

$$x'x+y'y=\varrho^2.$$

Jedem unendlich fernen Pol $y':x'=m'$ entspricht als

Polare daher der zu seiner Richtung normale Kreisdurchmesser

$$x + my = 0.$$

B. 1) Die Polare von $4 \mid 4$ in Bezug auf $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$ ist $3x + 2y - 20 = 0$.

2) Die Polare von $4 \mid 5$ in Bezug auf $x^2 + y^2 - 3x - 4y - 8 = 0$ ist $5x + 6y - 48 = 0$.

3) Der conjugirte Pol zu $5 \mid -4$ auf dessen Durchmesser im Kreise

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0 \text{ ist } \frac{13}{2} \Big| \frac{13}{2}.$$

4) Die Polare des Nullpunktes im Kreise $\alpha \mid \beta \mid \pi$ ist

$$\alpha x + \beta y - \pi = 0.$$

116. **Die Polare eines auf dem Kreise liegenden Pols ist die in ihm berührende Tangente.** Denn die Polare geht, wenn ihr Pol auf dem Kreise liegt, durch denselben und ist die Normale zu seinem Radius. Dasselbe lehrt die Übereinstimmung der Gleichungen der Polare in § 115 und der Tangente in § 109.

In dem durch einen gegebenen Punkt gehenden Secantenbüschel befinden sich zwei Tangenten; in diesen ist der vierte harmonische Punkt mit den Schnittpunkten je im Berührungspunkt vereinigt (§ 15). *Daher ist die Polare eines Punktes die Verbindungsgerade der Berührungspunkte seines Tangentenpaares.* In der Tat bestimmt man nach § 111 die Berührungspunkte eines Tangentenpaares stets als die Schnittpunkte mit der Polare.

Damit aber die quadratische Gleichung des § 115 gleiche Wurzeln liefere, müssen $x' \mid y'$, $x'' \mid y''$ der Bedingung genügen

$$\mathrm{P}^2 - \Pi'\Pi'' = 0.$$

Ist also $x \mid y$ irgend ein Punkt in einer der Tangenten aus $x' \mid y'$, so genügen seine Coordinaten der Gleichung

$$\left[(x'-\alpha)(x-\alpha)+(y'-\beta)(y-\beta)\right]^2 - \Pi'\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\varrho^2\right] = 0$$

d. h. dies ist *die Gleichung des Tangentenpaares.* Für Kreise um den Nullpunkt lautet sie (vgl. § 111)

$$(x'x + y'y - \varrho^2)^2 - (x'^2 + y'^2 - \varrho^2)(x^2 + y^2 - \varrho^2) = 0.$$

* Nun zerfällt die linke Seite der Gleichung des Tangentenpaares in das Product linearer Factoren $T_1 \cdot T_2$, also ist umgekehrt identisch

$$\Pi'\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\varrho^2\right]=\mathsf{P}^2-T_1 T_2.$$

Aus dieser bestimmten Form, auf welche die Gleichung jedes Kreises gebracht werden kann, folgt, dafs für jeden Punkt des Kreises das Product seiner Abstände von zwei Tangenten in constantem Verhältnis zu dem Quadrat seines Abstandes von ihrer Berührungssehne steht.

Offenbar kann aber zu jedem gleichschenkligen Dreiseit ein Kreis gefunden werden, der die Schenkel in den Basisecken berührt. Sind nun die Gleichungen der Schenkel

$$T_1 = x\cos\tau_1 + y\sin\tau_1 - p_1 = 0,\quad T_2 = x\cos\tau_2 + y\sin\tau_2 - p_2 = 0,$$

so ist die der Basis notwendig von der Form

$$\mathsf{P} = x\cos\tfrac{1}{2}(\tau_1+\tau_2) - y\sin\tfrac{1}{2}(\tau_1+\tau_2) - p_3 = 0.$$

Es mufs somit eine Verhältniszahl k geben, so dafs $\mathsf{P}^2 - kT_1T_2 = 0$ einen Kreis darstellt, wenn auch nicht in der Normalform. Ordnet man die linke Seite, so ergibt der Ausdruck der Kriterien des § 101 einfach $k=1$. *Demnach ist der Ort eines Punktes, der sich so bewegt, dafs das Quadrat seines senkrechten Abstandes von der Basis eines gleichwinkligen Dreiecks gleich dem Product der Abstände von den beiden Schenkeln ist, der Kreis, welcher letztere zu Tangenten und erstere zur Berührungssehne hat.*

B. 1) Die Gleichung des Tangentenpaares aus dem Nullpunkt (§ 115. 4)) an den Kreis $\alpha \mid \beta \mid \pi$ lautet

$$(\alpha x + \beta y - \pi)^2 - \pi(x^2+y^2-2\alpha x - 2\beta y + \pi) = 0.$$

2) Die Geraden $x-5=0$, $3x+4y-25=0$ und $2x+y-10=0$ bilden ein gleichschenkliges Dreieck; der in den Basisecken berührende Kreis ist

$$\left(\frac{2x+y-p}{\sqrt{5}}\right)^2 - (x-5)\,\frac{3x+4y-25}{5} = \frac{1}{5}\,(x^2+y^2-25).$$

3) Der Winkel δ des Tangentenpaares aus $x' \mid y'$ an $x^2+y^2=\varrho^2$ bestimmt sich (§ 55) aus

$$\operatorname{tg}\delta = -2\varrho\,\frac{\sqrt{x'^2+y'^2-\varrho^2}}{x'^2+y'^2-2\varrho^2} = -2\varrho\,\frac{\sqrt{\Pi'}}{\Pi'-\varrho^2}.$$

4) Der Ort der Schnittpunkte rechtwinkliger Tangenten ist ein zum gegebenen concentrischer Kreis vom doppelten Radiusquadrat.

117. Die Gleichung zwischen den Coordinaten conjugirt harmonischer Pole

$$x'x'' + y'y'' - \alpha(x' + x'') - \beta(y' + y'') + \pi = 0$$

ist in $x' \mid y'$ und $x'' \mid y''$ vollkommen symmetrisch. Also ist sie ebensowol die Bedingung, unter welcher $x'' \mid y''$ in der Polare von $x' \mid y'$ liegt, wie die, damit die Polare von $x'' \mid y''$ durch $x' \mid y'$ geht. *Liegt somit ein Punkt P'' in der Polare eines Punktes P', so liegt auch P' in der Polare von P''.* Daher ist die Polare des Centrums die unendlich ferne Gerade, da die Durchmesser Polaren von Richtungen sind.

Wir finden so den Pol einer Geraden als den Schnittpunkt der Polaren von zwei Punkten derselben. Z. B. schneiden sich die Tangenten in den Schnittpunkten der gegebenen Geraden mit dem Kreis in ihrem Pol, die Polare ist Berührungssehne seiner Tangenten. Analytisch genügt es zur Bestimmung des Poles einer Geraden $\xi' x + \eta' y + 1 = 0$, ihre Gleichung mit der allgemeinen Form einer Polare zu vergleichen. Es sind danach die Liniencoordinaten $\xi' \mid \eta'$ der Polare von $x' \mid y'$

$$\xi' = \frac{x' - \alpha}{\pi - \alpha x' - \beta y'}, \quad \eta' = \frac{y' - \beta}{\pi - \alpha x' - \beta y'},$$

somit folgen durch Auflösung umgekehrt zu $\xi' \mid \eta'$ die Coordinaten $x' \mid y'$ des Poles.

Durchläuft P'' die Polare von P', so dreht sich die Polare von P'' um den Pol P' und umgekehrt, oder *einer geraden Reihe von Polen entspricht ein Büschel von Polaren, wobei die Träger auch als Polare und Pol zusammengehören.* Sind in einem Kreise $x^2 + y^2 - \varrho^2 = 0$ die Polaren von $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$ $x_1 x + y_1 y - \varrho^2 = 0$, $x_2 x + y_2 y - \varrho^2 = 0$, so ist die Polare von $\frac{x_1 - \nu x_2}{1 - \nu} \Big| \frac{y_1 - \nu y_2}{1 - \nu}$ in der Tat

$$x_1 x + y_1 y - \varrho^2 - \nu(x_2 x + y_2 y - \varrho^2) = 0.$$

Also ist ihr Sinusteilverhältnis ν' in dem durch jene be-

stimmten Büschel zu dem Teilverhältnis v des Pols in der Reihe proportional, nämlich $v' = v\sqrt{\frac{x_2^2+y_2^2}{x_1^2+y_1^2}}$ (§ 62).

Setzt man überhaupt in die Gleichung der Polare $x_1x + y_1y - \varrho^2 = 0$ von P_1 die Coordinaten eines andern Punktes P_2 ein, so ist $x_1x_2 + y_1y_2 - \varrho^2$ gleich dessen Abstand P_2Q_1 von der Polare multiplicirt mit OP_1, ebenso aber gleich dem mit OP_2 multiplicirten Abstand P_1Q_2 von der Polare des zweiten Punktes. *Fällt man also von einem Punkt P_1 die Normale P_1Q_2 auf die Polare eines andern P_2 und von P_2 die Normale P_2Q_1 auf die Polare von P_1, so ist*

$$P_1Q_2 : OP_1 = P_2Q_1 : OP_2.$$

B. 1) Der Pol von $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ in Bezug auf
$x^2 + y^2 = \varrho^2$ ist $-\frac{a_1\varrho^2}{a_3} \Big| -\frac{a_2\varrho^2}{a_3}$.

2) Der Pol von $3x + 4y = 7$ in Bezug auf
$x^2 + y^2 = 14$ ist $6 \mid 8$.

3) Der Pol von $2x + 3y = 6$ in Bezug auf
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 12$ ist $-11 \mid -16$.

4) Die Polaren von vier Punkten einer harmonischen Gruppe bilden ebenfalls eine solche Gruppe.

5) Ort von Q, wenn die Länge OQ das harmonische Mittel zwischen OP und OP' ist (§ 14. 2)), d. h.

$$OQ = \frac{2 \cdot OP \cdot OP'}{OP + OP'}.$$

Es ist $OP \cdot OP' = c^2 - \varrho^2$ und $OP + OP' = 2c\cos\vartheta$, daher die Polargleichung des Ortes

$$r = \frac{c^2 - \varrho^2}{c\cos\vartheta} \quad \text{oder} \quad r\cos\vartheta = \frac{c^2-\varrho^2}{c}.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, welche in der Entfernung $c - \frac{\varrho^2}{c}$ von O, somit in der Entfernung $\frac{\varrho^2}{c}$ von C zu OC senkrecht ist (d. h. die Polare von O, § 115).

Wir können in derselben Art diese und ähnliche Aufgaben lösen, wenn die Gleichung in der Form gegeben ist

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \varkappa = 0,$$

also zu Polarcoordinaten transformirt lautet

$$r^2 - 2(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta)r + \varkappa = 0.$$

Nach obigem Verfahren finden wir für den Ort der harmonischen Mittel $r = \frac{\pi}{\alpha \cos \vartheta + \beta \sin \vartheta}$, oder $\alpha x + \beta y - \pi = 0$, die Polare des Nullpunktes.

118. **Polarconjugirte Dreiecke.** Die Polaren der Ecken eines Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ in Bezug auf einen Kreis bilden ein Dreiseit $P_2' P_3'$, $P_3' P_1'$, $P_1' P_2'$ und die Polaren von dessen Ecken P_1', P_2', P_3' sind die Seiten $P_2 P_3$, $P_3 P_1$, $P_1 P_2$ des ersten. Solche Dreiecke nennt man polarconjugirt in Bezug auf den Kreis. *Die Verbindungsgeraden $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$, $P_3 P_3'$ der entsprechenden Ecken in polarconjugirten Dreiecken schneiden sich in einem Punkte.* Denn deren Gleichungen lauten, für $x^2 + y^2 = \varrho^2$ als Gleichung des Kreises und wenn $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$, $x_3 \mid y_3$ die gegebenen Punkte sind, offenbar (§ 40)

$$(x_2 x_3 + x_3 x_1 - \varrho^2)(x_1 x + y_1 y - \varrho^2)$$
$$= (x_3 x_1 + y_3 y_1 - \varrho^2)(x_2 x + y_2 y - \varrho^2)$$
$$= (x_1 x_2 + y_1 y_2 - \varrho^2)(x_3 y + y_3 y - \varrho^2).$$

Dann liegen nach § 64. 4) die Schnittpunkte $P_2 P_3$, $P_2' P_3'$; $P_3 P_1$, $P_3' P_1'$; $P_1 P_2$, $P_1' P_2'$ in einer Geraden, der Polare jenes Schnittpunktes der Verbindungsgeraden.

Dieser Satz enthält in sich folgenden speciellen Fall: *Ist ein Kreis einem Dreieck eingeschrieben, so schneiden sich die Verbindungsgeraden je einer Ecke mit dem Berührungspunkt der Gegenseite in einem Punkt.* Denn zu dem Dreieck von drei Punkten des Kreises ist das Dreiseit ihrer Tangenten polarconjugirt.

Ein Dreieck ist sich selbst polarconjugirt und heifst ein Polardreieck, wenn zu jeder Ecke P_1, P_2, P_3 die Gegenseite p_1, p_2, p_3 als Polare gehört. Es ist dazu nur erforderlich, dafs die Coordinaten der drei Punkte P_1, P_2, P_3 den Relationen gemäfs gewählt sind

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \varrho^2, \quad x_2 x_3 + y_2 y_3 = \varrho^2, \quad x_3 x_1 + y_3 y_1 = \varrho^2.$$

Ist $x_1 \mid y_1$ völlig willkürlich gegeben, so kann als $x_2 \mid y_2$ nur noch ein Punkt der Polare $x_1 x + y_1 y = \varrho^2$ angenommen werden, und die dritte Ecke ist völlig bestimmt. Wenn eine Ecke auf dem Kreise liegt, so fällt auch eine zweite mit ihr zusammen und man hat kein eigentliches Dreieck mehr. *Das*

Centrum C des Kreises ist der gemeinsame Höhenschnittpunkt aller Polardreiecke, denn die Normale vom Pol auf die Polare mufs durch dasselbe gehen (§ 115). *Die Polardreiecke eines reellen Kreises sind notwendig stumpfwinklig und zwar liegt die stumpfe Ecke im Innern des Kreises.* Zunächst mufs nämlich stets eine Ecke im Innern liegen, wie man auch $x_1 \mid y_1$ wählt. Denn, geht man etwa von einem äufseren Punkt $x_1 \mid y_1$ aus, so sind doch die conjugirt harmonischen Pole $x_2 \mid y_2$, $x_3 \mid y_3$ durch einen der reellen Schnittpunkte der Polare von $x_1 \mid y_1$ getrennt. Das Quadrat der Entfernung harmonischer Pole $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$ kann aber geschrieben werden

$$(x_1^2 + y_1^2 - \varrho^2) + (x_2^2 + y_2^2 - \varrho^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2 - \varrho^2)$$

oder ist also gleich der Summe $\Pi_1 + \Pi_2$ ihrer Potenzen, da das letzte Glied verschwindet. Von den Summen $\Pi_1 + \Pi_2$, $\Pi_2 + \Pi_3$, $\Pi_3 + \Pi_1$ ist aber diejenige am gröfsten, welche zwei positive Summanden hat, d. h. die aufserhalb des Kreises liegende Seite $P_1 P_2$ des Polardreiecks ist die gröfste. Endlich liegt ihr ein stumpfer Winkel gegenüber, weil $\Pi_1 + \Pi_2 > (\Pi_1 + \Pi_3) + (\Pi_2 + \Pi_3)$.

In Bezug auf einen imaginären Kreis gibt es gleichwol reelle Polardreiecke, jedoch sind dieselben spitzwinklig, da die Potenzen der Ecken sämmtlich positiv sind, also auch das Quadrat $\Pi_1 + \Pi_2$ der gröfsten Seite kleiner ist, als die Summe der Quadrate $\Pi_1 + \Pi_3$, $\Pi_2 + \Pi_3$ der andern.

B. 1) Polarconjugirte Dreiecke in Bezug auf $x^2 + y^2 = 3^2$ sind $3 \mid 6$, $1 \mid 0$, $-3 \mid 3$ und $9 \mid 12$, $-1 \mid 2$, $9 \mid -3$ und der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Ecken ist $-1 \mid 2$.

2) Ein Polardreieck bezüglich $x^2 + y^2 = 2^2$ ist $1 \mid 1$, $3 \mid 1$, $0 \mid 4$.

3) Das Product der Segmente, in welche der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks die Höhen zerlegt, ist constant, nämlich gleich dem Radiusquadrat des Kreises, in Bezug auf den das Dreieck sich selbst conjugirt ist.

4) Durch das Polardreieck $4 \mid 3$, $-5 \mid -3$, $11 \mid -11$ ist der Kreis $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 4^2 = 0$ bestimmt.

Siebentes Kapitel.

Systeme von Kreisen.

119. **Radicalaxe zweier Kreise.** Die Normalgleichung

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0$$

eines Kreises $\alpha \mid \beta \mid \pi$ ist abkürzend mit $\Pi(x \mid y) = 0$ oder $\Pi = 0$ zu bezeichnen, da die linke Seite derselben nach § 114 die Potenz Π des Punktes $x \mid y$ in Bezug auf den Kreis ausdrückt.

Sind zwei Kreise $\alpha_1 \mid \beta_1 \mid \pi_1$, $\alpha_2 \mid \beta_2 \mid \pi_2$ oder $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ gegeben, so haben dieselben in einem beliebigen Punkt $x \mid y$ im allgemeinen verschiedene Potenzen Π_1, Π_2. Diejenigen Punkte insbesondere, deren Potenzen in Bezug auf beide Kreise gleich sind, erfüllen einen Ort, da ihre Coordinaten nur der einen Bedingung zu genügen haben:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \quad \text{oder} \quad \Pi_1 - \Pi_2 = 0.$$

Diese Bedingung ist aber, da die quadratischen Glieder in Π_1 und Π_2 denselben Coefficienten haben, nur noch linear

$$2(\alpha_2 - \alpha_1)x + 2(\beta_2 - \beta_1)y + \pi_1 - \pi_2 = 0.$$

Der Ort der Punkte von gleichen — endlichen — Potenzen bezüglich zweier Kreise ist eine stets reelle Gerade $\Pi_1 - \Pi_2 = 0$, *welche die Potenzlinie oder Radicalaxe der gegebenen Kreise genannt wird.*[22])

Aufserdem ist auch die unendlich ferne Gerade ein Ort von Punkten gleicher, nämlich unendlich grofser Potenzen. Denn für Werte $x = \infty$ oder $y = \infty$ hängt der Wert von Π lediglich von dem in Π_1 und Π_2 übereinstimmenden höchsten Glied $x^2 + y^2$ ab, da die Glieder niedrigeren Grades bei Di-

vision durch jenes verschwindend klein werden, also neben $x^2 + y^2$ nicht in Betracht kommen. Der gesammte Ort der Punkte gleicher Potenzen besteht also aus der unendlich fernen Geraden und der Radicalaxe der gegebenen Kreise, ist also eigentlich selbst ein zerfallender Kreis (§ 104).

Die Radicalaxe liegt im allgemeinen im Endlichen. Nur für $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ reducirt sich ihre Gleichung auf $0 \cdot x + 0 \cdot y + \pi_1 - \pi_2 = 0$, d. h. *für zwei concentrische Kreise fällt die Radicalaxe mit der unendlich fernen Geraden zusammen.*

In allen übrigen Fällen ist die Radicalaxe folgendermafsen reell zu bestimmen. Die Verbindungsgerade der Kreiscentra $\alpha_1 | \beta_1$, $\alpha_2 | \beta_2$, *die Centrale der Kreise,* hat die Gleichung

$$(\beta_1 - \beta_2)\, x - (\alpha_1 - \alpha_2)\, y + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0.$$

Somit sind Centrale und Radicalaxe stets zu einander normal (§ 31) und es genügt die Bestimmung ihres Schnittpunktes.

Bezeichnen wir die Entfernung der Centra oder *die Centraldistanz der Kreise* $\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}$ mit c, so ergeben sich leicht die Abstände d_1, d_2 der Centra $\alpha_1 | \beta_1$, $\alpha_2 | \beta_2$ von der Radicalaxe aus ihrer durch c dividirten Gleichung als

$$d_1 = -\frac{-c^2 + \varrho_2^2 - \varrho_1^2}{2c}, \quad d_2 = -\frac{c^2 + \varrho_2^2 - \varrho_1^2}{2c}.$$

Hieraus folgt aber einfach $d_2^2 - d_1^2 = \varrho_2^2 - \varrho_1^2$; die Radicalaxe teilt die Centraldistanz so, dafs die Differenz der Quadrate der Teile gleich der Differenz der Radienquadrate ist. Der Teilpunkt liegt zwischen den Mittelpunkten, wenn $\varrho_2^2 - \varrho_1^2$ dem absoluten Wert nach kleiner als c^2 ist, denn d_1, d_2 sind dann verschiedenen Zeichens.

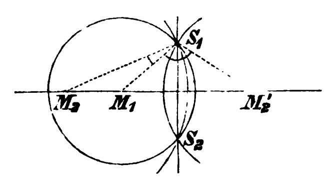
Dasselbe folgt aus der Forderung, dafs die Tangenten aus jenem Teilpunkt gleich sein müssen. Denn gemäfs § 114 hat die Radicalaxe auch die Eigenschaft, *dafs die von einem ihrer Punkte aus an beide Kreise gezogenen Tangenten gleich lang sind.*

120. **Die Schnittpunkte zweier Kreise** haben in beiden die Potenz Null, gehören daher stets dem Orte gleicher Potenzen in Bezug auf dieselben an. Dieser besteht aus der

Radicalaxe und der unendlich fernen Geraden, schneidet also jeden der gegebenen Kreise in zwei Punktepaaren (§ 106). Da jedoch eines derselben unendlich fern ist, finden wir notwendig übereinstimmend mit der Anschauung: *zwei Kreise können nicht mehr als zwei Schnittpunkte im Endlichen haben.*

In der Sprache der analytischen Geometrie müssen gemäfs dem Theorem des § 23 zwei Kreise, da ihre Gleichungen vom zweiten Grade sind, vier Schnittpunkte besitzen. Von diesen sind die Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden nach § 108 allen Kreisen überhaupt gemeinsam, da sie die absoluten Richtungen sind. Demnach haben zwei Kreise nur zwei nicht absolut feste Schnittpunkte und diese liegen auf ihrer Radicalaxe. Auch sie fallen noch mit den absoluten Richtungen zusammen, wenn die Kreise concentrisch sind.

Somit besitzen zwei nicht-concentrische Kreise stets zwei im Endlichen gelegene Schnittpunkte, deren notwendig reelle Sehne die Radicalaxe ist. Damit ist die Bestimmung der Schnittpunkte S_1, S_2 zweier Kreise auf § 106 zurückgeführt; sie liegen symmetrisch zur Centrale und können reell, gesondert oder vereinigt, oder conjugirt imaginär sein.



Im letzten Falle ist die Radicalaxe als der Träger des Punktepaares nach dem vorigen § reell construirbar. Sonst ergibt sie sich umgekehrt am einfachsten aus den Schnittpunkten als die gemeinsame Sehne (Chordale) der Kreise. Für zwei sich berührende Kreise geht sie in ihre gemeinsame Tangente im Berührungspunkt über. Je nachdem $\varrho_1 + \varrho_2 = c$, oder $\varrho_2 - \varrho_1 = c$ $(\varrho_2 > \varrho_1)$, berühren die Kreise die Radicalaxe von entgegengesetzter oder gleicher Seite; ihre gegenseitige Berührung geschieht von aufsen oder von innen, bez. ausschliefsend oder einschliefsend; damit reelle Schnittpunkte existiren, mufs sowol $\varrho_1 + \varrho_2 > c$ als $\varrho_2 - \varrho_1 < c$ sein.

Von Interesse sind namentlich die Schnittpunkte zweier Nullkreise. Die Radicalaxe derselben ist die Mittelnormale ihrer Centrale. Zwei reelle Punkte eines Paares von der

Mitte $u \mid u'$ können dargestellt werden als $u + v' \mid u' - v$, $u - v' \mid u' + v$; dann sind die Schnittpunkte der Nullkreise an denselben

$$(x - u - v')^2 + (y - u' + v)^2 = 0,$$
$$(x - u + v')^2 + (y - u' - v)^2 = 0$$

die conjugirt imaginären Punkte $u \pm iv \mid u' \pm iv'$ (vgl. § 16). Somit kann ein imaginäres Punktepaar jederzeit definirt werden als das Paar der Schnittpunkte zweier bestimmter Nullkreise, deren reelle Centra man etwa die zu den imaginären *associirten Punkte* genannt hat. (Vgl. § 96. 1).)

B. 1) Die Radicalaxe von $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 9 = 0$ ist $10x + 13y - 16 = 0$.

2) Die Radicalaxe von zwei reellen Kreisen und die der imaginären Kreise, deren Stellvertreter jene sind, liegen zur Mitte der Centrale symmetrisch.

3) Die Radicalaxe eines reellen und imaginären Kreises ist der Ort der Punkte, deren Tangenten an den ersteren gleich den Abständen der Schnittpunkte der Centrale mit dem Stellvertreter des letzteren sind.

4) Die Radicalaxe eines Kreises mit einem Punkt (Nullkreis) halbirt den Abstand des letzteren von seiner Polare im ersteren oder halbirt die Tangenten; denn ist $\varrho_1 = 0$, so ist $2cd_1 = \varrho_2{}^2 - c^2$.

5) Das Quadrat der Tangente von einem Punkt eines Kreises an einen andern ist dem Abstand desselben von der Radicalaxe proportional.

121. **Radicalcentrum dreier Kreise.** Sind drei Kreise $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, $\Pi_3 = 0$ gegeben und bestimmen für wir jedes Paar derselben die Radicalaxe, so geht aus den Gleichungen $\Pi_1 - \Pi_2 = 0$, $\Pi_2 - \Pi_3 = 0$, $\Pi_3 - \Pi_1 = 0$ derselben hervor, dafs sie durch einen und denselben Punkt gehen (§ 41). *Drei Kreise besitzen im allgemeinen ein Radicalcentrum, den Schnittpunkt der drei Radicalaxen.* Die Coordinaten desselben lauten

$$\frac{\beta_1(\pi_3 - \pi_2) + \beta_2(\pi_1 - \pi_3) + \beta_3(\pi_2 - \pi_1)}{\beta_1(\alpha_3 - \alpha_2) + \beta_2(\alpha_1 - \alpha_3) + \beta_3(\alpha_2 - \alpha_1)} \Bigg| \frac{\alpha_1(\pi_3 - \pi_2) + \alpha_2(\pi_1 - \pi_3) + \alpha_3(\pi_1 - \pi_2)}{\alpha_1(\beta_3 - \beta_2) + \alpha_2(\beta_1 - \beta_3) + \alpha_3(\beta_2 - \beta_1)}.$$

Für Kreise von gemeinsamer Centrale ist das Radicalcentrum somit unendlich fern (§ 38).

Auch kann dann der Fall eintreten, dafs die drei Kreise dieselbe Radicalaxe haben, d. h. durch dieselben beiden Punkte

gehen. Die Bedingung, dafs drei Kreise gemeinsame Schnittpunkte haben, ist somit das gleichzeitige Verschwinden der Zähler und des Nenners obiger Quotienten.

Da für drei Kreise, deren Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen, das Radicalcentrum im Endlichen liegt, so kann der Satz dazu dienen, die Radicalaxe von zwei reellen Kreisen ohne reelle Schnittpunkte zu bestimmen. Man kann stets einen Hilfskreis einführen, der die beiden gegebenen reell schneidet, und hat vom Schnittpunkt der beiden gemeinsamen Sehnen die Normale auf die gegebene Centrale zu fällen.

Somit ändert sich das Radicalcentrum nicht, wenn wir von den drei Kreisen $\Pi_3 = 0$ durch einen beliebigen andern ersetzen, der nur mit $\Pi_2 = 0$ dieselben Schnittpunkte haben soll, denn von den drei Radicalaxen bleiben dann zwei fest. Wir drücken dies so aus: *die gemeinsamen Sehnen eines festen Kreises mit Kreisen durch zwei feste Punkte gehen durch einen festen Punkt.*

Das Radicalcentrum ist der einzige Punkt, dessen Tangenten an die gegebenen Kreise gleich lang sind. Die drei Paare ihrer Berührungspunkte liegen somit stets auf einem Kreise, dem *Hauptkreise* der drei gegebenen. Derselbe ist nur dann imaginär, wenn das Radicalcentrum sich innerhalb eines reellen Kreises unter den gegebenen befindet. Denn die Tangenten an einen imaginären Kreis aus einem reellen Punkt haben stets reelle Länge (§ 111); also kann der Hauptkreis nur imaginär werden, wenn die gegebenen Kreise sämmtlich reell sind und sich überdies reell schneiden. In der Tat zeigt eine einfache Überlegung, dafs das Radicalcentrum nur dann im Innern von drei sich paarweise schneidenden Kreisen liegt, wenn die Schnittpunkte zweier derselben je durch den dritten getrennt sind.

B. 1) Das Radicalcentrum von $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 7$, $(x-3)^2 + y^2 = 5$, $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$ ist $-\frac{1}{16} \mid -\frac{25}{16}$ und der Radius des Hauptkreises $\frac{3}{16}\sqrt{194}$.

2) Die Geraden, welche die Mitten der aus zwei festen

Punkten an einen beweglichen Kreis gezogenen Tangentenpaare verbinden, schneiden sich in der Mittelnormale jener Punkte.

Denn, die drei Geraden sind Radicalaxen (§ 120. 4)).

122. **Schnittwinkel.** Als den Schnittwinkel ω zweier reellen Kreise bezeichnet man vorzugsweise denjenigen von den Radien eines Schnittpunktes S_1 eingeschlossenen Winkel, welcher der Centrale gegenüber liegt (Fig. § 120). Dieser Radienwinkel ist an beiden Schnittpunkten S_1, S_2 gleich, denn sie bilden mit den Mittelpunkten congruente Dreiecke. Aus denselben folgt seine Gröſse durch

$$\cos\omega = -\frac{c^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2}{2\varrho_1\varrho_2} = -\frac{\pi_1 + \pi_2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)}{2\varrho_1\varrho_2}.$$

In diesem Ausdruck ist die rechte Seite nur ein ächter Bruch, solange $\varrho_1 + \varrho_2 > c > \varrho_2 - \varrho_1$ (§ 120), dagegen stets reell, solange die Kreise beide reell oder beide imaginär sind; sie wird rein imaginär, wenn ein Kreis reell, der andere imaginär ist. Nach der analytischen Definition des Cosinus (§ 42) ist das Argument ω rein imaginär, wenn $\cos^2\omega > 1$, und complex mit dem reellen Bestandteil $\frac{\pi}{2}$, wenn $\cos\omega$ rein imaginär ist.

Wir definiren nun, ganz unabhängig von der Realität und dem reellen Schnitt der Kreise, *den Quotienten der Function* $c^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2$ *durch das negative doppelte Radienproduct als den Cosinus des Schnittwinkels der Kreise.* Alsdann ist der Winkel oder sein Complement entweder reell oder rein imaginär.

Sind die Kreise reell, so unterscheidet sich ihre Lage, je nachdem der Schnittwinkel spitz oder stumpf ist, offenbar so, daſs der eine den andern mehr einschlieſst (Mittelpunkt M_2) oder mehr ausschlieſst (M_2'). Ganz gebräuchlich ist diese Unterscheidung bei der Berührung zweier Kreise (§ 120): sie ist einschlieſsend (innerlich) oder ausschlieſsend (äuſserlich), je nachdem $\omega = 0$ oder $\omega = \pi$ ist.

Ist der Schnittwinkel ω ein Rechter ($\cos\omega = 0$), so sagt man, die Kreise schneiden sich orthogonal. Somit ist

$$c^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2$$

die Bedingung der Orthogonalität zweier Kreise.

Dafs ein Kreis einen andern rechtwinklig schneide, ist also eine für die Coefficienten seiner Gleichung lineare Bedingung. Aber die zu einem gegebenen reellen Kreise ϱ_1 orthogonalen Kreise ϱ_2 sind nur reell, wenn ihre Mittelpunkte aufserhalb desselben liegen ($c > \varrho_1$). Die aus den inneren Punkten beschriebenen, imaginären Orthogonalkreise $\varrho_2 = \varrho_2' i$ haben reelle Stellvertreter (§ 103), in welchen wegen $c^2 = \varrho_1^2 - \varrho_2'^2$, die Schnittpunkte mit dem gegebenen Endpunkt des zur Centrale normalen Durchmessers sind. Man bezeichnet einen Kreis, dessen Schnittsehne mit einem andern einer seiner Durchmesser ist, als *diametral* geschnitten. Danach kann man zu einem imaginären Kreis für jeden gegebenen Mittelpunkt einen reellen Orthogonalkreis construiren, indem man zu seinem Stellvertreter den concentrischen *Diametralkreis* sucht.

Erst durch drei Orthogonalitätsbedingungen ist ein Kreis bestimmt, d. h. drei Kreise $\alpha_1 | \beta_1 | \pi_1$, $\alpha_2 | \beta_2 | \pi_2$, $\alpha_3 | \beta_3 | \pi_3$ besitzen stets einen gemeinsamen Orthogonalkreis[23]) $\alpha | \beta | \pi$. Seine Gleichung wird erhalten durch Elimination der $\alpha|\beta|\pi$ aus

$$\pi_i + \pi = 2(\alpha_i \alpha + \beta_i \beta) \quad (i = 1, 2, 3) \text{ als}$$

$$\mathsf{H} = \begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ \pi_1, & \alpha_1, & \beta_1, & 1 \\ \pi_2, & \alpha_2, & \beta_2, & 1 \\ \pi_3, & \alpha_3, & \beta_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Offenbar ist $\mathsf{H} = 0$ *der Hauptkreis um das Radicalcentrum der drei gegebenen* (§ 121), wie eine Entwickelung der Determinante zeigt. Wenn das Radicalcentrum unbestimmt ist, existiren unzählige Orthogonalkreise zu drei gegebenen.

B. 1) Die Kreise $x^2 + y^2 = 9$, $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 16$ schneiden sich unter einem Winkel von 120^0 (ausschliefsend).

2) Die Orthogonalkreise zu $x^2 + y^2 = 14$ von den Mittelpunkten $3|5$, $1|2$ haben die Gleichungen $(x-3)^2 + (x-5)^2 = 20$, bez. $(x-3)^2 + (x-5)^2 + 9 = 0$.

3) Die Orthogonalkreise eines Nullkreises gehen durch dessen Mittelpunkt.

4) Ein imaginärer Kreis und sein Stellvertreter (§ 103) schneiden sich rechtwinklig.

5) Imaginäre Kreise können einander weder orthogonal schneiden, noch einander berühren.

6) Wenn zwei Kreise zu einander orthogonal sind, so ist ihre Radicalaxe die Polare jedes Centrums in Bezug auf den andern Kreis.

7) Die Determinantenform der Gleichung des Hauptkreises zu drei gegebenen Kreisen läfst sich umformen in

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y, & x - \alpha_1, & y - \beta_1 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y, & x - \alpha_2, & y - \beta_2 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha_3 x - 2\beta_3 y, & x - \alpha_3, & y - \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

und drückt so eine Flächenrelation für seine Punkte aus (vgl. § 104).

8) Haben drei Kreise dieselbe Radicalaxe, so gibt es unendlich viele gemeinsame Orthogonalkreise; denn die Bedingungen des § 121 ergeben die Äquivalenz der drei Orthogonalitätsbedingungen mit nur zweien.

123. **Die Potenz zweier Kreise in Bezug auf einander wird definirt als die Function**

$$\Pi = c^2 - (\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2) = \pi_1 + \pi_2 - 2(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2)$$

d. h. als der Überschufs des Quadrates der Centraldistanz über die Summe der Radienquadrate.[24]) Demnach ist die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis nach § 114 als die Potenz des letzteren und des Nullkreises an jenem unter dem neuen Begriff enthalten. Die Bedingung der Orthogonalität zweier Kreise ist das Verschwinden ihrer Potenz, $\Pi = 0$.

Dieser Potenzbegriff ist auch noch auf Gerade als unendlich grofse Kreise anwendbar, obwol der obige Ausdruck alsdann offenbar selbst unendlich grofs wird. Zur Begründung dessen ist nur die Annahme zu machen, dafs alle Geraden der Ebene als congruente Kreise, von demselben unendlich grofsen Radius, anzusehen sind. Diese Voraussetzung ist aber selbstverständlich, sobald wir jede endliche Entfernung zweier Punkte als verschwindend betrachten gegenüber der Entfernung eines unendlich fernen Punktes von einem im Endlichen gelegenen.

Halten wir von dem Kreise $\alpha_2 | \beta_2$ den Punkt $x_0 | y_0$ fest und lassen α_2, β_2, ϱ_2 unbegrenzt wachsen, so dafs das Ver-

hältnis $\beta_2 : \alpha_2 = m_2$ constant bleibt, so liefert die Gleichung $\Pi_2 = 0$ nach Division durch α_2^2 für die Grenzwerte $\alpha_2 = \infty$, $\varrho_2 = \infty$

$$1 + m_2^2 = \left(\frac{\varrho_2}{\alpha_2}\right)^2, \quad \frac{1 + m_2^2}{m_2^2} = \left(\frac{\varrho_2}{\beta_2}\right)^2.$$

Dividirt man nun die Kreisgleichung durch $2\varrho_2$, setzt $\varrho_2 = \infty$ und an Stelle von $\alpha_2 : \varrho_2$, $\beta_2 : \varrho_2$ obige Werte, so reducirt sie sich auf

$$\frac{\alpha_2^2 + \beta_2^2 - \varrho_2^2}{2\varrho_2} - \frac{x_0 + m_2 y_0}{\sqrt{1 + m_2^2}} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2\varrho_2} = \frac{x_0 + m_2 y_0}{\sqrt{1 + m_2^2}}.$$

Endlich lehrt die Einsetzung in den Ausdruck der Potenz, dafs die Potenz eines Kreises und einer Geraden zu dem unendlich grofsen Radius derselben ein endliches Verhältnis behält

$$\left(\frac{\Pi}{2\varrho_2}\right) = -\frac{\alpha_1 - x_0 + m_2(\beta_1 - y_0)}{\sqrt{1 + m_2^2}} = d.$$

Dies ist aber genau der Ausdruck des Abstandes d (§ 37) des Kreismittelpunktes $\alpha_1 \mid \beta_1$ von der Geraden

$$x - x_0 + m_2(y - y_0) = 0,$$

in welche der andere Kreis übergegangen ist*) (§ 104).

Somit verhalten sich die Potenzen eines Kreises in Bezug auf zwei Gerade wie die Abstände derselben vom Kreiscentrum

$$\Pi' : \Pi'' = d' : d''.$$

Unter der obigen Voraussetzung haben wir die Potenzen von Kreisen in Bezug auf Gerade als den Abständen der Centra und der Geraden proportionale unendliche Gröfsen zu behandeln.

Ebenso erweist sich, dafs die Potenz zweier Geraden in Bezug auf einander zum Product ihrer Radien ein endliches Verhältnis bewahrt. Setzen wir nämlich bei $\varrho_1 = \infty$ in den Ausdruck für $\left(\frac{\Pi}{2\varrho_2}\right)$ ein $\frac{\alpha_1}{\varrho_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + m_1^2}}$, $\frac{\beta_1}{\varrho_1} = \frac{m_1}{\sqrt{1 + m_1^2}}$, so entsteht

---

*) Dabei ist das Vorzeichen von $\sqrt{1 + m_2^2}$ so zu wählen, dafs $\frac{x_0 + m y_0}{\sqrt{1 + m_2^2}} > 0$ ist.

$$\left(\frac{\Pi}{2\varrho_1\varrho_2}\right) = -\frac{1+m_1m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}} = -\cos\omega \text{ (§ 31)},$$

wie auch wiederum unmittelbar zu erwarten war. *Somit verhalten sich die Potenzen von Linienpaaren, wie die Cosinus der eingeschlossenen Winkel:*

$$(\Pi') : (\Pi'') = \cos\omega' : \cos\omega''.$$

Diese genaue Betrachtung der Grenzübergänge zeigt, dafs unter allen Umständen zwischen der Potenz und dem Schnittwinkel von Kreisen, von Kreisen und Geraden oder von Geraden die Relation besteht

$$\Pi = -2\varrho_1\varrho_2\cos\omega.$$

B. 1) Die Potenz der Kreise § 122. 1) ist $\Pi = 12$.

2) Kreise, welche in Bezug auf einen gegebenen Kreis dieselbe Potenz Π haben, haben auch in Bezug auf jeden mit diesem concentrischen Kreis constante Potenz.

Insbesondere haben Kreise constanter Potenz in Bezug au, einen gegebenen einen mit diesem concentrischen Orthogonalkreisf denn die Potenz seines Centrums in Bezug auf sie ist ebenfalls constant $c^2 - \varrho^2 = \Pi + \varrho_1^2$.

3) Kreise, die einen gegebenen unter constantem Winkel schneiden, haben in Bezug auf denselben Potenzen, die ihren Radien proportional sind, und umgekehrt.

Jeder Kreis, der zwei gegebene unter constanten Winkeln schneidet, hat mit denselben Potenzen von constantem Verhältnis.

124. **Kreisbüschel.** Sind $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ die Gleichungen zweier Kreise, so stellt jede Gleichung, die für irgend einen Wert von k in der Form enthalten ist

$$\Pi_1 - k\Pi_2 = 0,$$

einen durch die Schnittpunkte der gegebenen gehenden Kreis dar. Es ist dies, wenn man die Definition des Kreises nach § 108 berücksichtigt, eine unmittelbare Folge des Princips des § 61. In der Tat enthält $\Pi_1 - k\Pi_2$ wie Π_1 und Π_2 selbst quadratische Glieder nur in der Verbindung $x^2 + y^2$ und verschwindet mit Π_1 und Π_2 zugleich. Nur, falls $k = 1$ ist, erhalten wir die lineare Gleichung $\Pi_1 - \Pi_2 = 0$ der gemeinsamen Sehne, als eines degenerirten Kreises. Umgekehrt kann auch jeder Kreis, der durch die Schnittpunkte

hältnis $\beta_2 : \alpha_2 = m_2$ constant [illegible] dargestellt werden; denn, $\Pi_2 = 0$ nach Division d[illegible] [illegible]ner Peripherie vorgeschrieben, $\varrho_2 = \infty$ [illegible] Substitution von $x' \mid y'$ in jenen

$1 +$ [illegible] Wert $k = \Pi_1 (x' \mid y') : \Pi_2 (x' \mid y')$.

[illegible] *der Kreise, deren Gleichungen einen Para-* [illegible] *enthalten, wird als ein Kreisbüschel bezeichnet.*

Dividirt ma[illegible] und an [illegible] dann gemeinsame Schnittpunkte besitzen, ist sie si[illegible] das Büschel durch dieselben bestimmt. Man nennt diese Schnittpunkte, vorzugsweise die beiden willkürlich annehmbaren, *die Grundpunkte des Büschels.* Man hat demnach zu unterscheiden Büschel mit reellen, conjugirt imaginären oder vereinten Grundpunkten. Im letzten Fall berühren sich alle Kreise in den vereinten Grundpunkten; den ersten Fall versinnlichen die Kreise O, C_1, C_2, C_3, den zweiten die Kreise M_1, M_2, M_3, M_4 der Figur.

Alle Kreise eines Büschels haben die Radicalaxe und die Centrale gemein. In der Tat hat ein Kreis des Büschels die Normalgleichung $\Pi = \frac{\Pi_1 - k\Pi_2}{1 - k} = 0$, also das Centrum $\frac{\alpha_1 - k\alpha_2}{1 - k} \,\Big|\, \frac{\beta_1 - k\beta_2}{1 - k}$. Der Parameter k eines Kreises im Büschel ist somit das Teilverhältnis seines Mittelpunktes in Bezug auf die Mittelpunkte der gegebenen. Das Radiusquadrat eines solchen Kreises erhalten wir dagegen als

$$\varrho^2 = \frac{\varrho_1^2 - 2k\varrho_1\varrho_2 \cos \omega + k^2\varrho_2^2}{(1 - k)^2}.$$

Die Radicalaxe des Büschels ist der Ort der Punkte gleicher Potenzen in Bezug auf alle Kreise desselben. Denn, sind die Potenzen $\Pi_1 (x \mid y)$ und $\Pi_2 (x \mid y)$ gleich, so ist auch $\Pi (x \mid y)$ unabhängig von k und gleich $\Pi_1 (x \mid y)$. Allgemein ist *der*

rt eines Punktes, dessen Potenzen in Bezug auf zwei gegebene eise Π_1, Π_2 *in constantem Verhältnis* k *stehen, der Kreis Büschels von der Gleichung* $\Pi_1 - k\Pi_2 = 0$. Diese Eigenaften sind von der Realität der Schnittpunkte völlig unabhängig.

Ordnet man $\Pi_1 - k\Pi_2 = (\Pi_1 - \Pi_2) - (k-1)\Pi_2 = 0$, so erkennt man, dafs ein Büschel stets durch einen seiner Kreise $\Pi_2 = 0$ und seine Radicalaxe $R = 0$ bestimmt werden kann in der Gleichungsform $\Pi_2 - hR = 0$. *Also bilden Kreise mit derselben Radicalaxe stets ein Büschel.*

125. **Die Polaren eines beliebigen Punktes P in Bezug auf die Kreise eines Büschels gehen durch einen Punkt P' oder bilden ein Strahlenbüschel.** Denn, sind die Polaren von $x' | y'$ in Bezug auf $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ bez. $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, so hat die Polare von $x' | y'$ in $\Pi_1 - k\Pi_2 = 0$ die Gleichung

$$(1-k)(x'x + y'y) - (\alpha_1 - k\alpha_2)(x' + x) - (\beta_1 - k\beta_2)(y' + y) + \pi_1 - k\pi_2 = 0,$$

oder
$$(1-k)P = P_1 - kP_2 = 0.$$

Somit sind der Punkt P und der Scheitel P' des Polarenbüschels conjugirte Pole in Bezug auf jeden der Kreise oder, wie man sagt, *doppeltconjugirte Pole in Bezug auf das Büschel.* Die Verbindungsgerade doppeltconjugirter Pole wird daher von jedem Kreise des Büschels harmonisch geteilt, oder durch irgend zwei zu PP' harmonische Punkte geht ein Kreis des Büschels. Insbesondere wird daher die Strecke PP' durch die Radicalaxe (in M_1) halbirt, da dies eine specielle harmonische Teilung ist. Namentlich aber mufs der durch P (oder durch P') selbst gehende Kreis (C_1) des Büschels die Gerade PP' berühren, weil seine Schnittpunkte mit ihr nicht getrennt sein können (§ 14). Nun wird aber jede Gerade (g_1 in Fig. § 124) der Ebene von zwei (reellen oder imaginären) Kreisen des Büschels berührt (§ 114. 2)) und die beiden Berührungspunkte sind stets doppelt conjugirte Pole, denn die Tangente im ersten an den einen und die Polare im andern schneiden sich im zweiten (§ 117). *Somit wird jede Gerade von zwei Kreisen des Büschels berührt und von den übrigen in*

Punktepaaren geschnitten, die zu den Berührungspunkten harmonisch liegen.

Einem Punkt P der Radicalaxe ist der durch die Grundpunkte harmonisch getrennte P' doppelt conjugirt, als Schnittpunkt der Polaren. Zu den Grundpunkten $x' \mid y'$ und $x'' \mid y''$ selbst gehören als Polaren die Tangenten der Kreise in ihnen. Die Gleichung einer Tangente

$$(x' - \alpha)(x - \alpha) + (y' - \beta)(y - \beta) - \varrho^2 = 0$$

kommt aber durch Division mit ϱ auf die Hesse'sche Normalform, da $\varrho = \sqrt{\{(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2\}}$. Sind also $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ die Tangenten der gegebenen Kreise in $x' \mid y'$ und ist $T_1 - kT_2 = 0$ die des Kreises von Parameter k, so ist für einen beliebigen Punkt in der letzteren das Verhältnis seiner Abstände von $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ gleich $k(\varrho_2 : \varrho_1)$. Oder der Parameter k eines Kreises ist gleich dem mit der Constanten $\varrho_1 : \varrho_2$ multiplicirten Sinusteilverhältnis der Tangente desselben in Bezug auf die Tangenten der gegebenen. So sind z. B. für die Parameterwerte $k = \pm \varrho_1 : \varrho_2$ (Sinusteilverhältnisse ± 1) die zugehörigen Tangenten die Winkelhalbirenden des gegebenen Tangentenpaares, oder die Kreise

$$\varrho_2 \Pi_1 \mp \varrho_1 \Pi_2 = 0$$

halbiren die Winkel der gegebenen $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$.

126. **Grenzpunkte.** Für die weitere Behandlung des Kreisbüschels ist es vorteilhaft, die Centrale als x-Axe und die Radicale als y-Axe zu nehmen (Fig. § 124). Da zu jedem reellen Punkt der Centrale ein reeller oder imaginärer Kreis des Büschels gehört, so sei $x^2 + y^2 + \varkappa = 0$ der zu ihrem Schnittpunkt O mit der Radicale gehörige Kreis desselben. Dann ist die Parametergleichung des Büschels

$$x^2 + y^2 - 2kx + \varkappa = 0,$$

und die des Polarenbüschels zum Pole $x' \mid y'$

$$x'x + y'y - k(x' + x) + \varkappa = 0.$$

Nun kann es aber Punkte geben, deren Polaren in Bezug auf die Kreise nicht nur durch einen Punkt gehen, sondern ganz fest sind.[25]) In der Tat hat die Centrale in Bezug auf

alle Kreise denselben unendlich fernen Pol (§ 115), die Richtung der Radicalaxe, wie obige Gleichung für $y' = \infty$ bestätigt. Im übrigen mufs für einen solchen Pol $x'x + y'y + \varkappa = 0$ und $x' + x = 0$ dieselbe Gerade darstellen, die dann die Polare ist, welches auch k sei. Diese Identität erfordert aber $y' = 0$, $x'^2 = \varkappa$ oder $x' = \pm \sqrt{\varkappa}$, wo dann die Gleichung der Polare lautet $x = \mp \sqrt{\varkappa}$.

Somit gibt es in der Centrale zwei ausgezeichnete Punkte von der Eigenschaft, dafs jeder die Normale zur Centrale im andern als gemeinsame Polare in Bezug auf die Kreise des Büschels besitzt. Sie heifsen *die Grenzpunkte des Büschels und sind reell oder imaginär, je nachdem die Grundpunkte imaginär oder reell sind,* denn diese, die gemeinsamen Schnittpunkte, haben die Coordinaten $0 \mid \pm \sqrt{-\varkappa}$ (Grundpunkte und Grenzpunkte eines Büschels bilden daher associirte Punktepaare (§ 120)). Der Kreis des Büschels um O schneidet die Centrale je in den beiden Punkten $\pm \sqrt{-\varkappa} \mid 0$, die zu den Grenzpunkten in der Beziehung der Stellvertretung stehen (§ 17).

Hat ein Büschel reelle Grenzpunkte, so gehören dieselben ihm als Nullkreise an. Der Radius des Kreises vom Parameter oder vom Centrum k ist $\sqrt{(k^2 - \varkappa)}$, daher bei positivem $\varkappa$ nur so lange reell, als $k^2 > \varkappa$, Null für $k = \pm \sqrt{\varkappa}$ und imaginär für $k^2 < \varkappa$. Also werden die reellen Kreise immer kleiner, je näher ihr Mittelpunkt von aufsen her an zwei zur Radicale symmetrische Punkte rückt, die man deshalb nach Poncelet als die Grenzpunkte bezeichnet. Bei negativem $\varkappa$ oder reellen Grundpunkten gehört dagegen zu jedem reellen Mittelpunkt ein reeller Kreis.

127. **Conjugirte Büschel.** Jeder Punkt $0 \mid h$ der Radicalaxe hat in Bezug auf alle Kreise des Büschels $x^2 + y^2 - 2kx + \varkappa = 0$ die Potenz $h^2 + \varkappa$ (§ 114). Daher schneidet ein Kreis vom Mittelpunkt $0 \mid h$ und der Tangentenlänge $\sqrt{(h^2 + \varkappa)}$ als Radius jeden Kreis des Büschels orthogonal und hat die Gleichung $x^2 + (y - h)^2 = h^2 + \varkappa$. Denkt man h veränderlich, so stellt demgemäfs

$$x^2 + y^2 - 2hy - \varkappa = 0$$

ein Büschel von Orthogonalkreisen der gegebenen dar. Die

Centrale derselben ist die y-Axe, die Radicale die x-Axe, die Grundpunkte sind $\pm \sqrt{\pi} \mid 0$, der Kreis um den Punkt O hat die Gleichung $x^2 + y^2 - \pi = 0$. Andere Orthogonalkreise des gegebenen Büschels gibt es aber nicht, da sie auch die Radicale desselben rechtwinklig schneiden, also zum Durchmesser haben müssen.

Daher bilden alle Orthogonalkreise eines Büschels wiederum ein Büschel, welches das zu demselben conjugirte Kreisbüschel heifst. Dasselbe besitzt die Radicalaxe bez. die Centrale des gegebenen als Centrale bez. Radicalaxe, die Grundpunkte bez. Grenzpunkte desselben aber als Grenzpunkte bez. Grundpunkte. Hat also das eine der Büschel reelle Grundpunkte, so hat das conjugirte reelle Grenzpunkte und, schneiden sich die Kreise des einen nicht reell, so gehen die Orthogonalkreise desselben durch zwei reelle Punkte.

Durch jeden reellen Punkt P der Ebene gehen zwei zu einander orthogonale Kreise C_1, M_1, die zwei gegebenen conjugirten Büscheln angehören, denn jeder derselben geht noch durch die beiden Grundpunkte. Der Schnittpunkt P' der Polaren von P in Bezug auf das erste Büschel O, C_1, C_2 liegt daher in der Tangente von P im Kreise C_1 in demselben Abstand von der Radicalaxe $x = 0$ wie P, d. h. ist der zweite Endpunkt des Durchmessers von P im Kreise M_1. Ebenso ist P'' der Schnittpunkt des Polaren bezüglich des zweiten Büschels, wenn PP'' Durchmesser von C_1 ist. *Doppeltconjugirte Pole in Bezug auf ein gegebenes Büschel sind Durchmesserendpunkte in einem Orthogonalkreis desselben und umgekehrt* (vgl. § 125).

Allgemein kann man conjugirte Büschel folgendermafsen darstellen: Sind $\Pi' = 0$, $\Pi'' = 0$ zwei concentrische Kreise, deren Radienquadrate entgegengesetzt gleich sind $\varrho'^2 + \varrho''^2 = 0$, und $D' = 0$, $D'' = 0$ zwei zu einander rechtwinklige Durchmesser derselben, so sind $\Pi' - kD' = 0$, $\Pi'' - kD'' = 0$ conjugirte Kreisbüschel.

128. **Kreisnetz.** Sind $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, $\Pi_3 = 0$ die Normalgleichungen dreier Kreise und k, l zwei unabhängige

Parameter, so stellt für jedes Wertepaar derselben auch

$$\Pi_1 + k\Pi_2 + l\Pi_3 = 0$$

einen Kreis dar. Der Mittelpunkt desselben folgt aus den gegebenen als

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + k\alpha_2 + l\alpha_3}{1 + k + l} \quad \Big| \quad \beta = \frac{\beta_1 + k\beta_2 + l\beta_3}{1 + k + l}.$$

In der Gesammtheit dieser Kreise gehört daher zu jedem reellen Punkt der Ebene als Mittelpunkt *ein* bestimmter Kreis, sobald die Centra der gegebenen nicht auf einer Geraden liegen*), denn jedem entspricht ein bestimmtes Parameterpaar (§ 13. 7)). *Man nennt die Gesammtheit der von zwei Parametern linear abhängigen Kreise ein Kreisnetz.*

Die Kreise eines Netzes besitzen ein gemeinsames Radicalcentrum d. h. es existirt ein reeller Punkt, der in Bezug auf alle Kreise des Netzes dieselbe Potenz hat. Da nämlich für das Radicalcentrum der drei gegebenen Kreise $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3$ ist, so ist in diesem Punkt auch die Potenz des veränderlichen Kreises

$$\Pi = \frac{\Pi_1 + k\Pi_2 + l\Pi_3}{1 + k + l}$$

constant gleich Π_1. Somit schneidet der Hauptkreis $H = 0$ (§ 122) der drei gegebenen sämmtliche Kreise des Netzes orthogonal. Umgekehrt existirt zu einem gegebenen Mittelpunkt nur ein Orthogonalkreis zu $H = 0$. *Daher besteht das Kreisnetz aus allen Kreisen, die einen gegebenen Kreis, den Hauptkreis des Netzes, orthogonal schneiden.*

In einem Netz mit reellem Hauptkreis gehört zu jedem Punkt aufserhalb desselben ein reeller, zu jedem Punkt innerhalb desselben ein imaginärer orthogonaler Kreis. Der Hauptkreis ist also der Ort der Centra der Nullkreise des Netzes (§ 122. 3)). Ist dagegen der Hauptkreis imaginär, so gehört zu jedem reellen Punkt der Ebene ein reeller Kreis des Netzes von nicht verschwindendem Radius. Insbesondere besitzt einer der Kreise das Radicalcentrum zum

*) Haben die drei Kreise eine gemeinsame Centrale, gehören aber nicht demselben Büschel an, so stellt die Parametergleichung alle Kreise dar, deren Mittelpunkte die Gerade erfüllen.

Mittelpunkt und kann gemäfs § 122 den mit ihm concentrischen Hauptkreis $H = 0$ nur orthogonal schneiden, wenn er der Stellvertreter desselben ist. *Somit hat ein Netz mit imaginärem Hauptkreis dessen Stellvertreter zum gemeinsamen Diametralkreis*, d. h. alle seine Kreise schneiden letzteren in Endpunkten je eines Durchmessers. Ist $x^2 + y^2 + \pi = 0$ der Hauptkreis, so kann deshalb das Netz definirt werden durch

$$x^2 + y^2 + 2kx + 2hy - \pi = 0.$$

Die Kreise eines Netzes, deren Mittelpunkte eine Gerade erfüllen, bilden ein Büschel, dessen Grenzpunkte die Schnittpunkte der Centrale mit dem Hauptkreis sind. Denn, genügen $\alpha \mid \beta$ einer linearen Gleichung, so gilt dies auch von den Parametern k, l; somit hängen die zugehörigen Kreise nur von *einem* willkürlichen Parameter linear ab oder bilden ein Büschel. Der Hauptkreis gehört, da er zu ihnen orthogonal ist, dem conjugirten Büschel an, enthält daher die Grenzpunkte. Alle Büschel, deren Centralen den Hauptkreis nicht reell schneiden, besitzen also reelle Grundpunkte, die als die Grenzpunkte des durch den Hauptkreis und die Centrale bestimmten Büschels definirt sind.

Netze mit einer Geraden bez. einem Punkt als Hauptkreis bestehen aus allen Kreisen mit gemeinsamer Centrale bez. mit *einem* gemeinsamem Schnittpunkt.

B. 1) Der Ort eines Punktes, dessen Tangenten an zwei gegebene Kreise Π_1, Π_2 sich wie deren Radien verhalten, ist

$$\varrho_2^2 \Pi_1 - \varrho_1^2 \Pi_2 = 0 \qquad (\S\ 114).$$

2) Die Potenzen eines Grenzpunktes in Bezug auf die Kreise des Büschels sind den Abständen ihrer Centra von ihm proportional.

Sie sind nämlich, unter der Annahme von § 126 für $\sqrt{\pi} \mid 0$, $-2\sqrt{\pi}\,(k - \sqrt{\pi})$.

3) Jede Gerade der Ebene wird von den Kreisen eines Büschels in Paaren einer Involution geschnitten, insbesondere die Centrale selbst (§ 93).

Die Paare sind harmonisch zu den Berührungspunkten der Geraden mit Kreisen des Büschels (§ 122) in der Centrale zu den Grenzpunkten. Die Involution ist nur elliptisch, wenn das Büschel reelle Grundpunkte hat und dieselben durch die Gerade getrennt werden.

4) Man untersuche die Beziehung der doppelt conjugirten Pole (§ 125) auf Grund des Satzes, dafs die Gleichung der Polare eines Punktes $x' \mid y'$ in Bezug auf den Kreis Π die Form erhalten kann

$$\Pi + \Pi' = (x - x')^2 + (y - y')^2 \quad (\S\ 118).$$

5) Alle Kreise, welche zwei gegebene Π_1, Π_2 orthogonal schneiden, bilden ein Büschel, d. h. sind zwei Kreisnetzen gemeinsam.

Denn aus $\pi_1 + \pi = 2(\alpha_1\alpha + \beta_1\beta)$, $\pi_2 + \pi = 2(\alpha_2\alpha + \beta_2\beta)$ folgen $\alpha \mid \beta$ als linear abhängig von der Unbestimmten π.

6) Der Hauptkreis von drei Kreisen ist der Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf diese sich in einem Punkt schneiden, nämlich im entgegengesetzten Endpunkt des Durchmessers.

Hieraus folgt seine Gleichung in der Determinantenform

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 x + \beta_1 y - \pi_1, & x - \alpha_1, & y - \beta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y - \pi_2, & x - \alpha_2, & y - \beta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y - \pi_3, & x - \alpha_3, & y - \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{vgl. } \S\ 122).$$

7) Vier Kreise $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ gehören demselben Netz an, wenn

$$\begin{vmatrix} \pi_1, & \alpha_1, & \beta_1, & 1 \\ \pi_2, & \alpha_2, & \beta_2, & 1 \\ \pi_3, & \alpha_3, & \beta_3, & 1 \\ \pi_4, & \alpha_4, & \beta_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies drückt aus, dafs die Tangenten an vier solche Kreise aus einem beliebigen Punkt O die Relation erfüllen $\overline{OT_1}^2 \cdot M_2M_3M_4 + \overline{OT_2}^2 \cdot M_3M_4M_1 + \overline{OT_3}^2 \cdot M_4M_1M_2 + \overline{OT_4}^2 \cdot M_1M_2M_3 = 0$.

8) Der Radius ϱ eines Kreises des Netzes $\Pi_1 + k\Pi_2 + l\Pi_3 = 0$ wird bestimmt durch

$$(1 + k^2 + l^2)\,\varrho^2 = \varrho_1^2 + k^2\varrho_2^2 + l^2\varrho_3^2$$
$$- 2kl\varrho_2\varrho_3 \cos\omega_1 - 2l\varrho_1\varrho_3 \cos\omega_2 - 2k\varrho_1\varrho_2 \cos\omega_3.$$

Die Parameter der Nullkreise des Netzes (Punkte des Hauptkreises) genügen also einer quadratischen Gleichung.

9) Mittelst dreier Kreise Π_1, Π_2, Π_3, die ein Netz bestimmen, und dreier Parameter k, l, m kann jeder Kreis der Ebene dargestellt werden als

$$\Pi_1 + k\Pi_2 + l\Pi_3 + m = 0,$$

denn diese Gleichung stellt jeden zu einem Kreis des Netzes concentrischen Kreis dar. In der Tat ist die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0$ von dieser Form, nur dafs speciell als feste Kreise genommen sind $x^2 + y^2 = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Übrigens ist die unendlich ferne Gerade $m = 0$ oder $\pi = 0$ als ein vierter Kreis anzusehen.

129. Gemeinsame Tangenten zweier Kreise. Zwei Kreise besitzen aufser gemeinsamen Punkten notwendig auch ge-

meinsame Tangenten. Denn, damit eine Gerade $\xi \mid \eta$ zugleich Tangente zweier Kreise sei, müssen ihre Coordinaten nach § 110 zwei Bedingungsgleichungen zweiten Grades erfüllen, die nach § 23 vier gemeinsame Wurzeln haben. *Es gibt also vier gemeinsame Tangenten zweier Kreise* und es sind die Paare ihrer Berührungspunkte zu finden.

Führen wir in den Gleichungen $\Pi_1 = 0$ bez. $\Pi_2 = 0$ der Kreise gemäfs § 112 die (Winkel-) Parameter ϑ_1 bez. ϑ_2 der Peripheriepunkte $x_1 \mid y_1$ bez. $x_2 \mid y_2$ ein durch

$$\frac{x_1 - \alpha_1}{\varrho_1} = \cos\vartheta_1, \quad \frac{y_1 - \beta_1}{\varrho_1} = \sin\vartheta_1; \quad \frac{x_2 - \alpha_2}{\varrho_2} = \cos\vartheta_2, \quad \frac{y_2 - \beta_2}{\varrho_2} = \sin\vartheta_2,$$

so lautet die Gleichung einer Tangente des ersten Kreises in $x_1 \mid y_1$

$$(x - \alpha_1)\cos\vartheta_1 + (y - \beta_1)\sin\vartheta_1 - \varrho_1 = 0$$

und die einer Tangente des zweiten Kreises in $x_2 \mid y_2$

$$(x - \alpha_2)\cos\vartheta_2 + (y - \beta_2)\sin\vartheta_2 - \varrho_2 = 0.$$

Sollen nun diese Tangenten in derselben Geraden vereinigt sein, so liefert die Vergleichung der Coefficienten der Gleichungen die nötigen Bedingungen. Erstens mufs $\tan\vartheta_1 = \tan\vartheta_2$, d. h. entweder $\vartheta_1 = \vartheta_2$ oder $\vartheta_1 = \vartheta_2 + \pi$: die Radien der Berührungspunkte müssen in der Tat parallel sein. Zweitens erfordert die Identität der constanten Glieder

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\cos\vartheta_1 + (\beta_1 - \beta_2)\sin\vartheta_1 + \varrho_1 \mp \varrho_2 = 0,$$

wo entweder das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$ oder π ist.

Jede dieser Gleichungen bestimmt zwei Werte für ϑ_1, also je zwei Paare von Berührungspunkten. Den Wurzeln der ersten entsprechen zwei Tangenten Aa, $A'a'$, für welche die Kreise je auf derselben Seite liegen und die man daher die äufseren (directen) gemeinsamen Tangenten nennt. Ebenso liefert die zweite Gleichung zwei innere (transversale) gemeinsame Tangenten Bb, $B'b'$, da die Kreise auf verschiedenen Seiten derselben liegen. Den Berührungspunkt des Kreises $\Pi_1 = 0$ mit einer gemeinsamen Tangente erhalten wir durch Elimination von ϑ_1 mittelst der obigen Substitutionen. Es resultiren die linearen Bedingungen

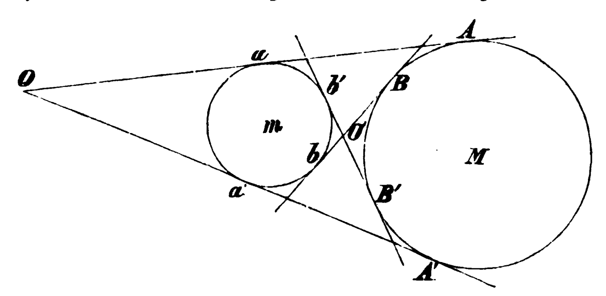
$$(\alpha_1 - \alpha_2)(x_1 - \alpha_1) + (\beta_1 - \beta_2)(y_1 - \beta_1) + \varrho_1(\varrho_1 \mp \varrho_2) = 0,$$

deren erste $\mathsf{P}_a = 0$ mit $\Pi_1 = 0$ zusammen die Coordinaten der Punkte A, A', deren zweite $\mathsf{P}_i = 0$ ebenso die der Punkte B, B' bestimmt.

Somit sind

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(x - \alpha_1) + (\beta_1 - \beta_2)(y - \beta_1) + \varrho_1(\varrho_1 \mp \varrho_2) = 0$$

die Gleichungen der Berührungssehnen des ersten Kreises mit den äufseren bez. inneren gemeinsamen Tangenten oder der



Polaren der Schnittpunkte O, O' dieser Paare. Dieselben sind zur Centrale normal (§ 119), so dafs ihre Pole auf derselben liegen (§ 115). Hat man die Coordinaten derselben $x_a \mid y_a$, $x_i \mid y_i$ gefunden und sind Π_a, Π_i die Resultate ihrer Substitution in Π_1, so sind nach § 116 die Gleichungen der von ihnen ausgehenden Tangentenpaare

$$\mathsf{P}_a^2 - \Pi_a \Pi = 0, \quad \mathsf{P}_i^2 - \Pi_i \Pi = 0.$$

Die Realität der gemeinsamen Tangenten läfst sich nach der Gleichung ihrer Berührungssehne discutiren. Die letztere ist nur reell, wenn beide Kreise reell oder beide imaginär sind, daher haben deren Tangentenpaare reelle Gleichungen. Dagegen haben ein reeller und ein imaginärer Kreis nur imaginäre Tangenten gemein, die nicht conjugirt sind. Einen reellen Kreis $\Pi_1 = 0$ schneiden die Berührungssehnen $\mathsf{P}_a = 0$ bez. $\mathsf{P}_i = 0$ in gesonderten reellen Punkten, wenn ihr Abstand von $\alpha_1 \mid \beta_1$ kleiner als ϱ_1 ist, d. h. wenn bez. $(\varrho_1 \mp \varrho_2)^2 < c^2$ (Centraldistanz) ist (§ 106). Demnach sind die äufseren Tangenten reell, solange von den reellen Kreisen der eine nicht völlig vom andern umschlossen ist ($\varrho_1 - \varrho_2 < c$); die inneren,

so lange die beiden Kreise sich ausschliefsen, so dafs gleichzeitig auch die äufseren reell sein müssen. Alle vier Tangenten sind somit reell, wenn die Kreise sich ohne reelle Schnittpunkte ausschliefsen, keine, wenn der eine den andern umschliefst. Die inneren Tangenten fallen zusammen bei äufserer, die äufseren bèi innerer Berührung der Kreise (§ 122).

B. 1) Die gemeinsamen Tangenten der Kreise

$$x^2 + y^2 \mp 4x \mp 2y \pm 4 = 0$$

haben im ersten Kreise die Berührungssehnen $2x + y = 6$, $2x + y = 3$. In den Schnittpunkten $2 \mid 2$, $\frac{14}{5} \mid \frac{2}{5}$ des Kreises mit der ersteren sind die Tangenten $y = 2$, $4x - 3y = 10$, und in den Schnittpunkten $1 \mid 1$, $\frac{7}{5} \mid \frac{1}{5}$ der zweiten $x = 1$, $3x + 4y = 5$. Die Pole der Berührungssehnen sind $4 \mid 2$, $1 \mid \frac{1}{2}$ und deren Potenzen 4 und $\frac{1}{4}$, daraus folgen auch die Gleichungen der Tangentenpaare.

2) Die Mitten zwischen den Berührungspunkten jeder der vier Tangenten liegen auf einer Geraden

$$(\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)y - (\pi_1 - \pi_2) = 0,$$

denn diese ist (§ 62) die gemeinsame Mittellinie zwischen den Paaren von Berührungssehnen.

3) Die vier Berührungspunkte eines jeden Tangentenpaares liegen auf einem Kreis, dessen Centrum die Mitte C der Centrale ist.

Denn dort schneiden sich die Normalen zu den Tangenten in ihren Halbirungspunkten (2)).

4) Die Schnittpunkte der äufseren mit den inneren Tangenten liegen auf dem über der Centrale als Durchmesser beschriebenen Kreis

$$x^2 + y^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x - (\beta_1 + \beta_2)y + \tfrac{1}{2}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) = 0.$$

Denn die Gleichung der zur Centrale normalen Diagonalen des Tangentenvierseits findet sich leicht (§ 64) als

$$\Pi_i P_a^2 - \Pi_a P_i^2 = 0,$$

so dafs sie in Bezug auf die Berührungssehnen jedes Kreises harmonisch sind. Daher haben sie auch die in 2) angegebene Mittellinie, d. h. auch die Seiten dieses Tangentenvierseits werden von derselben halbirt und ihre Mittelnormalen gehen durch C. Endlich sollen O, O' harmonisch conjugirte Pole in Bezug auf

den umgeschriebenen Kreis sein (§ 115), dessen Centrum Mm halbirt, also sind M, m selbst seine Schnittpunkte mit OO' (vgl. § 130).

130. **Ähnlichkeitscentra.** Aus den Gleichungen der Berührungssehnen des äufseren und des inneren Tangentenpaares findet man die Coordinaten ihrer Pole, d. h. der Tangentenschnittpunkte, nach § 117. Und zwar ergibt die Vergleichung von $\mathsf{P}_a = 0$ und $\mathsf{P}_i = 0$ mit der Gleichung $(x' - \alpha_1)(x - \alpha_1) + (y' - \beta_1)(y - \beta_1) - \varrho_1{}^2 = 0$ der Polare eines Punktes $x' | y'$ als die Coordinaten des Schnittpunktes O der äusseren bez. O' der inneren Tangenten

$$x_a = \frac{\varrho_1 \alpha_2 - \varrho_2 \alpha_1}{\varrho_1 - \varrho_2} \quad \Big| \quad y_a = \frac{\varrho_1 \beta_2 - \varrho_2 \beta_1}{\varrho_1 - \varrho_2};$$

$$x_i = \frac{\varrho_1 \alpha_2 + \varrho_2 \alpha_1}{\varrho_1 + \varrho_2} \quad \Big| \quad y_i = \frac{\varrho_1 \beta_2 + \varrho_2 \beta_1}{\varrho_1 + \varrho_2}.$$

Diese Punkte O, O' heifsen (näheres folgt in § 135) *die Centra der Ähnlichkeit der beiden Kreise. Somit sind die Ähnlichkeitscentra die Punkte, welche die Centrale äufserlich und innerlich d. h. harmonisch im Verhältnis der Radien teilen.* Ihre Coordinaten gehen in einander über, wenn man einem der Radien das negative Vorzeichen beilegt. Die Realitätsverhältnisse sind schon in § 129 discutirt. Wenn zwei Kreise sich berühren, so fällt eines ihrer Ähnlichkeitscentra mit dem Berührungspunkt zusammen.

Im Falle reeller Tangenten erläutert und bestätigt diese Teilung unmittelbar die Anschauung der ähnlichen Dreiecke

$$OMA \sim Oma, \quad O'MB \sim O'mb.$$

Diese liefern die Proportionen

$$\frac{OM}{\varrho_1} = \frac{Om}{\varrho_2} = \frac{c}{\varrho_1 - \varrho_2}, \quad \frac{O'M}{\varrho_1} = -\frac{O'm}{\varrho_2} = \frac{c}{\varrho_1 + \varrho_2},$$

aus denen sich die Entfernung der Ähnlichkeitscentra ergibt

$$OO' = \frac{2c\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1{}^2 - \varrho_2{}^2}.$$

Ebenso direct folgt *die Länge der gemeinsamen Tangenten*

$$\overline{Aa}^2 = \overline{A'a'}^2 = t_a^2 = c^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2 = \Pi + 2\varrho_1\varrho_2,$$
$$\overline{Bb}^2 = \overline{B'b'}^2 = t_i^2 = c^2 - (\varrho_1 + \varrho_2)^2 = \Pi - 2\varrho_1\varrho_2,$$

so dafs die Potenz Π der beiden Kreise (§ 123) als das arithmetische Mittel der Tangentenquadrate erscheint

$$2\Pi = t_a^2 + t_i^2.$$

Den über der Entfernung der Ähnlichkeitspunkte als Durchmesser beschriebenen Kreis nennt man den *Ähnlichkeitskreis* der gegebenen Kreise. Man bestimmt leicht die Coordinaten seines Mittelpunktes und demgemäfs seine Gleichung als

$$\left(x - \frac{\varrho_1^2\alpha_2 - \varrho_2^2\alpha_1}{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}\right)^2 + \left(y - \frac{\varrho_1^2\alpha_2 - \varrho_2^2\alpha_1}{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}\right)^2 = \left(\frac{c\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}\right)^2,$$

und bringt sie nach Multiplication mit $\varrho_1^2 - \varrho_2^2$ auf die einfache Form $\varrho_2^2\Pi_1 - \varrho_1^2\Pi_2 = 0$. Aus dieser erhellt, dafs der Ähnlichkeitskreis die Schnittpunkte der gegebenen $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ enthält und die Längen ihrer Tangenten aus seinen Punkten den Radien proportional sind (§ 128. 1)). Da somit die Berührungspunkte und Centra mit dem gewählten Punkt ähnliche Dreiecke bilden, ist *der Ähnlichkeitskreis zweier Kreise der Ort der Punkte, von denen aus diese unter gleichen Tangentenwinkeln erscheinen.*

B. 1) Die gemeinsamen Tangenten der Kreise

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3.$$

Das äufsere Ähnlichkeitscentrum ist $-2 \mid -1$, also das Paar der Tangenten durch dasselbe

$$25(x^2 + y^2 - 6x - 8y) - (5x + 5y - 10)^2 = 0$$

oder

$$(x + 2)(y + 1) = 0.$$

Da die gegebenen Kreise einander in reellen Punkten schneiden, so ist das andere Paar der gemeinsamen Tangenten imaginär; aber ihre Gleichung lautet, da das andere Ähnlichkeitscentrum $\frac{22}{9} \mid \frac{31}{9}$ ist,

$$40x^2 + xy + 40y^2 - 199x - 278y + 722 = 0.$$

2) Zwischen den Längen der gemeinsamen Tangenten und dem Schnittwinkel ω zweier Kreise (§ 122) bestehen die Beziehungen

$$t_a = 2\sqrt{\varrho_1\varrho_2}\sin\frac{\omega}{2}, \quad t_i = 2\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}\cos\frac{\omega}{2}.$$

3) Die Tangentenlängen der Kreise in § 129. 1) sind

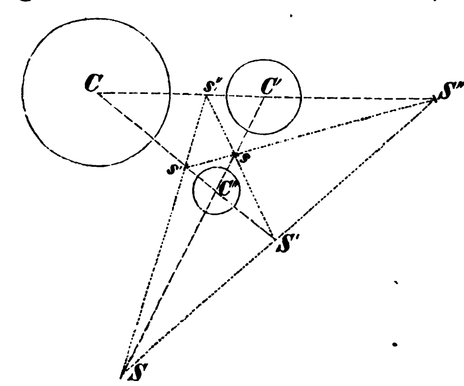
$$t_a = 4, \quad t_i = 2.$$

4) Ist PT_1 bez. PT_2 je eine Tangente aus dem Punkt P des Ähnlichkeitskreises an den Kreis M_1 bez. M_2, so schneidet die Verbindungsgerade $T_1 T_2$ beide Kreise in Sehnen s_1, s_2 gleicher Länge, sog. *Wechselsehnen.*[26]) Umgekehrt schneiden sich Tangenten der zwei Kreise an den Endpunkten von Wechselsehnen in Punkten des Ähnlichkeitskreises. Zum Beweis zeigt man

$$\left(\frac{s_1}{2} : \varrho_1\right) : \left(\frac{s_2}{2} : \varrho_2\right) = \sin PM_1 T_1 : \sin PM_2 T_2 = PT_1 : PT_2 = \varrho_1 : \varrho_2 .$$

131. **Ähnlichkeitsaxen.** Sind drei Kreise $\alpha_i \,|\, \beta_i;\ \varrho_i$ gegeben, so existirt zu je zweien derselben ein Paar von Ähnlichkeitscentren $S, s;\ S', s';\ S'', s''$. *Diese sechs Ähnlichkeitscentra liegen viermal zu dreien in Geraden, die man die vier Ähnlichkeitsaxen der drei Kreise nennt.* Oder kürzer: Ähnlichkeitscentra und Ähnlichkeitsaxen sind Ecken und Seiten desselben vollständigen Vierseits (§ 64. 3)).

Zum Beweis bilde man die Gleichung der Verbindungsgeraden der Punkte S' und S'' (§ 35) und zeige, daſs ihr auch die Coordinaten von S genügen. Dazu hat man ihr nur die symmetrische Form zu geben



$$\begin{vmatrix} 0, & x, & y, & 1 \\ \varrho_1, & \alpha_1, & \beta_1, & 1 \\ \varrho_2, & \alpha_2, & \beta_2, & 1 \\ \varrho_3, & \alpha_3, & \beta_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Oder man zeigt, daſs die Coordinatendeterminante der Punkte S, S', S'' den Wert Null hat. In der Tat ist dieselbe, nach Multiplication mit $(\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_2 - \varrho_3)(\varrho_3 - \varrho_1)$, gleich

$$\begin{vmatrix} \varrho_1\alpha_2 - \varrho_2\alpha_1, & \varrho_1\beta_2 - \varrho_2\beta_1, & \varrho_1 - \varrho_2 \\ \varrho_2\alpha_3 - \varrho_3\alpha_2, & \varrho_2\beta_3 - \varrho_3\beta_2, & \varrho_2 - \varrho_3 \\ \varrho_3\alpha_1 - \varrho_1\alpha_3, & \varrho_3\beta_1 - \varrho_1\beta_3, & \varrho_3 - \varrho_1 \end{vmatrix}$$

und diese verschwindet identisch, weil die Summe der mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ multiplicirten Zeilen gleich Null ist („Vorles.“

Art. 20). Dasselbe gilt auch noch, wenn irgend ein ϱ_i durch $-\varrho_i$ ersetzt wird. Daher liegen die drei äufseren Ähnlichkeitscentra in der äufseren Ähnlichkeitsaxe $S_0 = 0$ und jedes derselben mit zwei inneren ebenfalls in einer der Axen $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, deren Gleichungen durch den Zeichenwechsel eines Radius aus der obigen entstehen.

Wenn ein Kreis $\Pi = 0$ *zwei andere* $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ *berührt, so geht seine Berührungssehne durch ein Ähnlichkeitscentrum derselben,* denn sie ist eine Ähnlichkeitsaxe der drei Kreise. Und zwar geht diese Berührungssehne durch das äufsere Ähnlichkeitscentrum von $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, wenn der Kreis $\Pi = 0$ diese beide äufserlich oder beide innerlich berührt, dagegen durch das innere, wenn die Berührung an den beiden Kreisen ungleichartig geschieht.

Die Ähnlichkeitsaxen schneiden die drei Kreise je unter denselben Winkeln. Denn, da der Cosinus des Schnittwinkels gleich dem Quotienten des Abstandes des Kreiscentrums von der Axe durch den Radius ist, so ist der Satz bewiesen, wenn sich die Abstände der drei Kreiscentra von jeder Ähnlichkeitsaxe verhalten wie die Radien. Dies folgt aber aus der Definition der Ähnlichkeitscentra, z. B. aus

$$CS'' : C'S'' = \varrho_1 : \varrho_2, \quad C'S : C''S = \varrho_2 : \varrho_3, \quad C''S' : CS' = \varrho_3 : \varrho_1.$$

Die äufsere Axe $S_0 = 0$ schneidet jedoch keinen der Kreise reell; bei den übrigen liegen, sofern sie reell schneiden, die Schnittwinkel der Kreise nicht auf derselben Seite der Axe, z. B. hätte $Ss's''$ den Winkel mit dem Kreise C auf der einen, die mit C' und C'' auf der andern Seite.

132. **Gleichwinkelkreise, d. h. Kreise, welche drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneiden.** Kreise, welcher dieser Forderung genügen, kennen wir schon in dem Hauptkreis (§ 122) und in den Ähnlichkeitsaxen der gegebenen (§ 131).

Sei allgemein die Gleichung eines solchen Kreises

$$\Pi = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \varkappa = 0$$

und sein Radius ϱ, so lautet nach § 122 die Bedingung,

dafs er einen gegebenen Kreis $\Pi_i = 0$ unter dem Winkel ω schneide, $2(\alpha_i\alpha + \beta_i\beta - \varrho_i\varrho\cos\omega) - (\pi_i + \pi) = 0$.
Stellt man dieselbe für $i = 1, 2, 3$ auf und eliminirt $\alpha|\beta|\pi$ zwischen diesen drei Gleichungen und $\Pi = 0$, so erscheint die Resultante als

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ \pi_1 + 2\varrho_1\varrho\cos\omega, & \alpha_1, & \beta_1, & 1 \\ \pi_2 + 2\varrho_2\varrho\cos\omega, & \alpha_2, & \beta_2, & 1 \\ \pi_3 + 2\varrho_3\varrho\cos\omega, & \alpha_3, & \beta_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante zerlegen wir nach den Summanden der ersten Reihe („Vorles." Art. 18) in

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ \pi_1, & \alpha_1, & \beta_1, & 1 \\ \pi_2, & \alpha_2, & \beta_2, & 1 \\ \pi_3, & \alpha_3, & \beta_3, & 1 \end{vmatrix} + 2\varrho\cos\omega \begin{vmatrix} 0, & x, & y, & 1 \\ \varrho_1, & \alpha_1, & \beta_1, & 1 \\ \varrho_2, & \alpha_2, & \beta_2, & 1 \\ \varrho_3, & \alpha_3, & \beta_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Hier ist aber die erste Determinante H (§ 122), die zweite S_0 (§ 131) und $-2\varrho\cos\omega = k$ ein unbestimmter Parameter (§ 124), sobald wir die Gröfse des Schnittwinkels ω nicht vorschreiben.

Demnach bilden die Gleichwinkelkreise zu drei gegebenen ein den Hauptkreis enthaltendes Büschel mit der äufseren Ähnlichkeitsaxe als Radicalaxe von der Gleichung $\mathsf{H} - kS_0 = 0$. Die Centrale des Büschels ist die aus dem Radicalcentrum der gegebenen auf die Ähnlichkeitsaxe gefällte Normale. Zu jedem Punkt derselben als Centrum gehört ein einziger Kreis, d. h. ϱ und ω müssen durch $\alpha|\beta$ völlig bestimmt sein, eine Beziehung, welche die Gleichung $\mathsf{H} - kS_0 = 0$ nicht hinreichend deutlich macht.

Nun können wir aber die Schnittwinkelrelation des § 122 in der Form schreiben

$$[\Pi_i] = \varrho^2 - 2\varrho_i\varrho\cos\omega,$$

wenn wir unter $[\Pi_i]$ die Potenz des Mittelpunktes $\alpha|\beta$ in Bezug auf den Kreis $\Pi_i = 0$ verstehen (§ 114). Bildet man die Differenzen der drei Gleichungen für $i = 1, 2, 3$



$$[\Pi_1] - [\Pi_2] = 2\varrho\,(\varrho_2 - \varrho_1)\cos\omega,$$
$$[\Pi_1] - [\Pi_3] = 2\varrho\,(\varrho_3 - \varrho_1)\cos\omega,$$

so gibt die Elimination von $\varrho\cos\omega$ den Ort von $\alpha|\beta$ als die Gerade

$$[\Pi_1](\varrho_2 - \varrho_3) + [\Pi_2](\varrho_3 - \varrho_1) + [\Pi_3](\varrho_1 - \varrho_2) = 0,$$

die man leicht als die Normale zu $S_0 = 0$ aus dem Radicalcentrum erkennt. Eliminirt man aber $\varrho\cos\omega$ aus den ursprünglichen Relationen, so zeigt

$$\varrho^2(\varrho_1 - \varrho_2) = \varrho_1[\Pi_2] - \varrho_2[\Pi_1]$$

die Abhängigkeit des Radius ϱ eines Gleichwinkelkreises von seinem Mittelpunkt und endlich folgt ω aus einer der obigen Differenzen.

Es drängt sich hier natürlich die Frage auf, was für Beziehungen die durch den Hauptkreis und eine der andern Ähnlichkeitsaxen bestimmten Büschel

$$\mathsf{H} - kS_1 = 0, \quad \mathsf{H} - kS_2 = 0, \quad \mathsf{H} - kS_3 = 0$$

zu den gegebenen haben. Die erste Gleichung geht aus $\mathsf{H} - kS_0 = 0$ durch den Zeichenwechsel des *einen* Radius ϱ_1 hervor, während von den Ausgangsrelationen die erste nur ϱ_1^2 und $\varrho_1\cos\omega$ enthalten, also ungeändert bleibt, wenn in ihr mit ϱ_1 zugleich $\cos\omega$ das Vorzeichen wechselt. Daher gelten die analogen Entwickelungen, nur dafs die Schnittwinkel der zu bestimmenden Kreise an je einen festen Kreis die Supplemente derjenigen an den beiden andern sind. *Somit bestimmt der Hauptkreis mit den Ähnlichkeitsaxen als Radicalaxen vier Büschel von Kreisen, welche die drei gegebenen unter Winkeln von gleichen Sinuswerten schneiden.*

B. 1) Die Radien der Kreise, welche einen gegebenen unter constantem Winkel schneiden, sind von den Radien der Kreise eines Netzes nur um eine Constante verschieden.

Schreiben wir statt $[\Pi_1] = \varrho^2 - 2\varrho_1\varrho\cos\omega$ ausführlicher $(\alpha - \alpha_1)^2 + (\beta - \beta_1)^2 = (\varrho - \varrho_1\cos\omega)^2 + \varrho_1^2\sin^2\omega$, so sehen wir, dafs die Kreise von den Radien $\varrho' = \varrho - \varrho_1\cos\omega$ das Netz bilden, dessen Hauptkreis mit Π_1 concentrisch ist und den Radius $\varrho_1\sin\omega$ hat.

2) Wenn ein beweglicher Kreis zwei feste unter constanten Winkeln ω_1, ω_2 schneidet, so bildet er auch mit jedem Kreis des Büschels einen constanten Winkel.

Denn aus $\varrho^2 - 2\varrho_1\varrho\cos\omega_1 = [\Pi_1]$, $\varrho^2 - 2\varrho_2\varrho\cos\omega_2 = [\Pi_2]$ folgt auch

$$\varrho^2 - 2\varrho\,\frac{\varrho_1\cos\omega_1 - k\varrho_2\cos\omega_2}{1-k} = \left[\frac{\Pi_1 - k\Pi_2}{1-k}\right];$$

dies ist aber die Relation, der zufolge der Kreis $\alpha \mid \beta; \varrho$ mit $\Pi_1 - k\Pi_2 = 0$ vom Radius ϱ_k den Winkel ω_k bildet, für den $(1-k)\,\varrho_k\cos\omega_k = \varrho_1\cos\omega_1 - k\varrho_2\cos\omega_2$ ist.

3) Ein Kreis, der zwei feste Kreise unter constantem Winkel schneidet, berührt auch zwei feste Kreise ihres Büschels.

Denn, berechnen wir ϱ_k zu einem gegebenen Parameterwert k (§ 124), setzen $\cos\omega_k = 1$ und jenen Wert in die Endgleichung 2) ein, so ergibt sich eine in k quadratische Bedingung.

133. **Apollonisches Problem der Berührungskreise zu drei gegebenen Kreisen.** Kreise, welche drei gegebene berühren, gehören notwendig den Büscheln von Gleichwinkelkreisen an. Dabei mufs das Centrum eines Kreises, welcher die gegebenen alle äufserlich ($\omega = \pi$) oder alle innerlich ($\omega = 0$) berührt, auf der Normale der äufseren Ähnlichkeitsaxe liegen. Dagegen hat ein Kreis, welcher einen Kreis Π_i äufserlich (bez. innerlich), die andern innerlich (bez. äufserlich) berührt, sein Centrum auf der Normale von $S_i = 0$. Doch sind diese Mittelpunkte selbst nicht elementar zu finden, indem man etwa einen zweiten Ort bestimmt, dem sie angehören müssen.

Am zweckmäfsigsten fixirt man einen berührenden Kreis $\Pi = 0$ durch seine Berührungspunkte, denn die Normale zur Tangente in einem solchen enthält sein Centrum.[27]) Die Coordinaten des Berührungspunktes von $\Pi = 0$ mit dem ersten gegebenen Kreis genügen der Gleichung $\Pi_1 = 0$, sind also durch Angabe einer weiteren Relation definirbar.

Die Coordinaten $\alpha \mid \beta$ des Mittelpunktes des Π_1, Π_2, Π_3 äufserlich berührenden Kreises erfüllen nach § 132 die Relationen ($\cos\omega = -1$)

$$[\Pi_1] - [\Pi_2] = 2\varrho(\varrho_1 - \varrho_2), \quad [\Pi_1] - [\Pi_3] = 2\varrho(\varrho_1 - \varrho_3).$$

Da aber der Berührungspunkt auf der Centrale $\alpha | \beta$, $\alpha_1 | \beta_1$ liegt, so folgt für seine Coordinaten $x | y$ aus ähnlichen Dreiecken

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{x - \alpha_1} = \frac{\beta - \beta_1}{y - \beta_1} = \frac{\varrho_1 + \varrho}{\varrho_1}.$$

Aus obigen Relationen gehen also Gleichungen zwischen diesen Coordinaten $x | y$ hervor, wenn man statt $\alpha | \beta$ einsetzt

$$\alpha = \left(1 + \frac{\varrho}{\varrho_1}\right) x - \frac{\varrho}{\varrho_1}\alpha_1, \quad \beta = \left(1 + \frac{\varrho}{\varrho_1}\right) y - \frac{\varrho}{\varrho_1}\beta_1.$$

Führt man die Substitution derart aus, daſs man wieder zusammenfaſst, was nur $x | y$ für $\alpha | \beta$ enthält, so kann man schreiben für $[\Pi_1] - [\Pi_2]$

$$\left(1 + \frac{\varrho}{\varrho_1}\right)(\Pi_1 - \Pi_2) + \frac{\varrho}{\varrho_1}\left[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 + \varrho_1^2 - \varrho_2^2\right].$$

Zieht man die letzte Klammer mit $2\varrho(\varrho_2 - \varrho_1)$ zusammen, so lautet das Substitutionsresultat

$$\frac{\varrho_1 + \varrho}{\varrho}(\Pi_1 - \Pi_2) = (\varrho_1 - \varrho_2)^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_1 - \beta_2)^2,$$

ebenso

$$\frac{\varrho_1 + \varrho}{\varrho}(\Pi_1 - \Pi_3) = (\varrho_1 - \varrho_3)^2 - (\alpha_1 - \alpha_3)^2 - (\beta_1 - \beta_3)^2.$$

Läſst man hierin das Vorzeichen von ϱ unbestimmt, so gelten die Entwickelungen auch für einen die gegebenen innerlich berührenden Kreis.

Die Elimination von ϱ aus diesen Gleichungen lehrt, daſs die Berührungspunkte dieser gleichartig berührenden Kreise die Schnittpunkte des Kreises $\Pi_1 = 0$ mit der Geraden sind

$$\frac{\Pi_1 - \Pi_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2} = \frac{\Pi_1 - \Pi_3}{(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2 - (\varrho_1 - \varrho_3)^2}.$$

Dieselbe geht durch das Radicalcentrum R, und einen zweiten Punkt findet man folgendermaſsen. Schreibt man die Zähler in voller Länge (§ 119) und addirt auf beiden Seiten der Gleichung Eins, so erhält man als die Zähler der neuen Quotienten

$$(\alpha_2 - \alpha_1)(x - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1)(y - \beta_1) + \varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1),$$
$$(\alpha_3 - \alpha_1)(x - \alpha_1) + (\beta_3 - \beta_1)(y - \beta_1) + \varrho_1(\varrho_3 - \varrho_1).$$

Somit geht die zu bestimmende Gerade auch durch den Schnittpunkt der beiden Geraden, welche durch die Nullsetzung dieser beiden Ausdrücke definirt sind.

Nun läfst ein Vergleich mit § 129 diese letzteren erkennen als die Berührungssehnen der äufseren gemeinsamen Tangenten der Kreispaare $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ und $\Pi_1 = 0$, $\Pi_3 = 0$ oder als die Polaren der äufseren Ähnlichkeitscentra S'', S' dieser Kreispaare in Bezug auf $\Pi_1 = 0$. Somit ist ihr oben verlangter Schnittpunkt *P der Pol der äufseren Ähnlichkeitsaxe in Bezug auf den Kreis* $\Pi_1 = 0$.

Ebenso gehen die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte am zweiten und dritten Kreis durch den bezüglichen Pol P', P'' der Ähnlichkeitsaxe. Sind so die gleichartig berührenden Kreise gefunden, so liefert endlich der Zeichenwechsel von ϱ_i, entsprechend der Verwendung einer der andern Ähnlichkeitsaxen $S_i = 0$, genau in gleicher Weise die Berührungspunkte derjenigen Kreise, welche $\Pi_i = 0$ in anderer Art berühren als die übrigen beiden.

So erhalten wir folgende elegante *Construction der Apollonischen Kreise:* Wir nehmen von irgend einer der vier Ähnlichkeitsaxen der gegebenen Kreise in Bezug auf jeden den Pol P, P', P'' und verbinden denselben mit dem Radicalcentrum R. Schneiden diese Sehnen die Kreise in den Punktepaaren a, b; a', b'; a'', b'', so ordnen sich dieselben zweimal zu dreien so, dafs der durch a, a', a'' und der durch b, b', b'' gehende Kreis in ihnen die gegebenen berührt. Wir brauchen nur ein einziges Paar, wie a, b, um in den Schnittpunkten der Radien Ca, Cb mit der Normale aus R zur benutzten Ähnlichkeitsaxe das Centrum des zugehörigen Berührungskreises zu finden. Wiederholen wir das Verfahren mit jeder der andern Ähnlichkeitsaxen, so erhalten wir die acht Apollonischen Kreise in vier Paaren.

Die Kreise können in Paaren imaginär werden und es ist sehr nützlich, die verschiedenen Realitätsverhältnisse zu discutiren. Bemerkt seien nur die beiden extremen Fälle: alle Berührungskreise sind reell (imaginär), wenn die drei Kreise sich ohne reelle Schnittpunkte ausschliefsen (einschliefsen).

B. Die Resultate des Textes ergeben sich ohne algebraische Rechnung aus früheren und aus einem Satz des § 136.

Nach § 131 schneiden sich die Linien ab, $a'b'$, $a''b''$ in einem Punkt R, nämlich im Ähnlichkeitscentrum der Kreise $aa'a''$, $bb'b''$.

Ebenso schneiden sich $a'a''$, $b'b''$ in S, dem Ähnlichkeitscentrum von C', C''; ähnlich finden sich S', S''.

Daher schneiden sich (§ 136) die transversalen Linien $a'b'$, $a''b''$ in der Radicalaxe von C', C''; ebenso $a''b''$, ab in der Radicalaxe von C'', C. Daher mufs jener Punkt R das Radicalcentrum der Kreise C, C', C'' sein.

Wenn auch $a'b'$, $a''b''$ durch das Ähnlichkeitscentrum R von $aa'a''$, $bb'b''$ gehen, so schneiden sich (§ 136) $a'a''$, $b'b''$ in der Radicalaxe dieser zwei Kreise. Daher müssen auch die Punkte S' und S'' in derselben Radicalaxe liegen, also ist die Ähnlichkeitsaxe $SS'S''$ der Kreise C, C', C'' die Radicalaxe der Kreise $aa'a''$, $bb'b''$.

Weil $a''b''$ durch das Ähnlichkeitscentrum R von $aa'a''$, $bb'b''$ geht, so müssen (§ 136) die Tangenten an diese Kreise in den Punkten, wo sie dieselbe schneidet, sich in der Radicalaxe $SS'S''$ begegnen. Aber dieser Schnittpunkt ist der Pol von $a''b''$ in Bezug auf C''. Weil nun der Pol von $a''b''$ in $SS'S''$ liegt, so mufs der Pol von $SS'S''$ in Bezug auf den Kreis C'' in $a''b''$ liegen. Also wird $a''b''$ construirt, indem man das Radicalcentrum mit dem Pol von $SS'S''$ in Bezug auf C'' verbindet.

Weil das Ähnlichkeitscentrum zweier Kreise in ihrer Centralen liegt, und die Radicalaxe zu dieser senkrecht ist, so geht (§ 132) die Centrale von $aa'a''$ und $bb'b''$ durch R und ist auf $SS'S''$ senkrecht.

* 134. **Drehungssinn im Kreise.** Während man den Radius eines Kreises gewöhnlich als eine absolute, wesentlich positive Gröfse zu betrachten gewohnt ist, hat die Untersuchung des Schnittwinkels und der gemeinsamen Tangenten demselben mehrfach einen Vorzeichenwechsel zugeschrieben. An und für sich ergibt der analytische Ausdruck des Kreises für den Radius ein unbestimmtes Vorzeichen, da er nur das Radiusquadrat definirt. Sobald wir aber den Kreis als begrenzte Fläche denken, müssen wir bei verschiedenen Kreisen auch einen Umfahrungssinn (§ 4) berücksichtigen. *Es liegt nahe, den Drehungssinn, in dem der Radius die Fläche beschreibt, dadurch als positiv oder negativ zu kennzeichnen, dafs man dem Radius selbst das positive oder negative Vorzeichen beilegt.*

Der Drehungssinn der Fläche oder der Peripherie überträgt sich offenbar continuirlich auch auf jede Tangente, so dafs in jeder der positive Sinn fixirt erscheint. Damit ist einerseits völlig in § 31 inbegriffen, was unter dem Winkel zweier Kreise zu verstehen ist: *der Winkel der positiven Tangenten.* Sind die Kreise von gleichem Sinn, so ist dieser Winkel der in § 122 definirte Radienwinkel; sind dagegen die Radien von verschiedenem Zeichen, so gilt als Schnittwinkel das Supplement von jenem. Anderseits haben zwei Kreise von gegebenem Sinn nur *ein* Paar gemeinsamer Tangenten, wenn in diesen der von beiden übertragene Sinn übereinstimmen soll. Bei gleichem Sinn der Kreise betrachtet diese Auffassung nur die äufseren, bei entgegengesetzten Vorzeichen der Radien nur die inneren als gemeinsame Tangenten. Man kann dann geradezu von einer eindeutig bestimmten Tangentenlänge oder *Tangentialdistanz zweier Kreise* sprechen. Unter Annahme dieser Definitionen sind Potenz, Winkel und Tangentenlänge unzweideutig durch die Relation verbunden $\Pi = -2\varrho_1\varrho_2 \cos\omega = t^2 - 2\varrho_1\varrho_2$.

Damit ist nun klar, dafs die Ähnlichkeits-centra und -axen in einander übergehen, wenn einer der Kreise seinen Sinn, oder der Radius sein Zeichen wechselt. Ebenso haben drei Kreise von jeweilen gegebenem Sinn nur ein Paar berührender Kreise und die andern Paare des § 133 entsprechen der Umkehrung des Sinnes in je einem der gegebenen. Endlich aber kann man nun von vier Büscheln von Gleichwinkelkreisen zu drei gegebenen sprechen, denn jedes gehört zu einer bestimmten Zeichencombination der Radien und mit der Änderung eines Zeichens ändert sich die Lage des Schnittwinkels.

135. **Ähnlichkeit der Kreise.** Sind zu zwei Kreisen die beiden Ähnlichkeitspunkte als die Teilpunkte der Centrale bestimmt, welche sie im Verhältnis der Radien teilen, so möge eines derselben als Nullpunkt der Coordinaten genommen werden. Ist etwa das äufsere O dazu gewählt, so ist nach der Definition (§ 130) $\alpha_1 : \alpha_2 = \beta_1 : \beta_2 = \varrho_1 : \varrho_2$ zu setzen $\alpha_1 = k\varrho_1$, $\alpha_2 = k\varrho_2$; $\beta_1 = l\varrho_1$, $\beta_2 = l\varrho_2$ und die Gleichungen lassen sich schreiben

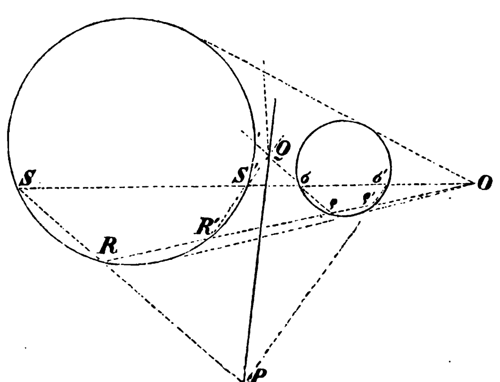
$$\left(\frac{x}{\varrho_1} - k\right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho_1} - l\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{x}{\varrho_2} - k\right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho_2} - l\right)^2 = 1.$$

Somit geht die Gleichung des zweiten Kreises aus der des ersten hervor, indem in dieser $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}x \mid \frac{\varrho_1}{\varrho_2}y$ an die Stelle von $x \mid y$ gesetzt wird, während dabei jede Gleichung von der Form

$$y : x = m$$

unverändert bleibt. Durchläuft also ein Punkt S oder $x \mid y$ den ersten Kreis, so beschreibt gleichzeitig ein Punkt σ oder

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2}x \mid \frac{\varrho_1}{\varrho_2}y$$



den zweiten, und zwar liegen entsprechende Punkte S und σ auf demselben Vector $y = mx$ so, dafs $OS : O\sigma = \varrho_1 : \varrho_2$. *Jede Transversale durch den Schnittpunkt eines gemeinsamen Tangentenpaares wird von den Kreisen in Proportion geteilt,* d. h. $OS : OS' = O\sigma : O\sigma'$.

Man sagt deshalb, die Kreise sind ähnlich in Bezug auf den Schnittpunkt dieser Transversalen oder *Ähnlichkeitsstrahlen,* und nennt denselben *das Centrum der Ähnlichkeit.* Punkte desselben Strahles, deren Entfernungen vom Centrum im Verhältnis der Radien stehen, werden als *ähnlich gelegen oder homolog* bezeichnet. Sie durchlaufen die ähnlichen Kreise in demselben Drehungssinn. Infolge der Definition bilden homologe Punktepaare R, S; ϱ, σ je mit dem Centrum ähnliche Dreiecke und haben parallele Verbindungsgerade RS, $\varrho\sigma$: *homologe Sehnen oder Tangenten sind parallel;* dasselbe gilt offenbar auch von homologen Radien (§ 129).

Zu dem ersten Kreis erhalten wir stets einen in Bezug auf den Nullpunkt ähnlichen Kreis, indem wir die Vectoren seiner Punkte in irgend einem constanten Verhältnis n ver-

längern bez. verkürzen. Die Gleichung desselben entsteht aus der gegebenen, indem man die Coordinaten $x \mid y$ durch constante Vielfache $nx \mid ny$ ersetzt. Für alle Werte des Ähnlichkeitsverhältnisses n entstehen so alle die Kreise, welche das Tangentenpaar aus dem Nullpunkt an den ersten Kreis innerhalb desselben Winkelraumes berühren.

*Das System der Kreise, welches zwei gegebene Tangenten aus O innerhalb eines der Paare von Scheitelwinkelräumen berührt, wird somit, wenn $\alpha \mid \beta \mid \varkappa$ ein Kreis desselben ist, dargestellt durch

$$n^2(x^2 + y^2) - 2n(\alpha x + \beta y) + \varkappa = 0.$$

Dasselbe hängt also von einem Parameter n quadratisch ab; von seinen Kreisen gehen also durch einen gegebenen Punkt der Ebene zwei, da die Substitution eine in n quadratische Bedingung gibt. Nur in zwei besonderen Fällen geht dies System in ein Büschel (§ 124) über: einerseits, wenn $\varkappa = 0$, das Ähnlichkeitscentrum auf den Kreisen selbst liegt, die Kreise $n(x^2 + y^2) - 2(\alpha x + \beta y) = 0$ in ihm sich berühren; und anderseits, wenn $\alpha = \beta = 0$, das Ähnlichkeitscentrum für alle Kreise gemeinsamer Mittelpunkt ist

$$n^2(x^2 + y^2) + \varkappa = 0.$$

Durch dieselbe Operation erhält man überhaupt zu jeder gegebenen Curve $f(x \mid y) = 0$ *ähnliche Curven in ähnlicher Lage* bezüglich des Nullpunktes als Centrum von den Gleichungen $f(nx \mid ny) = 0$. In der Tat ist $x' = nx$, $y' = ny$ einfach die elementare Ähnlichkeitstransformation des § 12. Ist ein anderes Ähnlichkeitscentrum $x_0 \mid y_0$ gegeben, so gelten einfach die Substitutionen

$$x' - x_0 = n(x - x_0), \quad y' - y_0 = n(y - y_0).$$

B. 1) Die Gleichung eines zum Kreis

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \varkappa = 0$$

bezüglich des Nullpunktes ähnlichen Kreises hat die Form

$$n^2(x^2 + y^2) - 2n(\alpha x + \beta y) + \varkappa = 0$$

und die der gemeinsamen Tangenten

$$\varkappa(x^2 + y^2) - (\alpha x + \beta y)^2 = 0.$$

2) Für $1 \mid 2$ als Centrum und 3 als Verhältnis der Ähnlichkeit entspricht $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7 = 0$ der Kreis $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 13 = 0$.

3) Die Ähnlichkeitsaxen dreier Kreise schneiden sie unter gleichen Winkeln (§ 131), weil sie für jedes der Kreispaare Ähnlichkeitsstrahlen sind.

4) Sind zwei Curven zu einer gegebenen ähnlich und ähnlich gelegen für die Centra $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$ und Verhältnisse n_1, n_2, so sind sie auch für ein drittes Centrum unter einander ähnlich gelegen, das in der Verbindungsgerade der gegebenen liegt.

Denn man kann $x_3 \mid y_3$ und n_3 so bestimmen, dafs identisch

$$x_2 + n_2 (x - x_2) = x_3 + n_3 (x_1 + n_1 (x - x_1) - x_3), \text{ etc.,}$$

nämlich $n_3 = n_2 : n_1$,

$$x_3 = \frac{(n_2 - 1) x_2 - (n_1 - 1) x_1}{n_2 - n_1} \;\Big|\; y_3 = \frac{(n_2 - 1) y_2 - (n_1 - 1) y_1}{n_2 - n_1}.$$

136. **Potenzhaltende Punkte.** Verbindet man mit der Relation homologer Punkte auf irgend welchem Ähnlichkeitsstrahl $OS : O\sigma = OS' : O\sigma' = \varrho_1 : \varrho_2$

die Definition der Potenzen des Ähnlichkeitscentrums in den beiden Kreisen $\Pi_1^{(a)} = OS \,.\, OS'$, $\Pi_2^{(a)} = O\sigma \,.\, O\sigma'$, die von der Transversale unabhängig ist (§ 114), so folgt als neue Relation zwischen je den nicht homologen Punkten

$$OS \,.\, O\sigma' = OS' \,.\, O\sigma = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \Pi_1^{(a)} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \Pi_2^{(a)}.$$

Auf allen Ähnlichkeitsstrahlen ist das Product der nicht homologen Vectoren constant. Auf der Centrale Mm ergibt sich der Wert desselben explicite mittelst der Abstände von O und O' (Fig. § 129), nämlich für das äufsere Ähnlichkeitscentrum $(OM + \varrho_1)(Om - \varrho_2)$

$$= \left(\frac{c\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2} + \varrho_1\right)\left(\frac{c\varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} - \varrho_2\right) = \varrho_1 \varrho_2 \left(\frac{c^2}{(\varrho_1 - \varrho_2)^2} - 1\right)$$

und analog für das innere

$$(O'M + \varrho_1)(O'm + \varrho_2) = -\varrho_1 \varrho_2 \left(\frac{c^2}{(\varrho_1 + \varrho_2)^2} - 1\right).$$

Bezogen auf ein reelles Ähnlichkeitscentrum ist erstere Constante positiv, wenn ϱ_1, ϱ_2 imaginär oder ϱ_1, ϱ_2 reell und $(\varrho_1 - \varrho_2)^2 < c^2$, letztere dagegen, wenn ϱ_1, ϱ_2 reell und $(\varrho_1 + \varrho_2)^2 > c^2$.

Da das constante Product in ganz analoger Weise gebildet ist, wie die Potenzen $\Pi_1^{(a)}$, $\Pi_2^{(a)}$ selbst, so bezeichnet man dasselbe als *die gemeinsame Potenz der beiden Kreise* und unterscheidet eine äufsere und eine innere, je nachdem die nicht-homologen sog. *potenzhaltenden Punkte*[28]) auf Strahlen des äufseren oder inneren Ähnlichkeitspunktes liegen. Insbesondere ist die gemeinsame Potenz gleich dem Product der Tangenten $OA \,.\, Oa$, bez. $O'B \,.\, O'b$ oder auch gleich dem Quadrat der Vectoren der Schnittpunkte der Kreise.

Der Kreis um ein reelles Ähnlichkeitscentrum, dessen Radiusquadrat die zugehörige gemeinsame Potenz ist, heifst *der äufsere bez. innere Potenzkreis der gegebenen Kreise.* Zugleich reell sind beide Potenzkreise nur, wenn die Kreise sich reell schneiden; nur der äufsere oder nur der innere ist reell, je nachdem die reellen Kreise sich ohne reelle Schnittpunkte aus- oder einschliefsen; der äufsere ist auch für imaginäre Kreise stets reell. *Die Potenzkreise gehen durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise und sind zu einander orthogonal,* denn ihre Mittelpunkte sind Durchmesserendpunkte des die Schnittpunkte enthaltenden Ähnlichkeitskreises (§ 130).

Die Sehnen zweier Punkte des einen Kreises und der potenzhaltenden des andern schneiden sich stets auf der Radicalaxe der Kreise. Zum Beweis nehmen wir die beiden Ähnlichkeitsstrahlen OR, OS (Fig. § 135) als Coordinatenaxen und schreiben die Gleichungen der Kreise in schiefwinkligen Coordinaten (§ 102)

$$a_{11}(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

$$a_{11}(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) + 2a_{13}\frac{\varrho_2}{\varrho_1}x + 2a_{23}\frac{\varrho_2}{\varrho_1}y + a_{33}\frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2} = 0.$$

Lauten ferner die Gleichungen von RS, $R'S'$, ausgedrückt durch die Axenabschnitte $OR = a$, $OS = b$, $OR' = a'$, $OS' = b'$,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1,$$

so müssen die Gleichungen von $\varrho\sigma$, $\varrho'\sigma'$ sein

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1, \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'}\right) = 1.$$

Aus der Form der Gleichungen folgt, dafs RS zu $\varrho\sigma$, $R'S'$ zu $\varrho'\sigma'$ parallel ist (§ 135), und die Schnittpunkte von RS, $\varrho'\sigma'$ und $R'S'$, $\varrho\sigma$ in der Geraden liegen

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)+y\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)=1+\frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Nun ist aber nach § 107

$$\frac{a+a'}{aa'}=-2\frac{a_{13}}{a_{33}},\quad \frac{b+b'}{bb'}=-2\frac{a_{23}}{a_{33}},$$

also die Gleichung jener Verbindungsgeraden

$$2(a_{13}x+a_{23}y)+\left(1+\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)a_{33}=0.$$

Dies ist aber identisch mit der Differenz obiger Gleichungen der Kreise, d. h. mit der Gleichung der Radicalaxe (§ 119)*).

Ein specieller Fall des vorigen Satzes ist: *die Tangenten der Kreise in potenzhaltenden Punkten schneiden sich auf der Radicalaxe.* Da aber die homologen Tangenten parallel sind und die Tangenten in den Endpunkten einer Kreissehne mit dieser denselben Winkel bilden, *so bilden die Tangenten in potenzhaltenden Punkten mit dem Ähnlichkeitsstrahl gleiche Winkel von entgegengesetztem Sinn.* Somit wird der Winkel der Tangenten in einem Schnittpunkt der Kreise je vom Ähnlichkeitsstrahl desselben halbirt. Daher können die Potenzkreise auch als die Kreise definirt werden, welche in den Schnittpunkten der gegebenen deren Winkel halbiren, und besitzen infolge dessen die Gleichungen (§ 125) $\varrho_2\Pi_1\mp\varrho_1\Pi_2=0$.

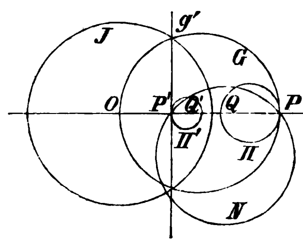
*137. **Inversion.** Das Princip der Zuordnung der potenzhaltenden Punkte auf zwei Kreisen führt naturgemäfs auf folgende Verallgemeinerung, welche als das *Princip der reci-*

---

*) Das Entsprechen der in der Ähnlichkeit nicht homologen Punkte und Geraden der Kreise ist somit dasjenige der centrischen Collineation (§ 98) für den Ähnlichkeitspunkt als Centrum und die Radicalaxe als Axe der Collineation; ihre Gegenaxen und ihre Charakteristiken δ_a, δ_i sind in beiden Fällen leicht zu bestimmen. Diese zwei Centralcollineationen sind die einzigen reellen mit Axen im Endlichen, welche zwischen zwei reellen Kreisen möglich sind.

proken Radien Vectoren oder der circularen Inversion von hervorragender Bedeutung ist.[29])

Ist ein Kreis J vom Centrum O und dem Radius $\varkappa$ gegeben, so bestimme man zu einem beliebigen Punkt P der Ebene einen Punkt P' auf demselben Radius OP so, dafs das Product $OP \cdot OP' = \varkappa^2$ eine Constante ist. Zwei Punkte P und P' entsprechen sich daher, wenn ihre Radien Vectoren aus O der Richtung und dem Sinne nach zusammenfallen und der Gröfse nach reciproke Werte ergeben, sobald man $\varkappa$ als Mafseinheit nimmt $OP' : \varkappa = 1 : (OP : \varkappa)$. *Die nach dieser Methode der Zuordnung nach reciproken Radien entsprechenden Punkte P, P' heifsen inverse Punkte, der Punkt O heifst Centrum der Inversion, der Kreis J Inversionskreis oder Hauptkreis (Directrix) der Inversion.*



Nimmt man das Inversionscentrum zum Nullpunkt eines Polarcoordinatensystems, so erhält man aus den Polarcoordinaten $r \mid \vartheta$ eines gegebenen Punktes die Polarcoordinaten $r' \mid \vartheta'$ des inversen bei gegebenem Inversionskreis einfach gemäfs

$$rr' = \varkappa^2, \quad \vartheta = \vartheta'.$$

Zu rechtwinkligen Coordinaten $x \mid y$, $x' \mid y'$ übergehend folgen aus

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} = \varkappa^2, \quad y : x = y' : x'$$

die Transformationsformeln der Inversion als

$$x = \frac{\varkappa^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \; y = \frac{\varkappa^2 y'}{x'^2 + y'^2}; \; x' = \frac{\varkappa^2 x}{x^2 + y^2}, \; y' = \frac{\varkappa^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Sehen wir zunächst vom Inversionscentrum ab, so entspricht nach diesen Formeln jedem reellen Punkt P der Ebene ein und nur ein inverser Punkt P', denn $x' \mid y'$ sind rational ausgedrückt durch $x \mid y$. Umgekehrt wird auch zu P' eindeutig P als invers erhalten. Jedem reellen unendlich fernen Punkt jedoch entspricht stets das Inversionscentrum, und umgekehrt entspricht diesem jede Richtung als invers. Das Centrum ist also der einzige reelle Punkt, zu welchem der inverse nicht eindeutig bestimmt ist. Die Eindeutigkeit

der Beziehung gilt wiederum uneingeschränkt von imaginären Punkten, abgesehen von denen der Vectoren absoluter Richtung $x^2 + y^2 = 0$: jedem endlichen Punkt, für welchen $y : x = \pm i$, entspricht die absolute Richtung $\mp i$ selbst und umgekehrt.

Es ist nach § 115 bekannt, dafs von Punkten P, P', für die $OP \cdot OP' = \varkappa^2$ jeder in der Polaren des andern bezüglich des Kreises J liegt, oder dafs *inverse Punkte conjugirt harmonische Pole in Bezug auf die Endpunkte ihres Durchmessers im Inversionskreis* sind. Dies liefert ein einfaches Constructionsmittel. Dasselbe zeigt sogar noch die reelle Vermittelung der Inversion in Bezug auf einen imaginären Kreis vom Radius $\varkappa = \varkappa' i$, da $OP \cdot OP' = -\varkappa'^2$ für OP und OP' einfach entgegengesetzten Sinn fordert. Eine Betrachtung der *Inversion mit imaginärem Hauptkreis* bietet daher kein neues Interesse.

Ferner darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varkappa = 1$ oder *der Einheitskreis als Inversionskreis* genommen werden, da dies nur bedeutet, dafs $x \mid y$, $x' \mid y'$ die mit $\varkappa$ gemessenen Coordinatenlängen bedeuten. Daher sollen unter Inversionsformeln weiterhin einfach verstanden sein

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$

✱ 138. Beschreibt der Punkt P eine Curve, so erzeugt gleichzeitig der inverse Punkt P' eine Curve, die man die Inverse zur ersten nennt. Hier gilt vor allem der Satz: *die Inverse zu einem Kreis ist stets wiederum ein Kreis.*

Denn, lautet die Gleichung eines gegebenen Kreises Π

$$\Pi = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0,$$

so erhalten wir für den inversen Ort durch die Substitution von $x' : (x'^2 + y'^2) \mid y' : (x'^2 + y'^2)$ statt $x \mid y$ die Gleichung

$$\frac{1 - 2\alpha x' - 2\beta y'}{x'^2 + y'^2} + \pi = 0.$$

Ist also $\pi \gtrless 0$, so ist die Inverse der Kreis Π' von der Gleichung

$$\Pi' = x'^2 + y'^2 - 2\frac{\alpha}{\pi} x' - 2\frac{\beta}{\pi} y' + \frac{1}{\pi} = 0,$$

dessen Mittelpunkt und Radius somit folgen aus

$$\alpha' = \alpha : \varkappa, \quad \beta' = \beta : \varkappa, \quad \varrho'^2 = \varrho^2 : \varkappa^2.$$

Die Mittelpunkte inverser Kreise sind somit nicht invers.

Inverse Kreise schneiden den Inversionskreis in denselben Punkten und unter entgegengesetzt gleichen Winkeln (§ 137), ersteres, da ein jeder mit $x^2 + y^2 = 1$ dieselbe Radicalaxe $-2\alpha x - 2\beta y + \varkappa + 1 = 0$ besitzt. Dabei durchlaufen offenbar P den Kreis Π und P' den Kreis Π' nicht in demselben Sinn, sondern *inverse Figuren haben stets entgegengesetzten Drehungssinn.* Daher ist nach der Auffassung von § 136 die Beziehung zwischen den Radien inverser Kreise genauer $\varrho' = -\varrho : \varkappa$.

Die Inverse eines Kreises **G**, *welcher durch das Inversionscentrum geht, ist eine Gerade* g', nämlich seine Radicalaxe mit J. Denn für $\varkappa = 0$ lautet die inverse Gleichung

$$-2\alpha x' - 2\beta y' + 1 = 0$$

und stellt die Gerade von den Coordinaten $-2\alpha \,|\, -2\beta$ dar. Umgekehrt ist die Inverse einer Geraden ein Kreis durch O (§ 113. 2)) und ihre Schnittpunkte mit J. Dies in speciellem Sinn für Gerade von absoluter Richtung. *Insbesondere entsprechen Strahlen durch das Inversionscentrum sich selbst.* Man erkennt beides durch die obige Substitution in $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$.

Diese Sätze sind aber unter dem ersten allgemeineren mit umfaſst, wenn man nach früherem ein aus einer Geraden und dem Unendlichfernen bestehendes Linienpaar als Grenzform eines Kreises ansieht (§ 104). Denn in der Tat entspricht dem Punkt O das ganze Unendlichferne, also können den übrigen Punkten eines durch O gehenden Kreises nur noch Punkte einer Geraden entsprechen.

Die Inversen der Kreise eines Büschels bilden ebenfalls ein Kreisbüschel, denn die Paare gemeinsamer Schnittpunkte sind invers. Wenn speciell das Inversionscentrum ein Grundpunkt des Büschels ist, ist die inverse Figur ein Strahlbüschel. Nun kann man folgern (§ 128), *daſs auch Netze mit inversen Hauptkreisen invers sind.* Sind die Normalgleichungen inverser Kreise

$\Pi_i = 0$ und $\Pi_i' = 0$, so besteht in der Tat die inverse Figur des Netzes $\Pi_1 + k\Pi_2 + l\Pi_3 = 0$ aus den Kreisen

$$\pi_1 \Pi_1' + k\pi_2 \Pi_2' + l\pi_3 \Pi_3' = 0$$

und die Orthogonalkreise entsprechen sich als Örter von Nullkreisen.

Der Inversionskreis $x^2 + y^2 = 1$ ist der Ort der zu sich selbst inversen Punkte. Damit aber überhaupt ein Kreis mit seinem Inversen zusammenfalle, ist notwendig und hinreichend $\pi = 1$, da nur dann $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\pi' = 1$, $\varrho' = \varrho$ ist. Ein solcher Kreis schneidet aber J rechtwinklig (§ 114, 122). *Demnach ist jeder Orthogonalkreis* N *des Hauptkreises zu sich selbst invers und umgekehrt,* d. h. jeder Strahl aus O schneidet ihn in einem Paare inverser Punkte. Die Umkehrung können wir auf die Form bringen: *Jeder durch ein Paar inverser Punkte gehende Kreis ist zum Hauptkreis orthogonal,* denn da seine Schnittpunkte mit J sich selbst entsprechen, deckt er sich mit seinem Inversen. Auch hiernach sind die einzigen zu sich selbst inversen Geraden die Strahlen aus dem Inversionscentrum.

*139. **Isogonalität.** Von fundamentaler Bedeutung für die Übertragung geometrischer Eigenschaften einer Figur auf ihre Inverse sind die anfänglichen *Proportionen* des § 138

$$\alpha : \beta : \varrho : \sqrt{\pi} = \alpha' : \beta' : -\varrho' : \sqrt{\pi'},$$

welche zunächst ausdrücken, dafs inverse Kreise in Bezug auf das Inversionscentrum ähnlich sind. Sind aber zwei Kreise $\Pi_1 : \alpha_1 \mid \beta_1;\ \varrho_1$ und $\Pi_2 : \alpha_2 \mid \beta_2;\ \varrho_2$ gegeben, $\Pi_1' : \alpha_1' \mid \beta_1';\ \varrho_1'$ und $\Pi_2' : \alpha_2' \mid \beta_2';\ \varrho_2'$ ihre Inversen, so finden sich alle die Beziehungen zwischen Π_1 und Π_2 unverändert auch wieder zwischen Π_1' und Π_2' vor, deren analytische Ausdrücke nur von Quotienten wie $\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\varrho_1 \varrho_2}$, $\frac{\beta_1 \beta_2}{\varrho_1 \varrho_2}$, $\frac{\pi_1}{\varrho_1^2}$, $\frac{\pi_2}{\varrho_2^2}$ abhängen, da diese ihren Wert nicht ändern, wenn die Buchstaben durch die accentuirten ersetzt werden. Der Hauptausdruck dieser Art ist das Verhältnis der Potenz $\Pi = \pi_1 + \pi_2 - 2(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2)$ der Kreise Π_1, Π_2 zu ihrem Radienproduct $\varrho_1 \varrho_2$, denn es läfst sich schreiben (§ 123)

$$\frac{\Pi}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2} \frac{\pi_1}{\varrho_1^2} + \frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2} \frac{\pi_2}{\varrho_2^2} - 2\left(\frac{\alpha_1}{\varrho_1} \frac{\alpha_2}{\varrho_2} + \frac{\beta_1}{\varrho_1} \frac{\beta_2}{\varrho_2}\right).$$

Somit ist, wenn Π' die Potenz der Inversen Π_1', Π_2' bedeutet,

$$\frac{\Pi}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{\Pi'}{\varrho_1' \varrho_2'} \quad \text{oder (§ 122)} \quad \cos(\Pi_1 \Pi_2) = \cos(\Pi_1' \Pi_2').\text{*)}$$

(Nach der Ausdrucksweise von § 88 sind die Quotienten $\alpha_1 \alpha_2 : \varrho_1 \varrho_2$, $\beta_1 \beta_2 : \varrho_1 \varrho_2$ und namentlich auch $\Pi : \varrho_1 \varrho_2$ *Invarianten der inversen Transformation* zu nennen.)

Also ist bei Berücksichtigung des Drehungssinnes der Kreise der Schnittwinkel zweier Kreise Π_1, Π_2 *gleich dem Winkel ihrer Inversen* Π_1', Π_2'. Dieser Hauptsatz der Inversion gilt infolge der Betrachtungen des § 123 auch noch, wenn einzelne dieser Kreise in Gerade übergehen. Als specielle Fälle desselben kennen wir schon: inverse Kreise schneiden J gleichwinklig, zu sich selbst inverse Kreise sind zu J orthogonal, Netze mit inversen Hauptkreisen sind invers. Als weiteren Specialfall beachte man: die inversen Kreise zweier Geraden (z. B. Tangenten) haben zu ihnen parallele Tangenten im Inversionscentrum. Jedoch ist dabei wol zu beachten, dafs die Winkel nach § 136 definirt vorausgesetzt sind. Kehrt man zur Definition als Radienwinkel (§ 122) zurück, so erkennt man leicht folgende Abänderung des Satzes: *Der Winkel zweier Kreise ist gleich oder supplementär mit dem ihrer Inversen*, je nachdem das Inversionscentrum innerhalb oder aufserhalb der beiden oder innerhalb des einen und aufserhalb des andern liegt.

Da sonach überhaupt Winkelgröfsen durch Inversion nicht geändert werden, inverse Figuren also gleichwinklig oder isogonal sind, so heifst die Transformation nach reciproken Radien eine isogonale Verwandtschaft.[30])

Wenn man dergestalt eine aus Kreisen und Geraden bestehende Figur ohne Änderung der Winkel in eine wieder nur Kreise und Gerade enthaltende Figur verwandelt, so kann man oft bedeutende Vereinfachungen derselben erzielen. Man

---

*) Ferner folgt nach § 129 auch $t_a^2 : t_a'^2 = t_i^2 : t_i'^2 = \varrho_1 \varrho_2 : \varrho_1' \varrho_2'$, d. h. die Quadrate der gemeinsamen Tangenten von Π_1 und Π_2, Π_1' und Π_2' verhalten sich wie die Potenzen.

verfügt in dieser Absicht über die Data der Inversion passend so, dafs man einen besonderen Punkt der Figur zum Inversionscentrum oder einen ausgezeichneten Kreis der Figur zum Inversionskreis wählt.

Anwendungen dieses Princips enthalten die Beispiele und § 140.

B. 1) Ein beliebiges Kreispaar kann stets in ein Paar congruente Kreise verwandelt werden, für einen Punkt eines Potenzkreises desselben O.

Denn für einen solchen ist $\pi_1 : \pi_2 = \varrho_1^2 : \varrho_2^2$, also $\varrho_1'^2 = \varrho_2'^2$.

2) Zwei beliebige Kreise Π_1, Π_2 ohne reelle Schnittpunkte können durch Inversion in concentrische verwandelt werden.

Dazu mufs das Inversionscentrum O so gewählt werden, dafs $\alpha_1 : \alpha_2 = \beta_1 : \beta_2 = \pi_1 : \pi_2$, also auch $\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} : \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = \pi_1 : \pi_2$, gemäfs § 128. 2) somit als ein Grenzpunkt des Büschels Π_1, Π_2. *Jedes Büschel ohne reelle Grundpunkte ist also zu einem Büschel concentrischer Kreise invers.*

3) Drei beliebige Kreise mit reellem Orthogonalkreis können in solche mit gemeinsamer Centrale verwandelt werden.

Als Inversionscentrum genügt ein beliebiger Punkt ihres Orthogonalkreises, denn die Inverse dieses Kreises wird eine Gerade, die die Inversen der gegebenen Kreise orthogonal, d. h. als Durchmesser schneidet. Ein Netz mit reellem Hauptkreis ist somit zu der Gesammtheit der Kreise einer gemeinsamen Centralen invers.

4) Zwei Kreise und ihre Potenzkreise gehen durch Inversion in Bezug auf einen der Schnittpunkte und die gemeinsame Sehne als Inversionsradius in zwei Gerade und ihre Winkelhalbirenden über.

5) Alle durch einen festen Punkt gehenden Kreise, welche einen festen Kreis rechtwinklig schneiden, gehen noch durch einen zweiten festen Punkt oder bilden ein Büschel.

Denn die Normalen eines Kreises gehen durch sein Centrum.

6) Drei Kreise, die sich paarweise reell schneiden, haben, wenn sie keinen reellen Orthogonalkreis besitzen, ein Kreisbogendreieck gemeinsam, dessen Winkelsumme $> \pi$ ist, sonst schliefsen sie ein solches von der Winkelsumme $< \pi$ ein.

7) Zwei aufeinanderfolgende Inversionen in Bezug auf concentrische Inversionskreise ergeben ähnliche Figuren in ähnlicher Lage; denn ist $rr' = \varkappa^2$, $r'r'' = \varkappa'^2$, so ist $r : r'' = \varkappa^2 : \varkappa'^2$.

8) Inversionen in Bezug auf verschiedene Inversionskreise ergeben eine quadratische Verwandtschaft, in welchen Kreisen

wieder Kreise entsprechen. Wird $x \mid y$ zuerst einer Inversion O unterworfen, dann einer mit dem Centrum $x_0 \mid y_0$ und dem Radius $\varkappa$, so ist

$$x' : y' : \varkappa^2 = \frac{x}{x^2+y^2} - x_0 : \frac{y}{x^2+y^2} - y_0 \cdot \frac{1-2(x_0 x + y_0 y)}{x^2+y^2} + (x_0^2 + y_0^2).$$

∗ 140. Distanz-, Tangenten- und Winkelrelationen. Zwischen vier Punkten 1, 2, 3, 4 einer Geraden besteht (§ 80) die identische Streckenrelation

$$\overline{12} \cdot \overline{34} + \overline{14} \cdot \overline{23} = \overline{13} \cdot \overline{24}.$$

Berühren in jenen vier Punkten vier Kreise die gegebene Gerade, so können wir die Strecken als die Längen der gemeinsamen Tangenten der Kreise bezeichnen, zwischen denen, nach Division durch die Quadratwurzel aus dem Product aller Radien, die Relation besteht

$$\frac{\overline{12}}{\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{\overline{34}}{\sqrt{r_3 r_4}} + \frac{\overline{14}}{\sqrt{r_1 r_4}} \cdot \frac{\overline{23}}{\sqrt{r_2 r_3}} = \frac{\overline{13}}{\sqrt{r_1 r_3}} \cdot \frac{\overline{24}}{\sqrt{r_2 r_4}}.$$

Wenn wir nun die inverse Figur des Ganzen bilden, so erhalten wir aus der Geraden einen Kreis, der vier andere Kreise berührt. Bezeichnet $\overline{12}$ die Länge einer gemeinsamen Tangente der Kreise ϱ_1, ϱ_2, so besteht zwischen sechs gemeinsamen Tangenten der vier denselben fünften berührenden Kreise dieselbe Relation, wie zwischen den Strecken der Geraden, weil obige Quotienten bei der Inversion ungeändert bleiben. Dabei haben wir, je nachdem zwei Kreise den umhüllenden Kreis von derselben oder von entgegengesetzter Seite berühren, die äufsere oder innere gemeinsame Tangente zu nehmen.

Der bekannteste Specialfall dieser Relation ist *der Ptolemäische Satz:* in einem Kreisviereck 1 2 3 4 ist $\overline{12} \cdot \overline{34} + \overline{14} \cdot \overline{23} = \overline{13} \cdot \overline{24}$. Er ensteht, wenn die vier Kreise Nullkreise, also Punkte des umhüllenden Kreises sind.

Reducirt sich dagegen von den vier Kreisen nur einer auf einen Punkt, so gilt die Relation für jeden Punkt des die drei gegebenen berührenden Kreises. Insbesondere sind $\overline{14}$, $\overline{24}$, $\overline{34}$ Längen der vom Punkte $x \mid y$ an die Kreise $\Pi_1 = 0$,

$\Pi_2 = 0$, $\Pi_3 = 0$ gehenden Tangenten, also $\sqrt{\Pi_1}$, $\sqrt{\Pi_2}$, $\sqrt{\Pi_3}$. Somit sind die Coordinaten eines Punktes des Berührungskreises von drei gegebenen durch die Relation verbunden[31])

$$\overline{23}\sqrt{\Pi_1} \pm \overline{31}\sqrt{\Pi_2} \pm \overline{12}\sqrt{\Pi_3} = 0.$$

Diese Gleichung ist, von Wurzelgröfsen befreit (rational gemacht), vom vierten Grade, mufs also nach ihrer Entstehung ein Kreispaar darstellen. Sind $\overline{23}$, $\overline{31}$, $\overline{12}$ die äufseren gemeinsamen Tangenten, so repräsentirt sie die beiden Kreise, welche die gegebenen alle äufserlich oder alle innerlich berühren (Fig. § 133). Bezeichnet dagegen $\overline{23}$ eine äufsere, $\overline{31}$, $\overline{12}$ innere Tangenten, so entsteht die Gleichung des Paares, welches den Kreis $\Pi_1 = 0$ auf der einen und die beiden andern auf der entgegengesetzten Seite hat (vgl. § 136). Endlich erhalten wir die beiden übrigen Kreispaare, wenn wir $\overline{31}$ oder $\overline{12}$ als äufsere und je die andern als innere Tangenten nehmen.

Rein rechnerisch bilden wir aus den die Distanzen von Punkten der Ebene verbindenden Relationen neue Abhängigkeiten zwischen Tangenten oder Winkeln und den Radien von Kreisen, indem wir jedes Entfernungsquadrat ersetzen durch $\overline{12}^2 = t_{12}{}^2 + (\varrho_1 \mp \varrho_2)^2 = \varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 - 2\varrho_1\varrho_2 \cos\omega_{12}$, wofür man die Beispiele sehe.

B. 1) *Die Relation*[32]) *zwischen den Distanzen von vier Punkten einer Ebene.*

Man setze den beiden Determinanten von § 104. 4) eine aus einer Eins und Nullen bestehende Zeile vor und verfahre nach dem Gesetz der Multiplication; das Product mufs gleich Null sein, weil die multiplicirten Gruppen eine Horizontalreihe mehr als Verticalreihen enthalten („Vorlesungen“ Art. 25). Man erhält

$$\begin{vmatrix} 1 & ,0 & ,0 & ,0 \\ x^2+y^2 & ,x & ,y & ,1 \\ x'^2+y'^2 & ,x' & ,y' & ,1 \\ x''^2+y''^2 & ,x'' & ,y'' & ,1 \\ x'''^2+y'''^2 & ,x''' & ,y''' & ,1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0, & 0 & , 0 & , 1 \\ 1, & -2x & , -2y & , x^2+y^2 \\ 1, & -2x' & , -2y' & , x'^2+y'^2 \\ 1, & -2x'' & , -2y'' & , x''^2+y''^2 \\ 1, & -2x''' & , -2y''' & , x'''^2+y'''^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & \overline{12}^2, & \overline{13}^2, & \overline{14}^2 \\ 1, & \overline{12}^2, & 0, & \overline{23}^2, & \overline{24}^2 \\ 1, & \overline{13}^2, & \overline{23}^2, & 0, & \overline{34}^2 \\ 1, & \overline{14}^2, & \overline{24}^2, & \overline{34}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwickelung davon giebt

$$0 = \overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2 \{\overline{12}^2 + \overline{34}^2 - \overline{13}^2 - \overline{14}^2 - \overline{23}^2 - \overline{24}^2\}$$
$$+ \overline{13}^2 \cdot \overline{24}^2 \{\overline{13}^2 + \overline{24}^2 - \overline{12}^2 - \overline{14}^2 - \overline{23}^2 - \overline{34}^2\}$$
$$+ \overline{14}^2 \cdot \overline{23}^2 \{\overline{14}^2 + \overline{23}^2 - \overline{12}^2 - \overline{13}^2 - \overline{24}^2 - \overline{34}^2\}$$
$$+ \overline{23}^2 \cdot \overline{34}^2 \cdot \overline{42}^2 + \overline{14}^2 \cdot \overline{43}^2 \cdot \overline{31}^2 + \overline{12}^2 \cdot \overline{24}^2 \cdot \overline{41}^2 + \overline{12}^2 \cdot \overline{23}^2 \cdot \overline{31}^2 .$$

Setzen wir für 23, 31, 12 bez. a_1, a_2, a_3, für 14, 24, 34 aber bez. $\varrho + \varrho_1$, $\varrho + \varrho_2$, $\varrho + \varrho_3$, so erhalten wir eine in ϱ quadratische Gleichung zur Bestimmung der Radien der Kreise, die sämmtlich innen oder sämmtlich aufsen drei Kreise berühren, deren Radien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 sind und deren Mittelpunkte ein Dreieck von den Seiten a_1, a_2, a_3 bilden.

Soll der gesuchte Kreis die gegebenen drei Kreise unter Winkeln ω_1, ω_2, ω_3 bez. schneiden, so hat man für $\overline{14}^2$, $\overline{24}^2$, $\overline{34}^2$ bez. einzusetzen

$$\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho_1\varrho\cos\omega_1,\quad \varrho^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_2\varrho\cos\omega_2,\quad \varrho^2 + \varrho_3^2 - 2\varrho_3\varrho\cos\omega_3 .$$

2) Analoge Relation zwischen den Längen der gemeinsamen Tangenten von fünf Kreisen. Wir multipliciren

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x'^2 + y'^2 - r'^2, & -2x', & -2y', & 2r', & 1 \\ x''^2 + y''^2 - r''^2, & -2x'', & -2y'', & 2r'', & 1 \\ & & \text{etc.} & & \end{vmatrix} \text{ u. } \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 1, & x', & y', & r', & x'^2 + y'^2 - r'^2 \\ 1, & x'', & y'', & r'', & x''^2 + y''^2 - r''^2 \\ & & \text{etc.} & & \end{vmatrix}$$

mit je fünf verticalen und sechs horizontalen Reihen und erhalten eine Determinante vom Werte Null. Für $\overline{12}$, etc. als Länge der gemeinsamen Tangenten wird dieselbe

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & \overline{12}^2, & \overline{13}^2, & \overline{14}^2, & \overline{15}^2 \\ 1, & \overline{12}^2, & 0, & \overline{23}^2, & \overline{24}^2, & \overline{25}^2 \\ 1, & \overline{13}^2, & \overline{23}^2, & 0, & \overline{34}^2, & \overline{35}^2 \\ 1, & \overline{14}^2, & \overline{24}^2, & \overline{34}^2, & 0, & \overline{45}^2 \\ 1, & \overline{15}^2, & \overline{25}^2, & \overline{35}^2, & \overline{45}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn der Kreis 5 die übrigen berührt, so werden $\overline{15}$, $\overline{25}$, $\overline{35}$, $\overline{45}$ gleich Null, und wir erhalten speciell die Relation zwischen den gemeinsamen Tangenten von vier Kreisen, welche derselbe fünfte berührt, in der Form der von den äufsersten Elementen der obigen eingerahmten Determinante vierter Ordnung, gleich Null gesetzt. Dieselbe ist das Quadrat der Relation des Textes.

3) Die Multiplication von zwei Determinanten mit den Zeilen 0, x_i, y_i, 1, $\frac{1}{2}(r_i^2 - x_i^2 - y_i^2)$ und 0, x_i', y_i', $\frac{1}{2}(r_i'^2 - x_i'^2 - y_i'^2)$, 1

für $i = 1, 2, 3, 4, 5$ gibt analog eine Relation zwischen den Cosinus der Winkel, unter welchen fünf Kreise eines (ungestrichenen) Systems von den fünf Kreisen eines andern (gestrichenen) Systems in derselben Ebene geschnitten werden.[33])

4) Die Distanzrelation zwischen vier Punkten einer Ebene 1, 2, 3, 4 liefert eine *Relation zwischen den Winkeln, unter denen sich vier Kreise schneiden.* Denn für zwei Kreise mit den Radien ϱ_1, ϱ_2 und den Mittelpunkten 1, 2 ist (mit (12) als dem Winkel ihres Schnittes)

$$\overline{12}^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2 \cos(12).$$

Man erhält somit aus der Determinante von 1) die folgende

$$\begin{vmatrix} 0, & 1 & , & 1 & , 1, & 1 \\ 1, & 0 & , & \varrho_2^2+\varrho_1^2-2\varrho_1\varrho_2\cos(21), & \cdot & \cdot \\ 1, & \varrho_1^2+\varrho_2^2-2\varrho_1\varrho_2\cos(12), & & 0 & , \cdot & \cdot \\ 1, & \varrho_1^2+\varrho_3^2-2\varrho_1\varrho_3\cos(13), & & \varrho_2^2+\varrho_3^2-2\varrho_2\varrho_3\cos(23), & 0, & \cdot \\ 1, & \varrho_1^2+\varrho_4^2-2\varrho_1\varrho_4\cos(14), & & \varrho_2^2+\varrho_4^2-2\varrho_2\varrho_4\cos(24), & \cdot & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Subtraction der mit ϱ_1^2, ϱ_2^2, ϱ_3^2, ϱ_4^2 bez. multiplicirten Elemente der ersten Reihe und Zeile von den entsprechenden der folgenden Reihen und Zeilen reducirt man diese zu

$$\begin{vmatrix} 0\;, & 1:\varrho_1\;, & 1:\varrho_2\;, & 1:\varrho_3\;, & 1:\varrho_4 \\ 1:\varrho_1, & 1\;, & \cos(21), & \cos(31), & \cos(41) \\ 1:\varrho_2, & \cos(12), & 1\;, & \cos(32), & \cos(42) \\ 1:\varrho_3, & \cos(13), & \cos(23), & 1\;, & \cos(43) \\ 1:\varrho_4, & \cos(14), & \cos(24), & \cos(34), & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man darin $\cos(21) = \cos(31) = \cos(41) = \cos\omega$, so entsteht aus $2\varrho_1\cos\vartheta = k$ eine quadratische Gleichung zur Bestimmung des k, welches irgend einem Werte von ω entspricht.

Achtes Kapitel.

Haupteigenschaften der Curven zweiten Grades.

---

141. **Die allgemeine Gleichung zweiten Grades** lautet

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (\S\,101)$$

und hat sechs Coefficienten a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}. Der durch sie dargestellte Ort wird allgemein als *Curve zweiten Grades* oder auch als *Kegelschnitt* bezeichnet*).

Die Natur dieser Curven ist von den speciellen Wertverhältnissen der Coefficienten abhängig, also von *fünf Constanten*, denn offenbar haben nur die Verhältnisse der sechs Coefficienten hierauf Einflufs (§§ 27, 102). Wir können daher einem von Null verschiedenen Coefficienten der Gleichung stets einen festen Wert beilegen, z. B. den Wert Eins, indem wir die Gleichung durch die ursprüngliche Wertziffer dividirt denken.

Somit sind im allgemeinen fünf Relationen zwischen den Coefficienten hinreichend, eine Curve zweiten Grades zu

---

*) Aus einem in § 163 erklärten Grunde spricht man, statt den nach § 22 zu erwartenden Ausdruck „Curve zweiter Ordnung" zu brauchen, meist vom *Grade* dieser Curve. Wir werden ferner beweisen, dafs der durch eine Ebene in einem Kreiskegel gemachte Schnitt eine Curve zweiten Grades ist, und umgekehrt, dafs es keine Curve zweiten Grades gibt, welche nicht als ein solcher Kegelschnitt betrachtet werden kann. Unter diesem Gesichtspunkt sind die Curven zweiten Grades zuerst von den Geometern untersucht worden. Wir gedenken dieser Eigenschaften, weil wir es oft passend finden werden, die Bezeichnung „Kegelschnitt" statt der längeren Benennung „Curve zweiten Grades" zu gebrauchen.

bestimmen. *Ein Kegelschnitt ist stets durch fünf Punkte bestimmt.* Substituiren wir nämlich in die allgemein angesetzte Gleichung die Coordinaten $x_1 | y_1$ etc. jedes Punktes, durch welchen die Curve gehen soll, so erhalten wir fünf Relationen zwischen den Coefficienten, die homogen und linear in denselben sind und somit zur Bestimmung der fünf Quotienten $a_{11} : a_{33}$, etc. genügen.

Die einem Kegelschnitt vorgeschriebenen Bedingungen können auch in anders gearteten Coefficientenrelationen ihren Ausdruck finden. So haben wir in § 59 gezeigt, dafs die Gleichung zweiten Grades zwei Gerade darstellt, sobald die als Discriminante bezeichnete Coefficientenfunction **D** verschwindet. Nach den Ergebnissen des § 108 ist der Kreis ein Kegelschnitt, dessen Gleichungscoefficienten zwei Bedingungen unterliegen.

Es ist die Aufgabe des gegenwärtigen Kapitels, die verschiedenen Curven zweiten Grades zu classificiren und einige der Eigenschaften zu entwickeln, welche ihnen allen gemeinsam sind. Dazu liefern die beiden vorhergehenden Kapitel manche Beispiele, wenn auch in speciellerer Form.

142. Weil wir in diesem Kapitel oft Gelegenheit haben, die Methode der *Coordinatentransformation* anzuwenden, so ist es nützlich, im voraus die Veränderungen der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zu besprechen. Wenn wir zu parallelen Axen durch einen neuen Nullpunkt $x_0 | y_0$ transformiren (§ 9), so erhalten wir die neue Gleichung, indem wir $x + x_0 | y + y_0$ für $x | y$ einsetzen, als

$$a_{11}(x + x_0)^2 + 2a_{12}(x + x_0)(y + y_0) + a_{22}(y + y_0)^2 \\ + 2a_{13}(x + x_0) + 2a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0.$$

Ordnen wir dieselbe nach den Potenzen der Veränderlichen und kennzeichnen deren Coefficienten durch beigefügte Accente, so bleiben offenbar unverändert $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{12} = a_{12}$, $a'_{22} = a_{22}$; dagegen sind

$$a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \quad a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23},$$
$$a'_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}.$$

Bei einer Paralleltransformation der Gleichung zweiten Grades bleiben die Coefficienten der quadratischen Glieder ungeändert; das neue absolute Glied ist das Resultat der Substitution der Coordinaten des Nullpunktes.

Bei einer Drehungstransformation ändert sich (nur) das constante Glied der Gleichung nicht. Denn die diesbezüglichen Formeln (§ 10) sind homogen, so dafs auch die neuen Coefficienten der linearen Glieder nur von den alten und dem Drehungswinkel abhängen*).

143. **Jede Gerade schneidet eine Curve zweiten Grades in zwei reellen, vereinigten oder imaginären Punkten.** In der Tat erhalten wir zur Bestimmung der Coordinaten der Punkte, in denen eine Gerade $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$ die Curve schneidet, eine quadratische Gleichung; insbesondere zur Berechnung der Abscissen eine solche durch die Substitution des Wertes $-(a_1 x + a_3) : a_2$ an Stelle der Veränderlichen y.

Dasselbe ergibt die Überlegung, dafs wir durch Coordinatentransformation stets die gegebene Gerade zu einer Axe, z. B. $y' = 0$, machen können, während die quadratische Gleichung nur andere (accentuirte) Coefficienten erhält. Die Schnittpunkte einer Curve zweiten Grades mit den Coordinatenaxen sind aber bestimmt durch die für $y = 0$, bez. $x = 0$ entstehenden quadratischen Gleichungen (§ 15)

$$a_{11} x^2 + 2 a_{13} x + a_{33} = 0, \quad a_{22} y^2 + 2 a_{23} y + a_{33} = 0.$$

Denken wir uns die Buchstaben etwa der ersten dieser Gleichungen accentuirt, d. h. als von den gegebenen Coefficienten durch die Substitution abhängige Ausdrücke, so sind dreierlei Fälle möglich. Die a_1, a_2, a_3 können solche reelle Zahlen, die Gerade kann so gelegen sein, dafs die Wurzeln jener Gleichung oder die Schnittpunkte reell und gesondert oder conjugirt imaginär sind.

Nach § 16 begrenzt der Kegelschnitt in jeder reellen Geraden eine *Sehne mit reellem Halbirungspunkt,* während ihre Länge entweder reell, rein imaginär oder Null ist. Eine imaginäre Gerade schneidet dagegen stets in imaginären

*) Beide Sätze gelten für Gleichungen beliebigen Grades.

Punkten, die *nicht* conjugirt sein können. Wird dabei für eine gegebene Gerade auch der Coefficient a'_{11} zu Null, so sprechen wir doch von zwei Schnittpunkten, nur dafs einer unendlich fern ist (§ 15).

Endlich kann die linke Seite der Gleichung ein vollständiges Quadrat werden, wenn $a'^2_{11} - a'_{11}a'_{22} = 0$; dann sagen wir, dafs die beiden Schnittpunkte zusammengefallen sind (§ 109).

144. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in rechtwinkligen Coordinaten liefert durch Transformation zu Polarcoordinaten (§ 7) *die Polargleichung eines Kegelschnittes:*

$$(a_{11} \cos^2 \vartheta + 2a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta)\, r^2$$
$$+ 2(a_{13} \cos \vartheta + a_{23} \sin \vartheta)\, r + a_{33} = 0.$$

Einem gegebenen Wert von ϑ entsprechen als Vectoren die beiden Wurzeln dieser in r quadratischen Gleichung, d. h. jede durch den Nullpunkt gezogene Gerade hat zwei Schnittpunkte mit der Curve.

Doch wird eine der Wurzeln unendlich grofs, d. h. der Vector schneidet die Curve in einem unendlich fernen Punkt, wenn für gewisse Werte von ϑ der Coefficient von r^2 verschwindet*). Die geforderte Bedingung wird aber im allgemeinen für zwei Werte von ϑ erfüllt, nämlich für diejenigen, welche die quadratische Gleichung liefert

$$a_{11} + 2a_{12} \tan \vartheta + a_{22} \tan^2 \vartheta = 0.$$

Demnach können durch den Nullpunkt zwei Gerade gezogen werden, welche eine Curve zweiten Grades auf der unendlich fernen Geraden schneiden. Ihre Gleichung wird, indem man $y : x = \tan \vartheta$ einsetzt, erhalten als

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Dieses Linienpaar kann (§ 54) aus reellen, vereinigten oder conjugirt imaginären Geraden bestehen.

Nun kann aber durch Paralleltransformation jeder reelle

---

*) Alsdann befindet sich der zweite Schnittpunkt des Vectors im allgemeinen in endlicher Entfernung, gegeben durch

$$2(a_{13} \cos \vartheta + a_{23} \sin \vartheta)\, r + a_{33} = 0.$$

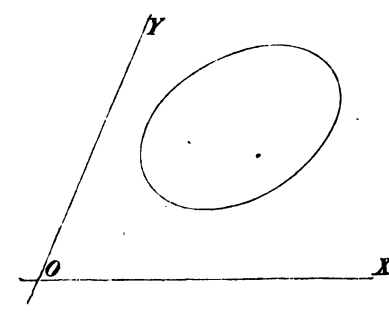
Punkt zum Nullpunkt der Coordinaten gemacht werden, ohne dafs sich dabei die Gröfsen a_{11}, a_{12}, a_{22} ändern (§ 142). Daher gibt es durch jeden Punkt ein Linienpaar, das die Curve im Unendlichfernen schneidet, bestimmt durch die nämliche quadratische Gleichung für tan ϑ.

Diese Betrachtung lehrt aber einfach, *dafs jeder Kegelschnitt zwei Richtungen enthält*, d. h. auch die unendlich ferne Gerade ($r = \infty$) in zwei Punkten schneidet. Diese beiden reellen, vereinigten oder imaginären Richtungen heifsen *die Asymptotenrichtungen der Curve.*

145. **Gattungen von Kegelschnitten.** Die wichtigste Frage hinsichtlich der Gestalt des reellen Zuges einer Curve ist die, ob er in jeder Richtung begrenzt ist oder ob er sich in irgend einer Richtung ins Unendliche erstreckt, wie z. B. ein Linienpaar. Wenn wir nach diesem Verhalten zum Unendlichfernen die Curven zweiten Grades classificiren wollen, so gibt der letzte Paragraph das nötige Kennzeichen. Je nachdem die Wurzeln tan ϑ der Gleichung

$$a_{11} + 2a_{12} \tan \vartheta + a_{22} \tan^2 \vartheta = 0$$

imaginär, vereint oder gesondert reell sind, unterscheiden wir, ob die durch eine vorgelegte Gleichung dargestellte Curve in jeder reellen Richtung begrenzt ist oder ob sie in ein oder zwei Richtungen unbegrenzt verläuft. Also hängt diese Classeneinteilung von dem Vorzeichen der Discriminante $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ obiger Gleichung ab.



Es gibt drei Gattungen gestaltlich verschiedener Curven zweiten Grades, nach der Realität der Asymptotenrichtungen.

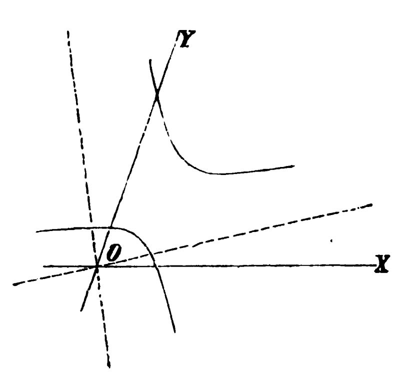
Setzen wir erstens

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

negativ voraus, so kann kein reeller Wert von ϑ gefunden, also keine reelle Gerade gezogen werden, welche die Curve im Unendlichen schneidet. *Eine Curve dieser Gattung ist in jeder Richtung begrenzt und*

heifst Ellipse. Wir werden im X. Kapitel zeigen, dafs ihre Form die in der Figur dargestellte ist. Die bekannteste specielle Ellipse ist der Kreis, der durch die imaginären absoluten Richtungen geht*).

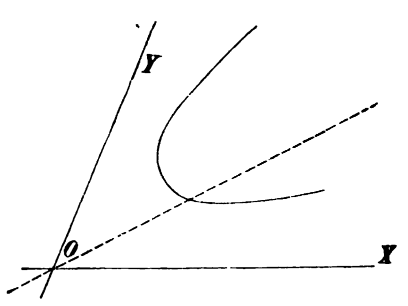
Ist zweitens $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ positiv, so sind die Wurzeln obiger Gleichung reell und verschieden und es gibt zwei reelle Punkte, deren Vectoren unendlich grofs sind. Das reelle Linienpaar $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ definirt diese beiden Richtungen und ist zugleich selbst ein Beispiel der Gattung. *Eine Curve dieser Gattung hat zwei sich ins Unendliche erstreckende Äste und heifst Hyperbel.* Ihre in der Figur veranschaulichte Form wird ebenfalls im X. Kapitel besprochen.



Wenn endlich $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ oder $a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}$ ist, so kann die Gleichung geschrieben werden $(\sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}} . \tan\vartheta)^2 = 0$ und hat nur eine doppelt zählende Wurzel. Es kann also nur eine, aber für ein Linienpaar zählende Gerade

$$\sqrt{a_{11}} . x + \sqrt{a_{22}} . y = 0$$

durch den Nullpunkt gezogen werden, welche die Curve im Unendlichen schneidet. *Eine Curve dieser Gattung wird von der unendlich fernen Geraden in zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten, d. h. berührt, und heifst Parabel.* Ihre Gestalt untersuchen wir im XI. Kapitel. Die gefundene Bedingung sagt auch, dafs die Gleichung eine



*) Für den Kreis reducirt sich die Discriminante auf $-a_{11}^2$ (§ 102).

Parabel darstellt, wenn ihre ersten drei Glieder ein vollständiges Quadrat bilden.

146. Es scheint nützlich, die Ableitung der Figur der Curve aus der Gleichung hier folgen zu lassen, ohne diese vorher durch Transformation auf ihre einfachste Form zu reduciren. Man bestätigt die gewonnenen Ergebnisse, indem man nach der in § 19 angegebenen Art die durch die Gleichung dargestellte Figur construirt. Wenn man y durch x ausdrückt, so erhält man

$$a_{22}y = -(a_{12}x + a_{23}) \pm R, \quad \text{wo}$$
$$R^2 = (a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22})x^2 + 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x + (a_{23}{}^2 - a_{22}a_{33}).$$

Da nun nach der Theorie der Gleichungen jede Gröfse von der Form $x^2 + px + q$ dem Product von zwei reellen oder imaginären Factoren $(x - \alpha)(x - \beta)$ äquivalent ist, so kann auch R^2 in der Form $(a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22})(x - \alpha)(x - \beta)$ dargestellt werden.

Ist daher $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22}$ negativ, so ist auch R^2 negativ, daher y complex, wenn die Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$ entweder beide positiv oder beide negativ sind. Reelle Werte von y werden nur für solche Werte von x gefunden, die zwischen α und β gelegen sind; die Curve existirt daher nur in dem zwischen den Geraden $x = \alpha$, $x = \beta$ gelegenen Teil der Ebene. (Vgl. § 19. 3).)

Das Umgekehrte findet statt, wenn $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22}$ positiv ist; man erhält reelle Werte von y für alle die Werte von x, welche die Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$ entweder beide positiv oder beide negativ machen, nicht aber für solche, die den einen positiv und den andern negativ werden lassen. Die Curve besteht in diesem Fall aus zwei Zweigen, welche im positiven und negativen Sinn ins Unendliche gehen, aber durch einen zwischen den Linien $x = \alpha$, $x = \beta$ gelegenen Raum getrennt sind, in dem kein Teil der Curve liegt.

Ist endlich $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, so ist bis auf einen constanten Factor R^2 entweder $x - \alpha$ oder $\alpha - x$; in dem einen Fall erhält man reelle Werte von y, so lange x gröfser ist als α, und in dem andern, so lange x kleiner ist als α. Die

Curve besteht daher aus einem einzigen Zweig, der auf der rechten oder linken Seite der Geraden $x = \alpha$ sich ins Unendliche erstreckt.

Sind die Wurzeln α, β complex und von der Form $\gamma \pm \delta i$, so kann R^2 stets in die reelle Form

$$R^2 = (a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22})\{(x-\gamma)^2 + \delta^2\}$$

gebracht werden. Ist $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, so ist auch R^2 stets positiv, und zur y-Axe parallele Gerade schneiden die Curve stets. So schneiden in der Figur der Hyperbel im vorigen Paragraphen alle diese Parallelen die Curve, während Parallelen zur x-Axe existiren, welche sie nicht treffen.

Andererseits ist für $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ auch R^2 immer negativ, und die Gleichung repräsentirt keine reelle Figur. Man spricht dann von *imaginären Kegelschnitten* und rechnet sie zur Gattung der Ellipsen, weil sie ebenfalls imaginäre Asymptotenrichtungen haben.

B. 1) Man construire wie in § 19 die Figuren und bestimme die Gattung der durch folgende Gleichungen dargestellten Curven:

$3x^2 + 4xy + y^2 - 3x - 2y + 21 = 0.$ Ellipse.

$5x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 19 = 0.$ Hyperbel.

$4x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 10 = 0.$ Parabel.

2) Eine Curve mit $a_{12} = 0$ ist eine Ellipse für gleiche, eine Hyperbel für entgegengesetzte Vorzeichen von a_{11} und a_{22}.

3) Eine Curve mit $a_{11} = 0$ ist eine Parabel, wenn zugleich $a_{12} = 0$ ist, sonst eine Hyperbel. Die Curve schneidet die x-Axe in unendlicher Ferne, und für $a_{22} = 0$ ebenso die y-Axe.

4) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0$$

stellt eine Parabel dar, welche die Axen in den Punkten $a \mid 0$ und $0 \mid b$ berührt.

147. **Centrum.** In jeder reellen Geraden liegt ein reeller Punkt, der die durch den Kegelschnitt begrenzte Sehne halbirt (§ 143). Umgekehrt: *Durch jeden Punkt kann im allgemeinen eine Sehne der Curve so gezogen werden, dafs sie in ihm halbirt ist.* Zum Beweis denken wir den gegebenen im

Endlichen gelegenen Punkt zum Nullpunkt rechtwinkliger Coordinaten gemacht.

Ist dann die Curve in der Polargleichung (§ 144) gegeben, so hat die Sehne vom Neigungswinkel ϑ den Nullpunkt zur Mitte, wenn die beiden Wurzeln r entgegengesetzt gleich sind. Dies tritt aber nur ein, wenn der mittlere Coefficient jener Gleichung verschwindet, d. h. wenn die Sehne in der durch $a_{13} \cos \vartheta + a_{23} \sin \vartheta = 0$ bestimmten Richtung gezogen ist. Die einzige im Nullpunkt halbirte Curvensehne wird also durch die Gleichung gegeben

$$a_{13}x + a_{23}y = 0^{*}).$$

Es gibt jedoch einen Fall, in welchem jede durch den gegebenen Punkt gezogene Sehne der Curve in ihm halbirt wird. Denn, sind in der allgemeinen Gleichung $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, so hat die Gröfse $a_{13} \cos \vartheta + a_{23} \sin \vartheta$ den Wert Null unabhängig von dem Wert von ϑ. Der Anfangspunkt wird dann das *Centrum der Curve* genannt. Die durch das Centrum gehenden Sehnen nennt man *Durchmesser der Curve*, die Längen der Vectoren ihrer Endpunkte *Halbmesser*.

Nun kann man im allgemeinen durch Transformation der Gleichung zweiten Grades den Coefficienten a'_{13}, a'_{23} den Wert Null geben. Denn, wenn man die in § 142 gegebenen Werte für a'_{13}, a'_{23} gleich Null setzt, so findet man, dafs die Coordinaten des neuen Anfangspunktes den Bedingungen

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \quad a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$$

genügen müssen. Diese Gleichungen bestimmen $x_0 \,|\, y_0$, und zwar, da sie linear sind, nur *einen* Punkt $x_0 \,|\, y_0$. *Ein Kegelschnitt besitzt im allgemeinen nur ein Centrum*, nämlich von den Coordinaten

$$x_0 = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}, \quad y_0 = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}.$$

Für die Ellipse und Hyperbel sind nach § 145 $x_0 \,|\, y_0$ stets endlich, für die Parabel aber ist $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$,

*) Dies wird auch für schiefe Coordinaten dadurch bestätigt, dafs unter dieser Bedingung allein sowol $x \,|\, y$ als $-x \,|\, -y$ auf der Curve liegt.

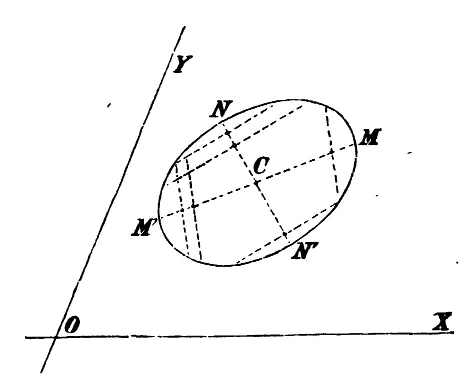
d. h. $x_0 \mid y_0$ sind unendlich grofs. Die Ellipse und Hyperbel sind deshalb zusammen als *Centralcurven* zweiten Grades, die Parabel ist etwa als eine *Curve ohne Centrum* bezeichnet worden. Genau gesprochen hat aber *jede Curve* zweiten Grades — auch die imaginäre — ein Centrum, nur dafs in dem Fall der Parabel dieses Centrum unendlich fern ist.

In einer Centralcurve kann das Centrum als Nullpunkt recht- oder schiefwinkliger Coordinaten genommen werden. Die Paralleltransformation ergibt dann als ihre Gleichung (vgl. § 164)

$$a_{12}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a'_{33} = 0,$$

wo nur a'_{33} nach § 142 von $x_0 \mid y_0$ abhängig ist. Aus dieser Form erkennt man *die Symmetrie der Curve in Bezug auf ihr Centrum.*

148. **Durchmesser.** *Der Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Curve zweiten Grades ist ein Durchmesser.* Wenn (§ 147) im Anfangspunkt der Coordinaten die durch



$$a_{13}\cos\vartheta + a_{23}\sin\vartheta = 0$$

bestimmte Sehne halbirt wird, und wir transformiren durch Verschiebung zu einem andern Punkt $x_0 \mid y_0$, so wird eine zu jener parallele Sehne in diesem halbirt, falls auch $a'_{13}\cos\vartheta + a'_{23}\sin\vartheta = 0$ ist oder (§ 142)

$$\cos\vartheta\,(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + \sin\vartheta\,(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) = 0.$$

Dieser Relation müssen also die Coordinaten $x_0 \mid y_0$ eines Punktes genügen, wenn derselbe der Mittelpunkt einer Sehne sein soll, die den Winkel ϑ mit der x-Axe einschliefst.

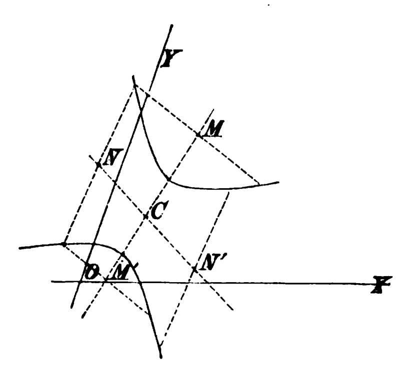
Also ist der Ort der Mittelpunkte aller Sehnen von der Richtung ϑ die Gerade

$$\cos\vartheta\,(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + \sin\vartheta\,(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

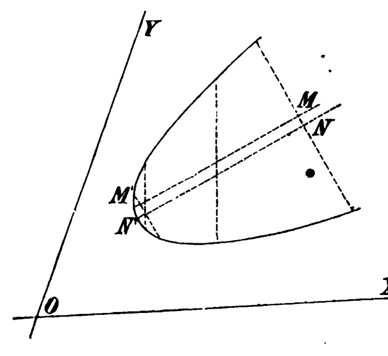
Eine solche Gerade geht, wie die Form ihrer Gleichung zeigt, durch den Schnittpunkt der Geraden

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \quad a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0.$$

Da aber aus diesen Gleichungen in § 148 die Coordinaten des Centrums bestimmt worden sind, so ist dieser Ort ein Durchmesser des Kegelschnittes, und die durch ihn halbirten Sehnen heifsen die zugehörigen *Ordinaten.* Insbesondere sind durch die beiden letzten Gleichungen diejenigen Durchmesser dargestellt, welche die zur x-, bez. y-Axe parallelen Sehnen halbiren ($\vartheta = 0$ bez. $\frac{1}{2}\pi$)*). Zur Erläuterung dieser Verhältnisse denke man an den Kreis, beachte aber, dafs in einem Kegelschnitt die Durchmesser ihre Ordinaten im allgemeinen nicht unter rechten Winkeln schneiden, wie dies im Kreis geschieht.



149. *Alle Durchmesser der Parabel sind einander parallel.* Dies folgt schon daraus, dafs alle Durchmesser eines Kegelschnittes durch das Centrum desselben gehen**), das der Parabel aber unendlich fern ist. In der Tat sind aber auch, wegen $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ oder



$$a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22}$$
$$= \sqrt{a_{11}} : \sqrt{a_{22}},$$

die Geraden $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$, $a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$

*) Die Gleichung $a_{22}y = -(a_{12}x + a_{23}) \pm R$ des § 146 wird am leichtesten construirt, indem man zuerst die Gerade $a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$ darstellt und dann von jedem Punkt P derselben in der Ordinate über und unter P Strecken PQ, PQ' abträgt, welche gleich R sind.

**) Wenn ein Teil des Kegelschnittes genau verzeichnet ist, so

parallel. Die Richtung der Ordinaten kann jede beliebige sein, ihre Winkel gegen die zugehörigen Durchmesser können also jeden möglichen Wert annehmen.

Die Durchmesser der Parabel gehen auch durch ihren unendlich fernen Punkt. In der Tat ist die Gerade durch den Ursprung, welche die Curve in unendlicher Entfernung schneidet, nach § 143 durch die Gleichung $(x\sqrt{a_{11}}+y\sqrt{a_{22}})^2=0$ ausgedrückt, also dem Durchmesser $a_{11}x+a_{12}y=0$ parallel. Also kann jeder Durchmesser der Parabel nur *einen* Punkt im Endlichen mit ihr gemein haben und der unendlich ferne Punkt ist mit dem Centrum identisch.

150. **Conjugirte Durchmesser eines Centralkegelschnittes** *sind solche, von denen jeder die zum andern parallelen Sehnen halbirt.* Die Gleichung des Durchmessers, der die Sehnen halbirt, welche den Winkel ϑ mit der x-Axe bilden, ist (§ 148)

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) \tan\vartheta = 0.$$

Für den Winkel ϑ' dieser Geraden mit der x-Axe ist

$$\tan\vartheta' = -\frac{a_{11} + a_{12}\tan\vartheta}{a_{12} + a_{22}\tan\vartheta};$$

also $$a_{22}\tan\vartheta\tan\vartheta' + a_{12}(\tan\vartheta + \tan\vartheta') + a_{11} = 0.$$

Die Symmetrie dieser Gleichung in Bezug auf ϑ, ϑ' zeigt an, dafs die Sehnen, welche mit der x-Axe den Winkel ϑ' bilden, ihrerseits von einem Durchmesser halbirt werden, der mit der x-Axe den Winkel ϑ einschliefst. Also gehört zu zwei Richtungscoefficienten $\tan\vartheta$, $\tan\vartheta'$, welche obiger Gleichung genügen, stets ein Paar conjugirter Durchmesser *).

Auch für allgemeine Parallelcoordinaten gilt insbesondere

---

kann man sein Centrum und seine Gattung nach dem Vorigen bestimmen. Denn je zwei parallele Sehnen bestimmen durch ihre Halbirungspunkte einen Durchmesser; in derselben Art erhält man durch zwei andere parallele Sehnen einen zweiten Durchmesser. Sind beide Durchmesser parallel, so ist der Kegelschnitt eine Parabel; schneiden sie sich auf der concaven Seite des Curvenbogens, so ist er eine Ellipse und im entgegengesetzten Fall eine Hyperbel.

*) Nur die Centralcurven können conjugirte Durchmesser haben, weil bei der Parabel die Richtung aller Durchmesser dieselbe ist.

der Satz: Fehlt in der allgemeinen Gleichung einer Centralcurve das Glied mit xy, d. h. ist $a_{12} = 0$, so sind die Coordinatenaxen einem Paare conjugirter Durchmesser parallel. Denn geben wir y einen constanten Wert, so ist die Summe der zugehörigen Abscissen gleich $-2a_{13} : a_{11}$, also liegt die Mitte der zur x-Axe parallelen Sehnen in der Geraden $a_{11}x + a_{13} = 0$, d. h. in einer Parallelen zur y-Axe. Ebenso findet man $a_{22}y + a_{23} = 0$ als die Halbirungslinie der y-Parallelen.

Überhaupt aber gelten die Erörterungen und Formeln der §§ 147—150 auch für schiefwinklige Coordinaten, sobald man $\tan\vartheta$, $\tan\vartheta'$ durch die allgemeinen Richtungscoefficienten $m = \sin\vartheta : \sin(\omega - \vartheta)$, $m' = \sin\vartheta' : \sin(\omega - \vartheta')$ ersetzt (§ 24).

151. **Axen.** Welchen Bedingungen müssen nun conjugirte Durchmesser genügen, wenn sie sich rechtwinklig schneiden sollen?

Für zwei zu einander rechtwinklige conjugirte Durchmesser hat man (§§ 25, 31) $\tan\vartheta' = -1 : \tan\vartheta$, zur Bestimmung von ϑ also die quadratische Gleichung

$$a_{12}\tan^2\vartheta + (a_{11} - a_{22})\tan\vartheta - a_{12} = 0.$$

Eine einfache Umformung ergibt aber

$$a_{12}\cos 2\vartheta - \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\sin 2\vartheta = 0, \quad \text{also} \quad \tan 2\vartheta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Ist für die betrachtete Curve zweiten Grades gleichzeitig $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$, so ist $\tan 2\vartheta$ eine unbestimmte Gröſse, d. h. *jeder Durchmesser einer solchen Curve ist rechtwinklig zu dem ihm conjugirten;* die besondere Curve zweiten Grades, die man so definirt erhält, ist aber der *Kreis* (§ 102).

Setzt man in die obige Gleichung ein $\tan\vartheta = y - y_0 : x - x_0$, so erhält man die Gleichung eines Rechtwinkelpaares von Durchmessern in rechtwinkligen Coordinaten als

$$a_{12}(x-x_0)^2 - (a_{11}-a_{22})(x-x_0)(y-y_0) - a_{12}(y-y_0)^2 = 0 \quad (\S\ 55).$$

Jeder Centralkegelschnitt auſser dem Kreis — auch der imaginäre — hat also zwei und nur zwei zu einander rechtwinklige con-

jugirte Durchmesser. Wir nennen diese Durchmesser *die Axen der Curve* und ihre Schnittpunkte mit derselben *die Scheitel.*

Endlich kann *die Parabel nur eine Axe und einen Scheitel im Endlichen* haben. In der Tat hat die zur gemeinsamen Richtung ihrer Durchmesser normale Sehne $\tan\vartheta = \sqrt{a_{22} : a_{11}}$ (§ 150) und die Gleichung des diese halbirenden Durchmessers, d. h. der Axe ergibt sich aus § 148 als

$$(a_{11} + a_{22})(\sqrt{a_{11}} \cdot x + \sqrt{a_{22}} \cdot y) + a_{13}\sqrt{a_{11}} + a_{23}\sqrt{a_{22}} = 0.$$

152. **Asymptoten.** Die Gleichung des Axenpaares eines Centralkegelschnittes stimmt (§ 56) überein mit der Gleichung der Winkelhalbirenden eines Linienpaares

$$a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 = 0.$$

Nun schneidet (§ 144) jede Gerade dieses Paares die Curve in einem unendlich entfernten Punkt und überdies in einem Punkt in der Entfernung $-\frac{a'_{33}}{2(a'_{13}\cos\vartheta + a'_{23}\sin\vartheta)}$ vom Nullpunkt $x_0 | y_0$ transformirter Coordinaten. Ist aber dieser $x_0 | y_0$ das Centrum der Curve, d. h. sind (§ 147) $a'_{13} = 0$, $a'_{23} = 0$, so wird auch der Vector dieses zweiten Schnittpunktes unendlich grofs. Durch das Centrum der Curve können demnach zwei Gerade gezogen werden, welche die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten in unendlicher Entfernung treffen. Sie werden die *Asymptoten der Curve* genannt und sind reell im Fall der Hyperbel, conjugirt imaginär im Fall der Ellipse.

Die Axen der Curve sind also diejenigen Durchmesser derselben, welche die von ihren Asymptoten gebildeten Winkel halbiren, und sie sind *stets reell,* gleichviel ob die Asymptoten reell oder imaginär sind (§ 56).

Bei der Parabel ist offenbar die unendlich ferne Gerade selbst die einzige Gerade, welche sie in zwei vereinten unendlich fernen Punkten schneidet.

153. **Tangente.** Wenn in der allgemeinen Gleichung zweiten Grades $a_{33} = 0$ ist, so ist der Anfangspunkt der Coordinaten ein Punkt der Curve. In Übereinstimmung damit ist eine der beiden Wurzeln der entsprechenden quadratischen Gleichung des § 143 immer gleich Null. Die aus

$$(a_{11}\cos^2\vartheta + 2a_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta + a_{22}\sin^2\vartheta)r + 2(a_{13}\cos\vartheta + a_{23}\sin\vartheta) = 0$$

zu bestimmende zweite Wurzel verschwindet ebenfalls, wenn $a_{13}\cos\vartheta + a_{23}\sin\vartheta = 0$ ist. Also schneidet der Vector $y : x = \tan\vartheta = -a_{13} : a_{23}$ die Curve im Anfangspunkt in zwei zusammenfallenden Punkten; die Gleichung dieser Geraden ist $$a_{13}x + a_{23}y = 0.$$

Man nennt eine solche eindeutig bestimmte Gerade, welche zwei unendlich nahe Nachbarpunkte mit der Curve gemein hat, eine *Tangente* derselben und die Vereinigung dieser Punkte ihren *Berührungspunkt*.

Durch dasselbe Verfahren kann man die Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkt $x' \mid y'$ bestimmen. Denn, transformirt man die Curvengleichung ($a_{33} \gtrless 0$) zu parallelen Axen durch den Punkt $x' \mid y'$, so verschwindet a'_{33} nach dem Vorigen, und die Gleichung der Tangente $a'_{13}x + a'_{23}y = 0$ in Bezug auf die neuen oder $a'_{13}(x - x') + a'_{23}(y - y') = 0$ in Bezug auf die alten Axen, also nach den Werten von a'_{13}, a'_{23} in § 142, wird

$$(x - x')(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}) + (y - y')(a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}) = 0.$$

Addirt man auf beiden Seiten die Identität

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{23} = 0,$$

so erhält man die einfacheren Formen für *die Gleichung der Tangente des Kegelschnittes im Punkt* $x' \mid y'$

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23})y + a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33} = 0,$$
$$a_{11}x'x + a_{12}(x'y + y'x) + a_{22}y'y + a_{13}(x + x') + a_{23}(y + y') + a_{33} = 0.$$

Diese Gleichung geht aus der der Curve hervor, indem man in derselben die Gröfsen x^2, y^2, $2xy$, $2x$, $2y$ *beziehungsweise durch* xx', yy', $x'y + y'x$, $x + x'$, $y + y'$ *ersetzt.* Man bemerke, dafs die Gleichung der Tangente in Bezug auf die Coordinatenpaare $x \mid y$ und $x' \mid y'$ symmetrisch ist.

154. Die Tangente ist nach dem Vorigen die Grenzlage einer Secante, deren Schnittpunkte einander unbegrenzt näher rücken. Daher mufs ihre für allgemeine Parallelcoordinaten gültige Gleichung wie in § 109 aus der Verbindungsgeraden

$$(y - y') : (x - x') = (y' - y'') : (x' - x'') = m$$

zweier Curvenpunkte $x' \mid y'$ und $x'' \mid y''$ entstehen.

Setzt man $x'|y'$ und $x''|y''$ in die allgemeine Curvengleichung ein und bildet die Differenz der Substitutionsresultate, so folgt

$$a_{11}(x'^2 - x''^2) + 2a_{12}(x'y' - x''y'') + a_{22}(y'^2 - y''^2)$$
$$+ 2a_{13}(x' - x'') + 2a_{23}(y' - y'') = 0.$$

Durch Division mit $x' - x''$ geht dies über in

$$0 = a_{11}(x' + x'') + 2a_{12}(y' + mx') + a_{22}m(y' + y'') + 2a_{13} + 2a_{23}m,$$

woraus sich der Wert ergibt

$$m = -\frac{a_{11}(x' + x'') + 2a_{12}y' + 2a_{13}}{a_{22}(y' + y'') + 2a_{12}x'' + 2a_{23}} = \frac{y - y'}{x - x'}.$$

Beim Zusammenfallen von $x''|y''$ mit $x'|y'$ entspringt als der früheren äquivalente Gleichung der Tangente in $x'|y'$

$$\frac{y - y'}{x - x'} = -\frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}}{a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}}.$$

Man kann der Gleichung der Sehne $x'|y'$, $x''|y''$ der Curve auch die Form geben

$$a_{11}(x - x')(x - x'') + 2a_{12}(x - x')(y - y'') + a_{22}(y - y')(y - y'')$$
$$= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}.$$

Denn die Glieder vom zweiten Grade in x, y heben sich gegenseitig auf, und offenbar verschwinden beide Seiten für $x'|y'$, $x''|y''$. Indem man $x'' = x'$, $y'' = y'$ setzt, erhält man die Gleichung der Tangente

$$a_{11}(x - x')^2 + 2a_{12}(x - x')(y - y') + a_{22}(y - y')^2$$
$$= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \text{ oder}$$
$$2a_{11}xx' + 2a_{12}(x'y + y'x) + 2a_{22}y'y + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$
$$= a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2.$$

Addirt man endlich beiderseits die Glieder $2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33}$ und beachtet, dafs $x'|y'$ der Gleichung der Curve genügen, so findet man wieder die letzte Gleichungsform des § 153.

B. 1) Der Punkt $1|1$ liegt in der Curve

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 + 7x - 5y - 3 = 0;$$

transformirt man zu parallelen Axen durch diesen Punkt, so ist die Gleichung der Tangente in ihm $9x - 5y = 0$ bezogen auf die neuen Axen, und $9(x - 1) - 5(y - 1) = 0$ bezogen auf die alten.

2) $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$ hat in $2 \mid 1$ die Tangente $9x + 10y = 28$.

3) Die Tangenten der Curven $xy = a^2$ und $y^2 = px$ im Punkte $x' \mid y'$ sind

$$x'y + y'x = 2a^2 \quad \text{und} \quad 2yy' = p(x + x').$$

155. **Pol und Polare.** Die Gleichung der Tangente

$$a_{11}x'x + a_{12}(x'y + y'x) + a_{22}y'y + a_{13}(x' + x) + a_{23}(y' + y) + a_{33} = 0$$

drückt eine Relation aus, welche zwischen den Coordinaten $x \mid y$ eines beliebigen Punktes der Tangente und denen des Berührungspunktes $x' \mid y'$ besteht. Wenn wir die Coordinaten des Berührungspunktes als unbekannt und die eines Punktes der Tangente aufser ihm als bekannt ansehen, so wird dies durch den Wechsel der Indices ausgedrückt; aber wir bemerken, dafs die vorige Gleichung, als nach $x \mid y$ und $x' \mid y'$ symmetrisch, dadurch gar nicht verändert wird*). Dieselbe Gleichung also, welche für $x' \mid y'$ als einen Punkt der Curve die Tangente der Curve in demselben darstellt, repräsentirt für $x' \mid y'$ als einen nicht in der Curve gelegenen Punkt eine Gerade, welche durch die Berührungspunkte der reellen oder imaginären Tangenten hindurchgeht, die sich von $x' \mid y'$ an dieselbe ziehen lassen.

Diese Berührungssehne wird die Polare des Punktes $x' \mid y'$ in Bezug auf die Curve zweiten Grades, der Schnittpunkt $x' \mid y'$ der Tangenten der Pol dieser Geraden genannt.

Die Gleichung der Polare von $x' \mid y'$ wird also erhalten, indem man in die Curvengleichung für x^2, y^2, $2xy$, $2x$, $2y$ bez. xx', yy', $x'y + y'x$, $x + x'$, $y + y'$ substituirt**). Die Coordinaten $x' \mid y'$ des Pols einer Geraden $\xi x + \eta y + 1 = 0$ werden gefunden, indem man deren Gleichung mit derjenigen

---

*) Wenn aber z. B. die Gleichung der Tangente einer Curve im Punkte $x' \mid y'$ ist $xx'^2 + yy'^2 = r^2$, so liegen die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte $x' \mid y'$ an die Curve gezogenen Tangenten in der Curve $x'x^2 + y'y^2 = r^2$. Nur in dem Falle der Curven zweiten Grades ist die Gleichung, welche den Ort der Berührungspunkte bestimmt, von derselben Form mit der Gleichung der Tangente.

**) Man nennt die so gebildete lineare Gleichung selbst die Polare der quadratischen Curvengleichung.

einer Polaren vergleicht, also durch Auflösung der Relationen

$$\xi = \frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}}{a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}}, \quad \eta = \frac{a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}}{a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}}.$$

Die Beziehung zwischen Pol und Polare ist also eindeutig.

Wenn wir $x' \mid y'$ für $x \mid y$ in die Gleichung der Polare substituiren, so erhalten wir das nämliche Resultat, wie durch Substitution derselben Werte in die Gleichung der Curve; dies Substitutionsresultat verschwindet also nur, wenn $x' \mid y'$ in der Curve selbst liegt. *Die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt geht nur dann durch diesen Punkt, wenn derselbe in der Curve liegt und ist dann die Tangente der Curve in diesem Punkte.*

Nun ist die Polare des Nullpunktes der Coordinaten

$$a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Sie ist offenbar der Sehne $a_{13}x + a_{23}y = 0$ parallel, welche im Nullpunkt halbirt wird (§ 147), ist also eine Ordinate des durch den Nullpunkt gehenden Durchmessers. Da aber jeder beliebige Punkt durch Transformation Nullpunkt werden kann, so ist *die Polare irgend eines Punktes den Ordinaten des durch ihn gehenden Durchmessers parallel; insbesondere ist die Tangente im Endpunkt eines Durchmessers den Ordinaten desselben parallel.* Im Fall der Centralcurven ist also, kürzer gesagt, (§ 150) die Polare eines Punktes zu dem conjugirten des ihn enthaltenden Durchmessers parallel.

Somit ist ein Durchmesser die Polare der Richtung des conjugirten Durchmessers, denn die Tangenten in seinen Endpunkten haben jene Richtung. Zu einem unendlich fernen Pol wird in der Tat die Gleichung der Polare erhalten, indem man die allgemeine Form durch x' dividirt und dann $1 : x' = 0$, $y' : x' = m$ setzt, nämlich als

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + m(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Die Polare des Centrums ist die unendlich ferne Gerade; denn, wird das Centrum als Nullpunkt, also $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$ genommen, so reducirt sich die Gleichung der Polare desselben auf $a_{33} = 0$. Diese bezeichnet (§ 72) die unendlich ferne Gerade, deren Schnittpunkte mit der Curve daher die

Berührungspunkte der *Tangenten* aus dem Centrum sind. Also sind *die Asymptoten* (§ 152) *die Tangenten der Curve in ihren unendlich fernen Punkten.*

B. 1) Für einen Kegelschnitt liegt der Pol der einen Coordinatenaxe in der andern, wenn $a_{12}a_{33} = a_{13}a_{23}$ ist.

2) In diesem Fall geht eine Asymptote durch den Nullpunkt, wenn $a_{11}a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{22}a_{13}^2 = 0$ ist.

156. **Tangentenpaar.** Da überhaupt die Berührungspunkte der von einem Pol $x' | y'$ ausgehenden Tangenten der Curve die Schnittpunkte einer Geraden mit derselben sind, so gehen (§ 143) *durch jeden Punkt der Ebene zwei reelle, zusammenfallende oder imaginäre Tangenten eines Kegelschnittes.*

Die Polargleichung der Curve zweiten Grades

$$(a_{11}\cos^2\vartheta + 2a_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta + a_{22}\sin^2\vartheta)r^2 + 2(a_{13}\cos\vartheta + a_{23}\sin\vartheta)r + a_{33} = 0$$

führt zu den nämlichen Resultaten, wenn man nach den Punkten fragt, in welchen der Vector zwei zusammenfallende Punkte mit der Curve gemein hat. Die in r quadratische Gleichung besitzt zwei gleiche Wurzeln, wenn man hat

$$(a_{12}\cos\vartheta + a_{23}\sin\vartheta)^2 = a_{33}(a_{11}\cos^2\vartheta + 2a_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta + a_{22}\sin^2\vartheta);$$

man erhält also zwei Werte von ϑ, d. h. zwei Tangenten der Curve, die vom Nullpunkt ausgehen*).

Multiplicirt man die gefundene Bedingungsgleichung mit r^2 und geht zu $x | y$ über, so erhält *die Gleichung des Tangentenpaares* die Form

$$(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)x^2 + 2(a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23})xy + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)y^2 = 0.$$

Die beiden Tangenten sind im allgemeinen gesondert. Stellt man aber die Bedingung für die Gleichheit der Wurzeln obiger Gleichung auf, so erhält man

$$(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) = (a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23})^2 \quad \text{oder}$$

$$a_{33}(a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2) = 0.$$

Also fallen einmal die beiden vom Nullpunkt ausgehenden

*) Der gemeinsame Wert der Wurzeln folgt aus

$$(a_{13}\cos\vartheta + a_{23}\sin\vartheta)r + a_{33} = 0$$

d. h. für die Berührungspunkte gilt die Relation des § 155

$$a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Tangenten zusammen für $a_{33} = 0$, d. h. wenn dieser Punkt der Curve angehört. Daher ist ein Punkt in der Curve als der Schnittpunkt von zwei zusammenfallenden Tangenten derselben anzusehen, so wie die Tangente als die Verbindungslinie von zwei zusammenfallenden Punkten erklärt worden ist.

Doch fallen die Tangenten auch zusammen, wenn der im § 59 Discriminante **D** genannte Ausdruck gleich Null ist:

$$a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2 - a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{23}a_{13}a_{12} = 0,$$

d. h. wenn die Curve in ein Linienpaar degenerirt. Denn, dann ist die einzige Gerade, die sie in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden kann, die nach dem Doppelpunkt gezogene. Die an eine zerfallende Curve zweiter Ordnung gehenden Tangenten fallen mit jener Geraden zusammen.

Falls der Kegelschnitt nicht ein Linienpaar ist und einen reellen Zug besitzt, trennt derselbe die Ebene in zwei Gebiete, die wir als *Äufseres und Inneres der Curve* unterscheiden. Wir nennen den Punkt einen äufseren oder inneren, je nachdem das Tangentenpaar reell oder imaginär ist*).

Die Gleichung des Tangentenpaares kann auf die Gestalt gebracht werden

$$a_{33}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33})$$
$$- (a_{13}x + a_{23}y + a_{33})^2 = 0,$$

welche deutlich zeigt, dafs die Gleichung auch bei schiefen Coordinatenaxen das Tangentenpaar darstellt. Denn für die Schnittpunkte dieses Linienpaares mit der Curve ist auch $(a_{13}x + a_{23}y + a_{33})^2 = 0$, d. h. ihre Verbindungslinie ist die Polare des Nullpunktes. Die linke Seite mufs das Product von zwei linearen Factoren sein. *Gibt man daher zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte, so läfst sich die Gleichung der Curve auf jene in der Form beziehen*

$$(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2) - (a_1x + a_2y + a_3)^2 = 0,$$

---

*) Die Übereinstimmung dieser gebräuchlichen Unterscheidung mit dem Zusatz zu § 29 bei passender Vorzeichenwahl wird § 161 nachgewiesen.

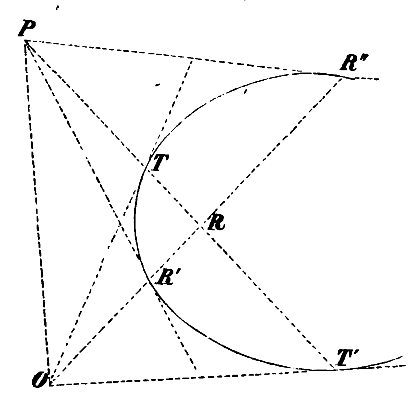
falls $b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 = 0$ das Tangentenpaar und $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ die Berührungssehne ist (vgl. § 110).

Alle Gleichungen des § gelten für einen beliebigen Pol $x' \mid y'$, sobald man $x \mid y$ durch $x - x' \mid y - y'$ ersetzt.

157. **Polarentheorie.** Die allgemeine Gleichung des § 155 läfst einige wichtige Eigenschaften der Pole und Polaren erkennen. *Wenn der Punkt* $x' \mid y'$ *in der Polare von* $x'' \mid y''$ *liegt, so liegt auch* $x'' \mid y''$ *in der Polare von* $x' \mid y'$. Denn die Bedingung, unter welcher $x'' \mid y''$ in der Polare von $x' \mid y'$ liegt:

$$a_{11}x'x'' + a_{12}(x'y'' + y'x'') + a_{22}y'y'' + a_{13}(x' + x'') + a_{23}(y' + y'') + a_{33} = 0,$$

ist auch die Bedingung, unter welcher der Punkt $x' \mid y'$ in der Polare von $x'' \mid y''$ liegt. Diese schon betonte Symmetrie der Relation lehrt also, dafs ein Pol und irgend ein Punkt seiner Polare ein Paar bilden, in welchem die Rollen vertauschbar sind. Zwei Punkte, deren Coordinaten jener symmetrischen Gleichung genügen, heifsen daher *conjugirte Pole des Kegelschnittes.*



Somit kann man obigen Satz als Definition aussprechen: *Die Polare eines festen Punktes* $x' \mid y'$ *ist der Ort der zu ihm conjugirten Pole* $x'' \mid y''$. Ferner aber folgert man die dual entsprechenden Sätze (§ 79): *Die Polare eines Punktes, der sich in einer Geraden bewegt, dreht sich um den Pol dieser Geraden,* und: *Der Pol einer Geraden, die sich um einen Punkt dreht, bewegt sich in der Polare dieses Punktes.* Das erstere erkennt man auch nach § 50 direct in der Gleichungsform $0 =$

$$(a_{11}x'' + a_{12}y'' + a_{13})x' + (a_{12}x'' + a_{22}y'' + a_{23})y' + (a_{13}x'' + a_{23}y'' + a_{33}).$$

Ferner: *Der Schnittpunkt von zwei Geraden ist der Pol der Geraden, welche ihre Pole verbindet;* und umgekehrt: *Die Verbindungsgerade von zwei Punkten ist die Polare des Schnittpunktes der Polaren dieser Punkte.* Denn wenn man in der

Polare von $x' | y'$ zwei beliebige Punkte wählt, so schneiden sich ihre Polaren in $x' | y'$.

158. *Wenn zwei aus einem Punkt O gezogene Gerade eine Curve zweiten Grades je in zwei Punkten schneiden, so liegen die Schnittpunkte P und Q der beiden andern Paare von Geraden, welche diese Schnittpunkte verbinden, in der Polare von O.* Wenn die beiden festen Geraden die x- bez. y-Axe sind und in ihnen durch den Kegelschnitt die Abschnitte λ, λ' bez. μ, μ' bestimmt werden, so sind

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} = 1, \quad \frac{x}{\lambda'} + \frac{y}{\mu'} = 1, \quad \frac{x}{\lambda'} + \frac{y}{\mu} = 1, \quad \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu'} = 1,$$

die Gleichungen der beiden Paare von Geraden, welche jene Punkte verbinden. Die Gleichung der Verbindungslinie von P und Q ist aber dann $\frac{x}{\lambda} + \frac{x}{\lambda'} + \frac{y}{\mu} + \frac{y}{\mu'} = 2$; denn diese Gerade geht (§ 62) durch die Schnittpunkte obiger Linienpaare. Aus der allgemeinen Gleichung des Kegelschnittes bestimmen sich aber die Parameter λ, λ' bez. μ, μ' als Wurzeln von

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0 \text{ bez. } a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

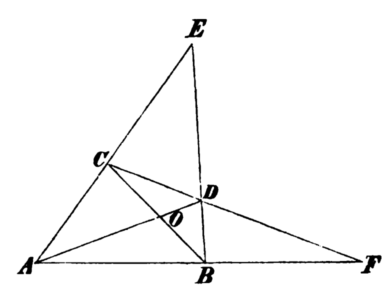
Man hat also $\quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = -\frac{2a_{13}}{a_{33}}, \quad \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} = -\frac{2a_{23}}{a_{33}}$

und somit für PQ die Gleichung $a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$ (§ 155) die Gleichung der Polare des Nullpunktes O. Wenn also der Punkt O gegeben ist, und die beiden durch ihn gehenden Geraden veränderlich gedacht werden, so ist der Ort der Punkte P und Q die Polare des Punktes O. (Vergl. § 47. 7).)

Wenn beide Linien zusammenfallen, so entsteht als ein Specialfall der Satz: *Wenn durch einen Punkt O eine Gerade R′R″ gezogen wird, so schneiden sich die Tangenten der Curve in den Punkten R′, R″ in der Polare von O.* Dieselbe Eigenschaft geht auch daraus (§ 157) hervor, dafs, weil $R'R''$, die Polare von P, durch O geht, P in der Polare von O liegen mufs. Man kann hiernach die Polare eines Punktes als den Ort der Schnittpunkte derjenigen Tangentenpaare der Curve definiren, deren Berührungspunkte von den durch ihn gehenden Sehnen ausgeschnitten werden. Die Definitionen dieses §

sind unabhängig von der Lage des Pols gegen den Kegelschnitt und besonders leicht construirbar.

159. **Polardreiecke.** Den Satz des § 158 können wir offenbar auch so aussprechen: Befinden sich vier Punkte A, B, C, D auf einem Kegelschnitt, so liegen die Schnittpunkte zweier Seitenpaare auf der Polare des Schnittpunktes des dritten, oder O, E, F haben die Polaren EF, FO, OE. In der Terminologie des vollständigen Vierecks (§ 63) lautet dies: *In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Viereck ist jeder Diagonalpunkt der Pol der Verbindungsgeraden der beiden andern.* Also sind je zwei Diagonalpunkte conjugirte Pole.



Die Diagonalpunkte eines eingeschriebenen Vierecks bilden ein Polardreieck in Bezug auf den Kegelschnitt, nämlich ein Dreieck, in welchem jede Ecke die Gegenseite zur Polare hat (vgl. § 118). Die erste Ecke eines Polardreiecks kann man völlig willkürlich wählen, die zweite noch in der Polare des ersten beliebig, die dritte aber ist dann als der Schnittpunkt der Polaren von jenen bestimmt. Dafs somit dreifach unendlich viele Polardreiecke möglich sind, bestätigt man analytisch dadurch, dafs zwischen den sechs Coordinaten der drei Punktepaare $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$; $x_2 | y_2$, $x_3 | y_3$; $x_3 | y_3$, $x_1 | y_1$ je die symmetrische Bedingungsgleichung bestehen mufs.

Jedes Polardreieck einer Centralcurve (§ 147), dessen eine Ecke das Centrum selbst ist, hat zur Gegenseite die unendlich ferne Gerade und zu Nachbarseiten zwei conjugirte Durchmesser (§ 150). Die Richtungen conjugirter Durchmesser sind also conjugirte Pole.

Die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks geben eine geometrische Definition der Beziehung zwischen conjugirten Polen. Da jede Seite (z. B. AB) durch den Diagonalpunkt (F) und die Verbindungsgerade (OE) der beiden andern harmonisch geteilt wird, so ist *jeder Punkt der Polare*

conjugirt harmonisch zu ihrem Pol in Bezug auf die beiden Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden mit der Curve. Daher werden conjugirte Pole genauer als (*conjugirt-*) *harmonische Pole* oder als durch die Curve harmonisch getrennte Punkte bezeichnet.

Von jedem Polardreieck eines reellen Kegelschnittes befindet sich eine Ecke innerhalb, zwei Ecken aufserhalb desselben. Denn, nehmen wir den ersten Pol aufserhalb an, so sind die beiden andern harmonisch getrennt durch die notwendig reellen Schnittpunkte der Polare des ersten mit der Curve, also liegt einer von ihnen im Innern. Liegt aber schon der erste im Inneren, so liegen die beiden andern im Äufseren, da die Polare von jenem die Curve nicht reell trifft.

Nun entspricht aber das vollständige Vierseit (§ 64. 1)) dem Viereck dualistisch (§ 79): jeder Winkel an einer Ecke (z. B. EA, EB) wird durch die Diagonale (EF) und die Verbindungsgerade mit dem Schnittpunkt (O) der beiden andern harmonisch geteilt. Besteht das Vierseit aus den Tangenten AB, CD, AC, BD eines Kegelschnittes, so liegt der harmonische Pol einer Diagonale EF einerseits auf EO, anderseits auf FO, ist also O. *In jedem umgeschriebenen* (*oder Tangenten-*) *Vierseit des Kegelschnittes ist jede Diagonale die Polare des Schnittpunktes der beiden andern.* In dem durch die Diagonalen gebildeten Dreiseit hat also jede Seite die Gegenecke zum Pol. In diesem Sinn kann also auch jedes Polardreieck ein Polardreiseit genannt werden. Von einem reellen Kegelschnitt werden stets zwei Seiten reell, die dritte imaginär geschnitten und von der Gegenecke der letzteren gehen imaginäre, von denen der ersteren reelle Tangenten an ihn.

Somit ergibt sich, dafs eine Gerade OR (Fig. § 157) durch die beiden von O ausgehenden Tangenten OT, OT' des Kegelschnittes*) von der Geraden, welche O mit dem

*) Um diese Tangenten zu ziehen, bestimme man ihre Berührungspunkte als die Schnittpunkte der Curve mit der Polare von O, construire also zuerst diese nach § 158.

Pole P von OR verbindet, harmonisch getrennt ist. *Daher heifsen zwei Geraden, welche mit den Tangenten aus ihrem Schnittpunkt eine harmonische Gruppe bilden, conjugirte oder (conjugirt-) harmonische Polaren.* Es ist sehr zu beachten, dafs alle Sätze der Polarentheorie des Kegelschnittes auch ihre dualistischen Umformungen zulassen (vgl. § 163).

160. **Harmonische Pole.** Die harmonischen Beziehungen zwischen Pol und Polare müssen sich der Natur der Sache nach ganz direct entwickeln lassen, wenn man von der Grundaufgabe ausgeht, das Teilverhältnis $n_1 : n_2$ zu suchen, in welchem die Verbindungsgerade zweier Punkte $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ durch die Curve geschnitten wird (vgl. § 51). Zu diesem Zweck hat man nur die nach § 13 bestimmten Coordinaten $\frac{n_2 x_1 + n_1 x_2}{n_1 + n_2} \Big| \frac{n_2 y_1 + n_1 y_2}{n_1 + n_2}$ eines solchen Teilpunktes statt $x | y$ in die Curvengleichung einzusetzen. Zur Berechnung der beiden Teilverhältnisse erhält man die in $n_1 : n_2$ quadratische Gleichung

$$\begin{gathered} n_1^2 \{ a_{11} x_2^2 + 2 a_{12} x_2 y_2 + a_{22} y_2^2 + 2 a_{13} x_2 + 2 a_{23} y_2 + a_{33} \} + \\ 2 n_1 n_2 \{ a_{11} x_1 x_2 + a_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + a_{22} y_1 y_2 + a_{13}(x_1 + x_2) + a_{23}(y_1 + y_2) + a_{33} \} \\ + n_2^2 \{ a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 y_1 + a_{22} y_1^2 + 2 a_{13} x_1 + 2 a_{23} y_1 + a_{33} \} = 0. \end{gathered}$$

Dieser Ansatz führt unmittelbar zur *Gleichung des Tangentenpaares,* welches von irgend einem Punkt $x_1 | y_1$ an die Curve geht (vgl. § 156). Denn, wenn $x_2 | y_2$ in einer Tangente durch $x_1 | y_1$ liegt, so mufs die Gleichung für $n_1 : n_2$ gleiche Wurzeln ergeben. Das Verschwinden ihrer Discriminante gibt aber für $x_2 | y_2$ die Gleichung

$$\begin{gathered} \{ a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 y_1 + a_{22} y_2^2 + 2 a_{13} x_1 + 2 a_{23} y_1 + a_{33} \} \times \\ \{ a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} \} = \\ \{ a_{11} x_1 x + a_{12}(x_1 y + y_1 x) + a_{22} y_1 y + a_{13}(x_1 + x) + a_{23}(y_1 + y) + a_{33} \}^2, \end{gathered}$$

aus der schon die Gleichung der Berührungssehne zu folgern ist.

Dieselbe erhält man aber, wenn man verlangt, dafs die Teilverhältnisse entgegengesetzt gleich ($\pm n_1 : n_2$), dafs also die Summe der Wurzeln oder der Coefficient von $n_1 n_2$ verschwinde. Somit drückt die Gleichungsform des § 155 aus:

Der Ort eines Punktes, der vom Pol durch die Curve harmonisch getrennt wird, ist die Polare; und die Enveloppe einer Geraden, die von der Polare durch die Curve harmonisch getrennt wird, ist ihr Pol.

Es ist nützlich zu beachten, wie die Eigenschaften von Centrum, Durchmessern und Asymptoten aus dieser Definition dadurch hervorgehen, dafs die Halbirung als ein specieller Fall der harmonischen Teilung behandelt wird (§ 14).

B. 1) Das Centrum ist derjenige Punkt, dessen Polare unendlich fern ist, denn auf allen Sehnen mufs er zu den unendlich fernen Punkten harmonisch sein. Analytisch ergibt die Bedingung, dafs sich die Gleichung der Polare auf $a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33} = 0$ (eine Constante $= 0$) reducire, die zur Bestimmung des Centrums dienenden Gleichungen (§ 147).

2) Jeder Durchmesser ist die Polare der Richtung des conjugirten Durchmessers, denn er halbirt die zu diesem parallelen Sehnen.

3) Das Segment auf einer Parallelen zur Polare eines Punktes, welches zwischen den von ihm aus an die Curve gehenden Tangenten liegt, wird von seinem Durchmesser halbirt, denn die Polare jedes Punktes zu einem Durchmesser ist zum conjugirten Durchmesser parallel.

4) Das zwischen den Asymptoten liegende Segment einer Tangente wird im Berührungspunkt halbirt, denn die Asymptoten werden durch jedes Paar conjugirter Durchmesser harmonisch getrennt. Es ist nur ein Specialfall von Tangenten und harmonischen Polaren (§ 159).

161. **Linke Seite der Curvengleichung.** Handelt es sich nicht um Teilverhältnisse, sondern um in den Secanten gemessene Längen, so geht man am besten auf die Polargleichung des § 144 zurück. Nach derselben ist das Product der in einer den Nullpunkt O enthaltenden Sehne $R'R''$ (Fig. § 157) gemessenen Vectoren von dem Neigungswinkel ϑ (oder $\vartheta + \pi$)

$$OR' \cdot OR'' = \frac{a_{33}}{a_{11}\cos^2\vartheta + 2a_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta + a_{22}\sin^2\vartheta}.$$

Wenn durch einen Punkt O zwei Sehnen OR, OS gezogen werden, die die Curve in den Punkten R', R''; S', S'' schneiden, so ist das Verhältnis $OR' \cdot OR'' : OS' \cdot OS''$

der Rechtecke aus den durch die Curve gebildeten Abschnitten

dieser Sehnen für jede Lage des Punktes O das nämliche, sobald die Richtungen der Sehnen OR, OS dieselben bleiben. Denn, haben OR, OS die Neigungswinkel ϑ, ϑ', so ist

$$\frac{OR'\cdot OR''}{OS'\cdot OS''}=\frac{a_{11}\cos^2\vartheta'+2a_{12}\cos\vartheta'\sin\vartheta'+a_{22}\sin^2\vartheta'}{a_{11}\cos^2\vartheta+2a_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta+a_{22}\sin^2\vartheta}.$$

Nun bleiben aber die Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} in der allgemeinen Gleichung unverändert, wenn die Axen nach einem neuen Anfangspunkt verlegt werden (§ 142) und ϑ, ϑ' constant sind, d. h. die Sehnen ihre Richtung beibehalten. Also ist der Satz bewiesen.

Der Satz kann auch so ausgesprochen werden: *Wenn durch zwei feste Punkte O und O_1 irgend zwei Parallele OR und O_1R_1 gezogen werden, so ist das Verhältnis der Rechtecke*

$$OR'\cdot OR'':O_1R_1'\cdot O_1R_1''$$

constant, welches auch die Richtung dieser Sehnen sei. Denn diese Rechtecke sind

$$\frac{a_{33}}{a_{11}\cos^2\vartheta+2a_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta+a_{22}\sin^2\vartheta},\quad\frac{a_{33}'}{a_{11}\cos^2\vartheta+2a_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta+a_{22}\sin^2\vartheta},$$

wenn a_{33}' der Wert ist, welchen das absolute Glied der allgemeinen Gleichung annimmt, indem man den Anfangspunkt der Coordinaten von O nach O_1 verlegt. Das Verhältnis dieser Rechtecke ist daher $= a_{33} : a_{33}'$ und somit von ϑ unabhängig.

Erinnert man sich nun des Bildungsgesetzes von a_{33}', so kann man sagen: *Die Substitutionsresultate der Coordinaten $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ von Punkten O_1, O_2 ... in die linke Seite der Gleichung eines Kegelschnittes sind proportional den Rechtecken aus den Segmenten in durch O_1, O_2, ... gezogenen parallelen Sehnen.* Der Proportionalitätsfactor ist gleich dem constanten Glied dividirt durch das Rechteck der Segmente in der Parallelen durch den Nullpunkt O. Wir erkennen wieder, dafs für $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$, d. h. in einem Kreise jenes Segmentenproduct von der Richtung unabhängig ist. Man kann dagegen durch das Segmentenproduct einen analogen Potenzbegriff wie in § 114 für allgemeine Kegelschnitte *nicht* aufstellen.

Aus dem Zusatz zu § 19, wonach Substitutionsresultate von gleichem Vorzeichen Punkten O_1, O_2, ... desselben Ge-

bietes entsprechen, folgt, dafs zugleich auch die Segmentenproducte in Parallelen übereinstimmende Vorzeichen haben. In einem gegebenen Gebiet sind die Vorzeichen der Substitutionsresultate und der Segmentenproducte gleich oder entgegengesetzt, je nachdem der Proportionalitätsfactor positiv oder negativ ist. Jede reelle Tangente liegt daher ganz in dem Gebiet, dessen Segmentenproducte in Parallelen zu ihr positiv sind, denn für Punkte der Tangente werden dieselben zu Quadraten.

162. Der Satz des vorigen § schliefst verschiedene specielle Fälle ein, für welche die besonderen Ausdrucksformen wichtig sind.

I. Ist O_1 das Centrum der Curve, so ist $O_1R_1' = O_1R_1''$, und die Gröfse $OR' \cdot RO''$ wird das Quadrat des zu O_1R_1 parallelen Halbmessers. *Also verhalten sich die Rechtecke aus den Abschnitten in zwei sich schneidenden Sehnen zu einander wie die Quadrate der zu diesen Sehnen parallelen Durchmesser.*

II. Wird die Sehne OR zur Tangente, so ist $OR' = OR''$ und $OR' \cdot OR''$ das Quadrat der Tangente. Aus dem eben gefundenen Verhältnis der Quadrate folgt aber, *dafs die Längen der durch einen Punkt gezogenen Tangenten sich zu einander verhalten wie die Längen der Durchmesser, zu welchen sie parallel sind.*

III. Ist die Linie OO_1 ein Durchmesser und OR, O_1R_1 parallel zu seinen Ordinaten, so ist $R'O = OR''$, $R_1'O_1 = O_1R_1''$. Schneidet der Durchmesser die Curve in den Punkten A', A'', so ist also $OR'^2 : A'O \cdot OA'' = O_1R_1'^2 : A'O_1 \cdot O_1A''$, d. h. *die Quadrate der Ordinaten irgend eines Durchmessers sind den Rechtecken aus den Segmenten proportional, welche sie im Durchmesser bestimmen.*

Es gibt aber einen Fall, in welchem der Satz des § 161 nicht länger gültig bleibt, nämlich wenn die Sehne OS parallel zu einer Asymptote der Curve ist. Denn das Rechteck wird mit dem Segment OS'' unendlich, und OS schneidet die Curve nur in *einem* endlichen Punkt S'. Wir prüfen nun die naheliegende Vermutung, ob in diesem Fall das Verhältnis $OS' : OR' \cdot OR''$ constant ist.

Nehmen wir zur gröfseren Einfachheit OS zur x-Axe und OR zur y-Axe. Weil die x-Axe parallel zu einer der Asymptoten ist, so ist $a_{11} = 0$ (§ 146. 3)) und die Gleichung der Curve demnach von der Form

$$2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Indem wir $y = 0$ machen, wird der Abschnitt in der x-Axe gefunden $OS' = -a_{33} : 2a_{13}$, und indem wir $x = 0$ machen, das Rechteck unter den Abschnitten in der y-Axe gleich $a_{33} : a_{22}$. Also ist $OS' : OR' \cdot OR'' = -a_{22} : 2a_{13}$. Wenn wir nun zu irgend andern parallelen Axen transformiren, so bleibt a_{22} unverändert, und das neue a_{13} wird gleich $a_{12}y' + a_{13}$. Also verändert sich jenes Verhältnis $-\frac{a_{22}}{2a_{13}}$ in $-\frac{a_{22}}{2(a_{12}y' + a_{13})}$, bleibt im allgemeinen daher nur constant, so lange y' constant ist. *Also sind die durch zwei parallele Sehnen einer Hyperbel in einer Parallelen zu einer Asymptote gebildeten Abschnitte proportional den Rechtecken unter den Segmenten.*

Wenn die Curve aber eine Parabel ist, so ist $a_{12} = 0$, und das Verhältnis immer constant: *Wenn in einer Parabel eine Gerade irgend einen Durchmesser schneidet, so steht das Rechteck unter den in ihr bestimmten Segmenten zu dem durch sie im Durchmesser gebildeten Abschnitt in constantem Verhältnis, so lange ihre Richtung dieselbe bleibt.*

163. **Tangentialgleichung.** *Unter welcher Bedingung berührt die Gerade $\xi x + \eta y + \zeta = 0$ den durch die allgemeine Gleichung dargestellten Kegelschnitt?*

Indem wir y aus $\xi x + \eta y + \zeta = 0$ entnehmen und in die allgemeine Gleichung einsetzen, finden wir die Abscissen der Schnittpunkte dieser Linie mit der Curve durch die Gleichung bestimmt

$$(a_{11}\eta^2 - 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\xi^2)x^2 + 2(a_{13}\eta^2 - a_{12}\eta\zeta - a_{23}\xi\eta + a_{22}\zeta\xi)x$$
$$+ (a_{33}\eta^2 - 2a_{23}\eta\zeta + a_{22}\zeta^2) = 0.$$

Wenn die Gerade die Curve berührt, so mufs diese quadratische Gleichung gleiche Wurzeln haben, oder die Bedingung

$$(a_{11}\eta^2 - 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\xi^2)(a_{33}\eta^2 - 2a_{23}\eta\zeta + a_{22}\zeta^2)$$
$$= (a_{13}\eta^2 - a_{12}\eta\zeta - a_{23}\xi\eta + a_{22}\zeta\xi)^2$$

erfüllt sein. Indem wir ausmultipliciren, wird diese Gleichung durch η^2 dividirbar und kann geschrieben werden:

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\xi^2 + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)\eta^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\zeta^2 + 2(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})\eta\zeta + 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\zeta\xi + 2(a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12})\xi\eta = 0.$$

Diese Gleichung heifst die Tangentialgleichung des Kegelschnittes $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, weil jede Tangente desselben sie durch die Coefficienten ihrer Gleichung oder ihre Liniencoordinaten (§ 75) ξ, η, ζ befriedigen mufs. Abkürzend schreiben wir sie in der Form
$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33}\zeta^2 + 2A_{23}\eta\zeta + 2A_{13}\zeta\xi + 2A_{12}\xi\eta = 0$,
welche genau dualistisch (§ 79) der Form

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{23}y + 2a_{13}x + 2a_{12}xy = 0$$

entspricht. Man erhält die Coefficienten derselben

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2 \text{ etc.,} \quad A_{23} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} \text{ etc.}$$

am einfachsten durch folgende Regel: Sei (vgl. § 87. 2))

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

die *Discriminante der Gleichung zweiten Grades* in ihrer Determinantenform, so sind die A_{ij} die den Elementen derselben entsprechenden Unterdeterminanten; oder es sind A_{11}, A_{22}, A_{33} die derivirten Functionen von $\mathbf{D}$ in Bezug auf a_{11}, a_{22}, a_{33} bez. als Veränderliche, $2A_{23}$, $2A_{13}$, $2A_{12}$ die Derivirten von $\mathbf{D}$ in Bezug auf a_{23}, a_{13}, a_{12}.

In dieser Bezeichnung sind z. B. die Coordinaten des Centrums (§ 147) $A_{13} : A_{33} \mid A_{23} : A_{33}$.

Es sei hier nur darauf hingewiesen, dafs diese Gleichartigkeit der Darstellung einer Curve zweiten Grades in Punkt- und in Liniencoordinaten die analytische Begründung der schon in der Polarentheorie hervorgehobenen dualistischen Beziehungen an derselben ergibt. Da insbesondere die Tangentialgleichung wiederum vom zweiten Grade ist, so nennt man den Kegelschnitt auch eine *Curve zweiter Classe* (§ 76). Wenn aber die Ordnung und die Classe einer Curve übereinstimmen, spricht man vom *Grade* derselben (§ 141 Anm.).

Neuntes Kapitel.

Die Centraleigenschaften von Ellipse und Hyperbel.

---

164. **Centralgleichung.** In der Untersuchung der Eigenschaften der *Centralcurven zweiten Grades*, also (§ 147) der Ellipse und Hyperbel werden unsere Gleichungen durch die Voraussetzung wesentlich vereinfacht, dafs das Centrum mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt.

Wir sahen in § 142, dafs durch diese Transformation die allgemeine Gleichung zweiten Grades die Form annimmt

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33}' = 0.$$

Dabei ist a_{33}' das Resultat der Substitution der Coordinaten $x_0 | y_0$ des Centrums in die linke Seite der ursprünglichen Gleichung. Die Berechnung dieser Gröfse wird erleichtert, indem man sie in der Form des § 153 schreibt

$$a_{33}' = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x_0 + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y_0 + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}.$$

Die ersten beiden Glieder müssen für die Coordinaten des Centrums gleich Null werden und das letzte wird nach § 147:

$$a_{33}' = a_{13}\frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} + a_{23}\frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} + a_{33}$$

$$= \frac{a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{\mathbf{D}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},$$

wenn $\mathbf{D}$ die Discriminante der gegebenen Gleichung bedeutet (§§ 156. 163). Somit können wir die *Centralgleichung* sofort explicit schreiben.

Hieraus ergibt sich wiederum, dafs die Bedingung $\mathbf{D} = 0$ die in ein Linienpaar zerfallende Curve zweiten Grades

charakterisirt (§ 59). Denn nur dann reducirt sich die obige Gleichung auf die homogene Form (§ 54)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0,$$

welche, je nachdem $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ negativ bez. positiv ist, ein reelles bez. imaginäres Linienpaar vom Doppelpunkt in O darstellt. Dieselben sind also Grenzfälle von Hyperbeln bez. Ellipsen, brauchen aber im folgenden nicht besonders berücksichtigt zu werden. Daher wird stets **D** von Null verschieden gedacht.

B. 1) $3x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 6y - 3 = 0$, zum Centrum $\frac{7}{2} \mid -4$ transformirt, lautet $12x^2 + 16xy + 4y^2 + 1 = 0$.

2) $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$, zum Centrum $-3 \mid -1$ transformirt, lautet $x^2 + 2xy - y^2 = 22$.

165. **Axengleichung.** Wenn man die Transformation des Coordinatenanfangs nach dem Centrum der Curve mit der Wahl zweier beliebigen conjugirten Durchmesser zu Coordinatenaxen verbindet, so verschwindet nach § 150 auch das Glied $a_{12}xy$ aus der Gleichung, und die allgemeine Gleichung zweiten Grades reducirt sich auf die Form

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33} = 0,$$

welche nur die Quadrate der Coordinaten enthält und die Eigenschaft conjugirter Durchmesser in Evidenz setzt *(Durchmessergleichung)*. Da es für jede Curve zweiten Grades ein Paar conjugirte Durchmesser gibt, welche rechtwinklig zu einander sind, nämlich die *Axen der Curve* (§ 151), so ist auch *die Axengleichung* der Kegelschnitte von obiger Form.

Die dort erhaltenen Resultate ergeben sich auch durch eine Coordinatentransformation von einem Paar rechtwinkliger Axen, für das $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$ die Centralgleichung der Curve ist, zu einem andern Paar solcher Axen, welchem der Wert $a'_{12} = 0$ entspricht. Denn nach der einer Drehung um den Winkel ϑ entsprechenden Substitution des § 11 wird die Gleichung

$$a_{11}(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)^2 + 2a_{12}(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)(x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)$$
$$+ a_{22}(x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)^2 + a_{33} = 0,$$

und die neuen Coefficienten sind

$$a'_{11} = a_{11} \cos^2 \vartheta + 2 a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta,$$
$$a'_{12} = a_{22} \sin \vartheta \cos \vartheta + a_{12} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) - a_{11} \sin \vartheta \cos \vartheta,$$
$$a'_{22} = a_{11} \sin^2 \vartheta - 2 a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \cos^2 \vartheta.$$

Der gemachten Voraussetzung $a'_{12} = 0$ entspricht also dieselbe Bedingungsgleichung wie in § 151 für ϑ, nämlich

$$\tan 2\vartheta = \tan 2\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Der hieraus resultirende Wert von ϑ ist in die Ausdrücke für a'_{11}, a'_{22} einzusetzen.

166. **Constanten der Transformation bei rechtwinkligen Coordinaten.** Ist die vorgelegte Gleichung eines Centralkegelschnittes in rechtwinkligen Coordinaten zu den Axen der Curve selbst zu transformiren, d. h. auf die Form zu bringen $a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33} = 0$, so ist a'_{33} nach § 164 bekannt, die numerische Berechnung von a'_{11}, a'_{22} aber wird durch folgenden Satz wesentlich erleichtert:

Bei der Transformation einer Gleichung zweiten Grades von einem Paar rechtwinkliger Axen zu einem andern bleiben die Gröfsen $a_{11} + a_{22}$ *und* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ *unverändert.* Dies ist so zu verstehen, dafs auch die in den transformirten Coefficienten geschriebenen nämlichen Gröfsen $a'_{11} + a'_{22}$ und $a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}$ die alten Werte behalten. Diese Constanten werden wir später als *Invarianten* dieser Transformationen bezeichnen.

Der erste Teil des Satzes wird unmittelbar bewiesen, indem man die Werte a'_{11}, a'_{22} (§ 165) addirt und findet

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}.$$

Um den zweiten Teil zu beweisen, schreiben wir jene Werte in den folgenden Formen:

$$2a'_{11} = a_{11} + a_{22} + 2a_{12} \sin 2\vartheta + (a_{11} - a_{22}) \cos 2\vartheta,$$
$$2a'_{22} = a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \sin 2\vartheta - (a_{11} - a_{22}) \cos 2\vartheta.$$

Daraus folgt

$$4a'_{11}a'_{22} = (a_{11} + a_{22})^2 - \{2a_{12} \sin 2\vartheta + (a_{11} - a_{22}) \cos 2\vartheta\}^2;$$

aber es ist $4a_{12}'^2 = \{2a_{12}\cos 2\vartheta - (a_{11} - a_{22})\sin 2\vartheta\}^2$; daher
$$4(a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2) = (a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{12}^2 - (a_{11} - a_{22})^2 = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2).$$

Da nun insbesondere in der Axengleichung $a_{12}' = 0$ ist, so sind die neuen Coefficienten mit den alten durch die Bedingungsgleichungen verbunden
$$a_{11}' + a_{22}' = a_{11} + a_{22}, \quad a_{11}'a_{22}' = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$
Diese Bedingungen liefern das Product und die Summe der neuen Coefficienten a_{11}', a_{22}'. Daher können sie als die Wurzeln*) c einer quadratischen Gleichung berechnet werden, deren Coefficienten bekannt sind:
$$c^2 - (a_{11} + a_{22})c + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$
Setzen wir $R^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$, so lautet die fertige Axengleichung der gegebenen Curve stets reell
$$(a_{11} + a_{22} - R)x^2 + (a_{11} + a_{22} + R)y^2 + \frac{2D}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = 0.$$

B. 1) Die Axen der Ellipse $14x^2 - 4xy + 11y^2 = 60$ sind $4x^2 + 6xy - 4y^2 = 0$ oder $(2x - y)(x + 2y) = 0$.

Wir haben $a_{11}' + a_{22}' = 25$, $a_{11}'a_{22}' = 150$; also $a_{11}' = 10$, $a_{22}' = 15$; die transformirte Axengleichung ist $2x^2 + 3y^2 = 12$.

2) Die Transformation der Hyperbel
$$11x^2 + 84xy - 24y^2 = 156$$
zu den Axen ergibt, wegen $a_{11}' + a_{22}' = -13$, $a_{11}'a_{22}' = -2028$, $a_{11}' = 39$, $a_{22}' = -52$ und $3x^2 - 4y^2 = 12$.

167. *Wie ist aber die Axengleichung herzustellen, wenn die Centralgleichung der Curve in schiefwinkligen Coordinaten gegeben ist?* Offenbar kann diese Transformation bewerkstelligt werden, indem man zuerst in der einfachsten Weise zu rechtwinkligen Coordinaten übergeht und dann nach § 166 verfährt.

Nun geschieht der Übergang von rechtwinkligen Coordinaten zu schiefwinkligen vom Axenwinkel ω unter Beibehaltung der x-Axe dadurch, dafs man (§ 11) $x' = x + y\cos\omega$, $y' = y\sin\omega$ in die accentuirte Gleichung einsetzt. So erhalten wir die Bedingungen

*) Natürlich bleibt beliebig, welche Axe als x- oder y-Axe zu nehmen ist.

$$a_{11} = a'_{11}, \quad a_{12} = a'_{11} \cos \omega + a'_{12} \sin \omega,$$
$$a_{22} = a'_{11} \cos^2 \omega + 2 a'_{12} \cos \omega \sin \omega + a'_{22} \sin^2 \omega;$$

aus denselben sind die neuen Werte von $a'_{11} + a'_{22}$ und $a'_{11} a'_{22} - a'^2_{12}$ zu ermitteln. Man findet

$$a'_{11} + a'_{22} = \frac{a_{11} + a_{22} - 2 a_{12} \cos \omega}{\sin^2 \omega}, \quad a'_{11} a'_{22} - a'^2_{12} = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{\sin^2 \omega}$$

und hat nur $a'_{12} = 0$ zu setzen, um in a'_{11}, a'_{22} die Coefficienten der Axengleichung zu erkennen. Sie sind die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren Auflösung mittelst $R^2 = (a_{11} - a_{22})^2 \sin^2 \omega + (2 a_{12} - (a_{11} + a_{22}) \cos \omega)^2$ als die Axengleichung ergibt $0 =$

$$(a_{11} + a_{22} - 2 a_{12} \cos \omega - R) x^2 + (a_{11} + a_{22} - 2 a_{12} \cos \omega + R) y^2 + 2 a'_{33} \sin^2 \omega.$$

Die vorigen Transformationsformeln lassen noch einen andern Gebrauch zu, nämlich aus der Gleichung der Curve in beliebigen rechtwinkligen Coordinaten die auf irgend zwei conjugirte Durchmesser bezogene Gleichung abzuleiten. Nimmt man $a_{12} = 0$, a_{11}, a_{22} als gesucht an, so hat man nur die Gleichung aufzulösen

$$\frac{c^2}{\sin^2 \omega} - (a'_{11} + a'_{22}) c + a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Die Erwägung, dafs die Transformationen dieses und des letzten Paragraphen jede beliebige Änderung der Coordinatenaxen bei festem Nullpunkt erlauben, lehrt, dafs die beiden vorstehend gefundenen Coefficientenverbindungen bei allen solchen Umformungen unveränderlich sind. Doch sei im folgenden ein directer allgemeiner Beweis angeschlossen.

B. 1) Lautet die Gleichung der Curve unter der Voraussetzung $\cos \omega = \frac{3}{5}$ $10x^2 + 6xy + 5y^2 = 10$, so ist, wegen $a_{11} + a_{22} = \frac{285}{16}$, $a_{11} a_{22} = \frac{1025}{16}$, folglich $a_{11} = 5$, $a_{22} = \frac{205}{16}$, die zu den Axen transformirte Gleichung $16x^2 + 41y^2 = 32$.

2) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$ zu den Axen transformirt, für $\omega = 60^0$, gibt $x^2 - 15y^2 = 3$.

* 168. **Constanten der allgemeinen Transformation der Centralgleichung.** Angenommen, dafs eine Gleichung für Axen, welche den Winkel ω mit einander bilden, zu anderen unter dem Winkel ω' geneigten Axen transformirt werden

soll, und dafs dabei durch die Substitution des § 10 die Gröfse $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ in $a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2$ übergehe, so mufs doch immer durch die nämliche Substitution

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2 \quad \text{in} \quad x'^2+2x'y'\cos\omega'+y'^2$$

übergeführt werden, weil die eine wie die andere Function die bei der Transformation unverändert gebliebene Entfernung eines Punktes von O repräsentirt (§ 10. 2)). Somit mufs auch

$$\begin{aligned} & a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\lambda(x^2+2xy\cos\omega+y^2) \\ = & a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+\lambda(x'^2+2x'y'\cos\omega'+y'^2) \end{aligned}$$

sein, für jeden Wert von λ.

Wenn wir nun λ so bestimmen, dafs die linke Seite der Gleichung ein vollkommenes Quadrat ist, so mufs die rechte Seite auch ein vollkommenes Quadrat sein, denn, gleich Null gesetzt würden die beiden Seiten ein Paar zusammenfallender Linien darstellen. Aber die Bedingung, unter welcher erstere ein vollkommenes Quadrat wird, ist

$$(a_{11}+\lambda)(a_{22}+\lambda)=(a_{12}+\lambda\cos\omega)^2,$$

oder λ mufs eine Wurzel der Gleichung sein

$$\lambda^2\sin^2\omega+(a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega)\lambda+a_{12}a_{22}-a_{12}{}^2=0.$$

Wir erhalten eine zweite quadratische Gleichung von derselben Form zur Bestimmung der Werte von λ, die die andere Seite der Gleichung zu einem vollkommenen Quadrat machen; aber weil beide Seiten für dieselben Werte von λ vollkommene Quadrate werden sollen, so müssen diese beiden Bestimmungsgleichungen identisch sein, d. h. in ihren correspondirenden Coefficienten übereinstimmen. Es ergibt sich also

$$\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega}=\frac{a'_{11}+a'_{22}-2a'_{12}\cos\omega'}{\sin^2\omega'},$$

$$\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2}{\sin^2\omega}=\frac{a'_{11}a'_{22}-a'_{12}{}^2}{\sin^2\omega'}.$$

Wenn man also die Centralgleichung von irgend einem Paar von Durchmessern als Coordinatenaxen zu einem andern transformirt, so sind die Coefficientenfunctionen

$$\frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega} \text{ und } \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\sin^2\omega}$$

*unveränderlich**).

Hieraus folgt unter der Voraussetzung $a_{12} = 0$, $a'_{12} = 0$: *Zwischen den auf verschiedene Paare conjugirter Durchmesser bezogenen Formen der Centralgleichung besteht die Relation*

$$\frac{a_{11} + a_{22}}{a'_{11} + a'_{22}} = \frac{a_{11}a_{22}}{a'_{11}a'_{22}} = \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\omega'}.$$

Hieraus folgt unmittelbar: Je nachdem a_{11}, a_{22} gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben, weisen auch a'_{11}, a'_{22} das nämliche oder verschiedene Vorzeichen auf.[34])

169. **Normalgleichungen der Centralkegelschnitte.** Die Durchmessergleichung eines Centralkegelschnittes

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0,$$

stellt eine Ellipse oder eine Hyperbel dar (§ 145), je nachdem $a_{11}a_{22} > 0$ oder $a_{11}a_{22} < 0$ ist; insbesondere ist die Curve imaginär (§ 146), wenn a_{11}, a_{22}, a_{33} dasselbe Vorzeichen haben. Die Abschnitte der Curve in den Coordinatenaxen, d. h. die in denselben gemessenen conjugirten Halbmesser sind

$$x = \sqrt{-\frac{a_{33}}{a_{11}}} \text{ und } y = \sqrt{-\frac{a_{33}}{a_{22}}}.$$

Da a_{33} von Null verschieden ist (§ 164), können wir die Gleichung von einem willkürlichen Factor durch die Annahme $a_{33} = -1$ befreien. Alsdann entsteht eine reelle Ellipse, falls a_{11} und a_{22} positive Werte haben. Ihre Abschnitte in den Coordinatenaxen sind reell und man pflegt den gröſseren mit a, den kleineren mit b zu bezeichnen, als x-Axe aber den gröſseren Durchmesser zu wählen. So entsteht durch die Substitution $1 : a_{11} = a^2$, $1 : a_{22} = b^2$ *die Normalgleichung der reellen Ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

---

*) Die geometrische Deutung dieser Constanten folgt in § 184. Später werden wir für die Zähler der Ausdrücke auch die Bezeichnung Invarianten kennen lernen. Als dritte Constante wäre hinzuzufügen $\mathsf{D} : \sin^2\omega$.

Die Gleichung der Hyperbel unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen *eines* Coefficienten, und zwar nimmt man gewöhnlich a_{22} negativ an und setzt $1 : a_{22} = -b^2$. Man wählt also als x-Axe diejenige, auf welcher die Hyperbel die reellen Abschnitte $\pm a$ bildet. Dann kann der conjugirte Durchmesser die Hyperbel nicht auch reell schneiden, sondern das Quadrat seines Halbmessers ist negativ gleich $-b^2$. Über das Gröfsenverhältnis von a und b kann man dann keine Voraussetzung mehr machen. Somit ist *die Normalgleichung der Hyperbel*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Endlich ergibt sich bei negativem a_{11} und a_{22} oder $-a^2$ und $-b^2$ als den Quadraten conjugirter Halbmesser, *die Normalgleichung des imaginären Kegelschnittes* als

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jedoch beschäftigen wir uns in diesen Kapiteln nur mit den *reellen* Centralcurven.

Die obigen Gleichungsformen gelten, sobald die Coordinaten rechtwinklig sind, auch als *die normalen Axengleichungen der Centralkegelschnitte.*

170. **Normale Polargleichungen.** Setzen wir in die Axengleichung $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$ ein $a_{33} = -1$, $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$, so entsteht die Polargleichung

$$\frac{1}{r^2} = a_{11} \cos^2 \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta.$$

Sie läfst die Symmetrie der Curven darin erkennen, dafs sie denselben positiven Wert des Vectors zu je vier Winkeln $\pm \vartheta$, $\pi \pm \vartheta$ liefert. Man pflegt dann die stets positiven Gröfsen

$$\frac{1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{22}} = c^2, \quad a_{11}c^2 = e^2$$

einzuführen und e *die Excentricität der Curve* zu nennen*).

*) Man hat zuweilen auch *beide* Gröfsen durch den Namen der Excentricität bezeichnet, und c von e als die *lineare* von der *numerischen Excentricität* unterschieden.

Demnach ergeben sich aus den Gleichungen

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}, \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} - \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}$$

die Excentricitäten als $e = \frac{c}{a}$ mit den Abkürzungen

$c^2 = a^2 - b^2$ für die Ellipse, $\quad c^2 = a^2 + b^2$ für die Hyperbel.

Daher ist die Excentricität der Ellipse kleiner, die der Hyperbel gröfser als Eins.

Die Polargleichung der Ellipse läfst sich in einer der äquivalenten Formen schreiben:

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta} = \frac{a^2b^2}{b^2 + c^2\sin^2\vartheta} = \frac{a^2b^2}{a^2 - c^2\cos^2\vartheta}$$

und in der zumeist gebrauchten *normalen* Form:

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\vartheta} \qquad \left(e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right).$$

Ebenso erscheint *die Polargleichung der Hyperbel* als:

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\vartheta - a^2\sin^2\vartheta} = \frac{a^2b^2}{b^2 - c^2\sin^2\vartheta} = \frac{a^2b^2}{c^2\cos^2\vartheta - a^2}$$

und erhält als *normale* Form:

$$r^2 = \frac{-b^2}{1 - e^2\cos^2\vartheta} \qquad \left(e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}\right).$$

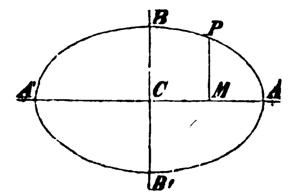
Diese Polargleichungen der beiden Gattungen unterscheiden sich wieder nur im Vorzeichen von b^2.

171. **Gestalt der Ellipse.** Infolge der Symmetrie der Centralkegelschnitte genügt es, das in einem Quadranten des Axenkreuzes verlaufende Curvenstück zu betrachten. Die normale Polargleichung $b^2 : r^2 = 1 - e^2\cos^2\vartheta$ zeigt, dafs $\vartheta = 0$ den gröfsten, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ den kleinsten Wert des Vectors r liefert und zwar gleich a, bez. b. Den gröfsten Durchmesser $2a$ nennt man die *grofse Axe oder Hauptaxe*, den kleinsten $2b$ die *kleine Axe oder Nebenaxe*, a und b die *Halbaxen*, ihre Endpunkte die *Scheitel* der Ellipse.

Alle Halbmesser (Vectoren r) der Ellipse*) sind reell, denn, da die Excentricität e kleiner als Eins ist, so ist

*) Im gegenwärtigen Kapitel werden nur Durchmesser in reellen Geraden betrachtet.

$1 - e^2 \cos^2 \vartheta > 0$. Offenbar nimmt r stetig ab, wenn ϑ von 0 an wächst, d. h. jeder Halbmesser ist um so länger, je weniger seine Richtung von der der grofsen Axe abweicht. Die Tangenten in den Scheiteln einer Axe sind zu ihr senkrecht, als parallel zur conjugirten Axe. Daher ist die Ellipse eine gegen das Centrum hin *concave* Curve von dem hier dargestellten Typus, deren einzelne Punkte nach der Methode des § 19 aufgetragen werden können.



Das endliche Gebiet der Ebene, welches das Centrum enthält, heifst *das Innere der Ellipse.* Setzt man die Coordinaten eines inneren Punktes in die linke Seite der auf Null gebrachten Normalgleichung ein, so erhält sie einen *negativen* Wert, nämlich für das Centrum $0|0$ den Wert -1. Eine reelle Tangente der Ellipse enthält nur äufsere Punkte (§ 161).

Die Axen halbiren die Winkel zwischen gleich langen Durchmessern, und umgekehrt (§ 170). Daher können wir sie bestimmen, wenn das Centrum des Kegelschnittes gegeben ist und wir ihn mit einem concentrischen Kreis schneiden, um in den Durchmessern der Schnittpunkte solche von gleicher Länge zu erhalten.

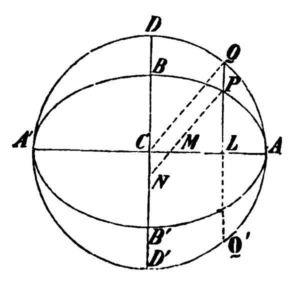
Insbesondere gehen die concentrischen Kreise von den Radien a, bez. b durch die Scheitel der grofsen bez. kleinen Axe, und liegen, zufolge der Polargleichung, ganz aufserhalb bez. innerhalb der Ellipse. Da sie in den gemeinsamen Scheiteln auch dieselben Tangenten haben wie die Curve, so werden sie als *der umgeschriebene und der eingeschriebene Kreis der Ellipse* bezeichnet.

172. **Construction der Ellipse.** Die normale Axengleichung der Ellipse kann in Formen aufgelöst werden, welche die Gestalt der Curve constructiv herstellen lassen:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{und} \quad x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

In dem umgeschriebenen Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ ist nämlich $\sqrt{a^2 - x^2} = y'$ die Ordinate, welche zur Abscisse x gehört.

Die zu demselben x gehörige Ordinate y der Ellipse steht zu y' im Verhältnis $b:a$. Daher hat man folgende *Construction der Ellipse aus dem umgeschriebenen Kreis:* In jeder Senkrechten zur grofsen Axe nehme man einen Punkt P so an, dafs seine Ordinate LP zur Ordinate LQ des umgeschriebenen Kreises in dem constanten Verhältnis der kleinen zur grofsen Axe $b:a$ steht; der Ort von P ist die Ellipse.



Ebenso gehört $\sqrt{b^2 - y^2} = x'$ in dem Kreis $x^2 + y^2 = b^2$ zu gegebenem y und begründet die *Construction der Ellipse aus dem eingeschriebenen* Kreis: In jeder Senkrechten zur kleinen Axe nehme man einen Punkt P so an, dafs seine Ordinate zu der des eingeschriebenen Kreises im Verhältnis der grofsen zur kleinen Axe steht. Überhaupt erhält man aus einem Kreis eine Ellipse, wenn man alle Ordinaten eines Durchmessers in demselben Verhältnis verkleinert oder vergröfsert.

Endlich liefert die Verbindung der beiden Betrachtungen folgende *Construction der Ellipse aus den Axen:* Man verzeichnet die concentrischen Kreise, welche die Axen $2a$, $2b$ zu Durchmessern haben und legt durch je zwei Punkte A, B der beiden Kreise, die auf demselben Durchmesser liegen, je eine Parallele zu der Axe $2b$, $2a$, welche der Durchmesser des andern Kreises ist: die Schnittpunkte dieser Parallelen sind Punkte der Ellipse.

173. **Parametergleichungen der Ellipse.** Die einfache Ableitung der Ellipse aus dem Kreis ist sachgemäfs, weil *der Kreis nur die specielle Ellipse mit gleichen Axen ist,* wie ja die Normalgleichung der Ellipse mit $a = b = \varrho$ in die des Kreises übergeht.

Analytisch ist dieser Zusammenhang dadurch ausgedrückt, dafs, wenn ein Punkt $x \mid y'$ den Kreis $x^2 + y'^2 = a^2$ durchläuft, der Punkt $x \mid y$ die Ellipse $x^2 + \left(\frac{a}{b} y\right)^2 = a^2$ beschreibt, falls stets $y' : y = a : b$ ist. Nun können wir die Coordinaten

$x \mid y'$ eines Punktes des Kreises a nach § 112 durch *einen Parameter* φ darstellen als $x = a\cos\varphi$, $y' = a\sin\varphi$. Daher sind nun auch die Coordinaten $x \mid y$ eines Punktes der Ellipse durch die *eine* unabhängige Veränderliche φ auszudrücken als

$$x = a\cos\varphi, \quad y = \frac{b}{a}\cdot a\sin\varphi = b\sin\varphi.$$

In der Tat überzeugen wir uns davon, dafs durch diese Substitution die Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

identisch erfüllt wird.[35]) Der Parameter φ wird auch als *excentrische Anomalie* bezeichnet.

Wir bestimmen oft mit grofsem Nutzen die Lage eines Punktes in einer Ellipse von gegebenen Axen durch einen einzigen Parameter φ, nämlich als den Punkt $a\cos\varphi \mid b\sin\varphi$. Die geometrische Bedeutung des Parameters φ eines Punktes P der Ellipse wird aber folgendermafsen gefunden: Verlängert man die Ordinate von P bis zum Schnittpunkt Q mit dem umgeschriebenen Kreis, so ist $\sphericalangle ACQ = \varphi$ der Neigungswinkel des Kreisradius von Q.

174. **Ellipsenzirkel.** Wenn durch P eine Parallele NP zum Radius $CQ = a$ gelegt wird, so ist $NP = a$ und $MP : CQ = LP : LQ = b : a$, daher $MP = b$. Wenn also von irgend einem Punkt der Ellipse eine Strecke $PN = a$ bis zur kleinen Axe gezogen wird, so ist der durch die grofse Axe in ihr bestimmte Abschnitt $PM = b$. Würde die Ordinate LP bis zum Schnittpunkt Q' mit dem Kreis rückwärts verlängert, so ergibt sich ebenso, dafs in einer durch P zum Radius CQ' gezogenen Parallelen von den Axen Teile von constanter Länge abgeschnitten werden.

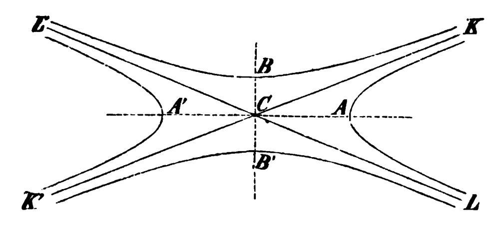
Wenn daher umgekehrt eine Linie MN von constanter Länge sich so bewegt, dafs ihre Endpunkte die Schenkel eines rechten Winkels durchlaufen, und ein Punkt P in ihr fest angenommen ist, so beschreibt P eine Ellipse, deren Axen a, b gleich NP, MP sind. Wirklich ist

$$CM = MN\frac{x}{a},\ CN = MN\frac{y}{b},\ \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2, \text{ also } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Nach diesem Princip ist ein Instrument zur Erzeugung der Ellipse durch eine continuirliche Bewegung construirt worden, welches man den *elliptischen Zirkel* genannt hat. CA, CD' sind zwei feste Lineale, MN ein drittes Lineal, von welchem zwei Punkte M und N in den geraden Linien CA, CD' gleiten; alsdann beschreibt ein in einem beliebigen Punkt von MN befestigter Stift eine Ellipse; wenn der Stift aber im Mittelpunkt von MN befestigt ist, so beschreibt er einen Kreis.[36])

175. **Gestalt der Hyperbel.** Wir untersuchen den Verlauf der durch die Polargleichung $b^2 : r^2 = e^2 \cos^2 \vartheta - 1$ definirten Curve innerhalb des ersten Quadranten. Da die Excentricität e gröfser als Eins ist, kann die rechte Seite positive und negative Werte, auch den Wert Null annehmen. Die absolut gröfsten Werte von $1 : r^2$ liefert $\vartheta = 0$, nämlich a^2, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, nämlich $-b^2$, den Nullwert $\cos^2 \vartheta = 1 : e^2$. Somit ist a der kürzeste reelle, bi der kleinste imaginäre Halbmesser. Man nennt $2a$ die reelle oder transversale Axe oder die *Hauptaxe*, $2bi$ die imaginäre oder *Nebenaxe*. Die Hyperbel hat nur zwei reelle Scheitel, auf der Hauptaxe, in denen die Tangenten zu ihr senkrecht sind.

Nimmt ϑ von 0 an zu, so wächst r stetig mit bis zu einem Wert von ϑ, für welchen $\cos^2 \vartheta = 1 : e^2$ und r unendlich grofs wird. Für alle gröfseren Werte von ϑ innerhalb des ersten Quadranten schneiden die Durchmesser die Curve nicht mehr reell. Der Quadrant der Hyperbel verläuft daher vom Scheitel A



aus, gegen das Centrum hin stets *convex*, gegen einen bestimmten Punkt K im Unendlichen, sich der Asymptote CK stetig mehr nähernd. Der ganze reelle Zug der Hyperbel wird daher von den durch A und A' gehenden, im Endlichen getrennten *Ästen* der Curve gebildet.

Die Hyperbel trennt zwei unendlich grofse Gebiete der

Ebene, die im Endlichen als drei Gebiete erscheinen. Das Centrum liegt in dem Gebiet der Ebene, welches wir *das Äufsere der Hyperbel* nennen müssen, weil von seinen Punkten aus an die Curve reelle Tangenten gehen, nämlich aus dem Centrum selbst die Asymptoten. Die Substitutionsresultate der Coordinaten äufserer Punkte in die auf Null gebrachte Normalgleichung sind negativ (§ 161). Die beiden im Endlichen getrennten, concav begrenzten Gebiete bilden somit das Innere der Hyperbel; sie hängen im Unendlichen als *ein* Gebiet zusammen. Denn da wir uns bei unbegrenzter Bewegung auf einer Geraden in beiderlei Sinn demselben unendlich fernen Punkt nähern, so gehört der unendlich ferne Punkt eines jeden reell schneidenden Durchmessers den beiden Teilen des Inneren zugleich an.

Infolge der Symmetrie folgen wiederum aus zwei gleich langen Durchmessern der Hyperbel die Axen als Winkelhalbirende. Der mit dem Radius a aus dem Centrum beschriebene Kreis geht durch die reellen Scheitel und heifst der *Scheitelkreis.*

176. **Conjugirte Hyperbeln.** Offenbar trennen die Asymptoten die Durchmesser, welche die Hyperbel in reellen Punkten treffen, von denen, welche sie in imaginären Punkten schneiden. Für alle Vectoren, welche in den die Nebenaxe enthaltenden Scheitelwinkeln der Asymptoten liegen, ergibt die Gleichung negative Zahlen $r^2 = -r'^2$ als Halbmesserquadrate. Man kann die reellen Längen $\pm r'$ dadurch geometrisch darstellen, dafs man sie in demselben Durchmesser abträgt, zu dem die Vectoren $\pm r'i$ gehören.

Die Gleichung des Ortes der Endpunkte der so abgetragenen Längen wird gefunden, indem man in der Hyperbelgleichung das Vorzeichen von r^2 umkehrt oder r^2 durch $-r'^2$ ersetzt: $\frac{1}{r'^2} = \frac{\sin^2\vartheta}{b^2} - \frac{\cos^2\vartheta}{a^2}$ oder $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$

Dies ist wiederum eine Hyperbel, welche die Hauptaxe $2b$ in der y-Axe, die Nebenaxe $2ai$ in der x-Axe und dieselben Asymptoten wie die ursprüngliche hat; letzteres, weil r und r' offenbar für dieselben Werte ϑ unendlich grofs werden. Diese

durch die Punkte B, B' der Figur gehende Curve heifst die zur gegebenen *conjugirte Hyperbel.*

Die beiden von denselben Constanten a, b abhängigen Hyperbeln stehen in sehr enger Beziehung zu einander. Wenn wir die bei der reellen Vertretung des imaginären Kreises eingeführte Redeweise anwenden, so haben wir den reellen Zug der einen Curve als den *Stellvertreter* des imaginären der andern zu bezeichnen. Daher werden sich wieder Constructionen, die an der gegebenen Hyperbel nicht ausführbar sind, an der conjugirten reell vollziehen lassen*).

Man pflegt geradezu die reellen Bezeichnungen, die sich auf die conjugirte Hyperbel beziehen, auch für die gegebene zu benutzen. Statt die reelle Zahl r' als reellen Factor des imaginären Halbmessers $r'i$ oder als die Halbmesser der conjugirten Hyperbel zu bezeichnen, erlaubt man sich die Abkürzung, r' *(statt* $r'i$*) Halbmesser,* b *(statt* bi*) Halbaxe,* $2b$ *die Nebenaxe der gegebenen Hyperbel* zu nennen. Es ist dies zulässig, so lange nur solche reelle und imaginäre *Längen* mit einander verglichen werden.

Sobald jedoch Quadrate von Längen auftreten, sind $-r'^2$ *und* $-b^2$ *als die Quadrate von* r' *und* b einzuführen. Mit diesen Festsetzungen sind auch *alle für die Ellipse gültigen Sätze auf die Hyperbel übertragbar,* indem man nur b^2 durch $-b^2$ ersetzt, überhaupt die Quadrate von Nebenhalbmessern als negativ behandelt.

177. **Asymptoten.** Neu treten bei der Hyperbel nur Eigenschaften auf, die sich auf die Asymptoten beziehen. Da diese Tangenten aus dem Centrum zu den Axen symmetrisch liegen, sind sie durch Angabe ihres Winkels bestimmt, falls man als *Asymptotenwinkel* 2Θ diejenigen Scheitelwinkel bezeichnet, in deren Feldern die reellen Äste der Hyperbel verlaufen.

Derselbe ist durch die Excentricität der Hyperbel mit

*) Genau in demselben Sinn kann man die reelle Ellipse von den Axen $2a$, $2b$ als Stellvertreter der imaginären von den Axen $2ai$, $2bi$ und demselben Centrum behandeln und von in diesem Sinne conjugirten Ellipsen sprechen.

definirt (§ 175). *Der Asymptotenwinkel ist das Doppelte des Winkels* Θ, *dessen Secante der Excentricität* e *gleich ist:*

$$\cos\Theta = \frac{1}{e} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\Theta = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \tan\Theta = \pm\frac{b}{a}.$$

Das Verhältnis der Nebenaxe zur Hauptaxe ist die Tangente des halben Asymptotenwinkels. Je nachdem die Nebenaxe kleiner oder gröfser als die Hauptaxe ist, unterscheidet man *spitz- und stumpfwinklige Hyperbeln.*

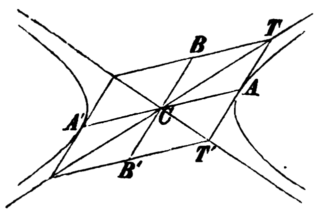
Dies erlaubt, zu gegebenen Axen die Asymptoten zu construiren. Ziehen wir durch die Punkte A, A' und B, B' die Parallelen zu den Axen, so sind *die Asymptoten die Diagonalen des so gebildeten Rechtecks der Scheiteltangenten der conjugirten Hyperbeln.* Daher haben conjugirte Hyperbeln dieselben Asymptoten, aber supplementäre Asymptotenwinkel.

Demnach sind *die Gleichungen der Asymptoten*

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0 \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Diese letzte Gleichungsform wird aber auch nach § 152 erhalten, indem man die quadratischen Glieder der Normalgleichung mit Null vergleicht, ganz unabhängig davon, ob die Gleichung auf die Axen oder ein anderes Paar conjugirter Durchmesser a, b bezogen sei. Auch sind immer $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ die Gleichungen der Diagonalen des von $x = \pm a$, $y = \pm b$ gebildeten Parallelogramms.

Zieht man also durch die Endpunkte von irgend zwei conjugirten Durchmessern AA', BB' *die Parallelen zu ihnen, so liegen die Ecken* T, T' *des entstehenden Parallelogramms auf den Asymptoten.* Dabei sind nach § 155 die Durchmesserparallelen in den Enden des conjugirten Durchmessers Tangenten der Hyperbel (in A, A'), beziehungsweise an die conjugirte Hyperbel (in B, B') nach den vorigen Festsetzungen. Somit kann man die Asymptoten finden, sobald zwei conjugirte Durchmesser der Hyperbel gegeben sind.



178. **Asymptotengleichung der Hyperbel.** Es liegt nahe, die Gleichung der Hyperbel auf ihre Asymptoten als Coordinatenaxen zu beziehen, denn sie mufs eine aufserordentlich einfache Gestalt annehmen. In der Tat ist sie von der Form der Centralgleichung (§ 164), aber aus derselben müssen die Coefficienten a_{11}, a_{22} verschwinden, weil die Coordinatenaxen die Curve in unendlicher Entfernung schneiden (§ 146. 3)). Also reducirt sie sich auf $xy = k^2.$

Die Transformation der Axengleichung bestätigt dies und liefert die Abhängigkeit der Constanten k^2 von den Axen. Der Übergang von rechtwinkligen Axen zu solchen, die mit der x-Axe die Winkel $\pm \Theta$ machen, ergibt sich, direct oder nach § 10, vermittelst

$$x = (x' + y') \cos \Theta, \quad y = (y' - x') \sin \Theta.$$

Aber die transformirte Gleichung

$$\left(\frac{x' + y'}{a}\right)^2 \cos^2 \Theta - \left(\frac{y' - x'}{b}\right)^2 \sin^2 \Theta = 1$$

reducirt sich infolge der Werte von $\cos \Theta$, $\sin \Theta$ (§ 177) auf

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Umgekehrt hat die Hyperbel $xy = k^2$ bei einem Asymptotenwinkel 2Θ, infolge $a^2 + b^2 = 4k^2$ und $b = a \tan \Theta$, die Halbaxen $2k \cos \Theta$, $2k \sin \Theta$, wobei die erstere oder die letztere Zahl der Hauptaxe entspricht, je nachdem 2Θ spitz oder stumpf ist.

Die geometrische Bedeutung der Asymptotengleichung ist offenbar: *Zieht man durch einen Punkt der Hyperbel Parallele zu den Asymptoten, so ist der Inhalt des so gebildeten Parallelogramms constant.* Hiernach kann man Punkte der Hyperbel construiren, indem man als Coordinaten Strecken von constantem Product aufträgt*).

Je gröfser die eine Coordinate genommen wird, desto kleiner wird die andere; nimmt man also jene hinreichend

*) Man nennt deshalb die Gröfse k etwa in demselben Sinn Potenz der Hyperbel, wie im § 93 die Potenz einer Involution definirt wurde.

grofs, so wird diese kleiner als jede noch so kleine gegebene Gröfse. Dies ist der Sinn des Ausdruckes: *Die Hyperbel nähert sich den Asymptoten als Grenzen im Unendlichen.*

179. **Gleichseitige Hyperbel.** Die Asymptoten einer Hyperbel können jeden beliebigen Winkel einschliefsen, insbesondere auch zu einander rechtwinklig sein. Dann ist aber (§ 177)

$$\Theta = \frac{\pi}{4}, \ \tan\frac{\pi}{4} = \pm\frac{b}{a} = \pm 1, \text{ also } b = a,$$

die beiden Axen sind gleich. Umgekehrt folgt aus $a = b$ die Rechtwinkligkeit. Man nennt eine solche specielle Hyperbel eine *gleichseitige oder rectanguläre Hyperbel.* Ihre Axengleichung lautet

$$x^2 - y^2 = a^2$$

mit $x^2 - y^2 = 0$ (vgl. § 55) als Asymptoten.

Die Bedingung, dafs die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine gleichseitige Hyperbel darstelle, lautet

$$a_{11} + a_{22} = 0\ ^{*}),$$

denn nach § 55 ist dies die Bedingung, unter welcher die Asymptoten $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ zu einander rechtwinklig sind. *Conjugirte Durchmesser einer „gleichseitigen" Hyperbel sind gleich* (vgl. § 176). Denn ist $a_{11} = -a_{22}$, so gehören nach § 150 conjugirte Durchmesser zu Neigungswinkeln ϑ, ϑ' für die $\tan\vartheta = \cot\vartheta'$; also werden die Winkel $\vartheta' - \vartheta$ zwischen conjugirten Durchmessern durch die Asymptoten halbirt. Die zu einer gleichseitigen Hyperbel conjugirte ist aber mit ihr congruent**), also sind die bezüglich der Asymptoten symmetrischen Durchmesser gleich lang.

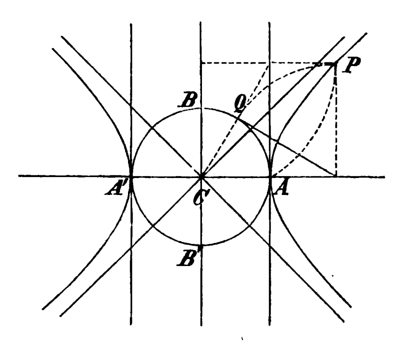
Die gleichseitige Hyperbel hat dieselbe Analogie zum Kreise, wie die allgemeine Hyperbel zur Ellipse. Die beiden speciellen Curven können aus ihren Gleichungen $x^2 - y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$

---

*) Bei schiefwinkligen Coordinaten ebenso $a_{11} + a_{22} = 2a_{12}\cos\omega$.

**) Ihre Asymptotengleichungen lauten $xy = \pm\frac{a^2}{2}$. Man construirt sie daher als die Orte der freien Ecke flächengleicher Rechtecke, von denen die Gegenecke und eine Seitenrichtung gegeben ist.

mittelst rechtwinkliger Dreiecke construirt werden. Man verwendet bei dieser Construction mit Vorteil den Scheitelkreis (§ 175), auf Grund des Satzes: *Die Kreistangente und die Hyperbelordinate* (y), *welche von einem Punkt der Hauptaxe ausgehen, sind gleich lang.* Ebenso kann man brauchen: *Die von einem Punkt der Nebenaxe ausgehende Hyperbelordinate* (x) *ist gleich seinem Abstand von den Scheiteln.*[37]) Man kann auch in der durch die Figur verständlichen Weise die Scheiteltangenten benutzen.



B. 1) Die gleichseitige Hyperbel ist der Ort der Endpunkte der zur Axe senkrechten Durchmesser in den Kreisen eines Büschels (vgl. §§ 124, 125).

2) Sind P_1, P_2 Punkte der gleichseitigen Hyperbel und ist P_0 der Schnittpunkt von P_1P_2 mit der Axe, so ist der mit der in P_0 errichteten Hyperbelordinate beschriebene Kreis ein Potenzkreis der durch die Punkte P_1, P_2 gehenden Kreise des zu dieser Axe gehörigen Büschels.

3) *Eine gleichseitige Hyperbel, welche durch drei gegebene Punkte geht, enthält auch den Höhenschnittpunkt ihres Dreiecks.*[38])

Eine Gleichung, in der $a_{22} = -a_{11}$ ist, reducirt sich für $y = 0$ auf $a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$, und für $x = 0$ auf $a_{11}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. Die gleichseitige Hyperbel bestimmt also Axenabschnitte x', x''; y', y'', mit $x'x'' = -y'y'' = a_{33} : a_{11}$. Gemäfs § 36. 7) ist aber $0 \mid y''$ der Höhenschnittpunkt im Dreieck $x' \mid 0$, $x'' \mid 0$, $0 \mid y'$. Die vier Schnittpunkte einer gleichseitigen Hyperbel mit einem rechtwinkligen Linienpaar bilden vier Dreiecke mit dem vierten Punkt als Höhenschnittpunkt.

4) Wenn in einem Dreieck jede Ecke der Pol der Gegenseite in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel ist, so geht der dem Dreieck umgeschriebene Kreis durch das Centrum der Curve.[39])

Wenn die Relation § 156. 1) besteht, so ist die Gleichung des Kreises durch die Pole der Axen und den Coordinatenanfang

$$a_{12}(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) + a_{23}x + a_{13}y = 0, \quad \text{oder}$$

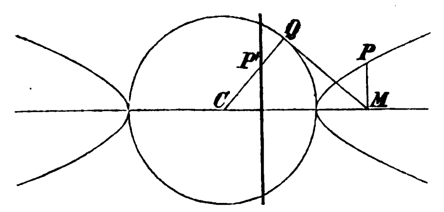
$$x(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) + y(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) - (a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)xy = 0,$$

eine Gleichung, welcher offenbar durch die Coordinaten des Cen-

trums genügt wird, vorausgesetzt, dafs $a_{11} + a_{22} = 2a_{12} \cos \omega$, d. h. die Curve eine gleichseitige Hyperbel ist.

5) Ein durch das Centrum einer gleichseitigen Hyperbel und durch zwei beliebige Punkte beschriebener Kreis geht auch durch den Schnittpunkt der Geraden, welche durch jeden dieser Punkte parallel zur Polare des andern gezogen werden.

180. **Parametergleichungen und Construction der Hyperbel.** Die allgemeine Hyperbel geht aus der gleichseitigen durch dieselbe Substitution hervor, wie in den §§ 172, 173 die Ellipse aus dem Kreis. Man hat daher die eben gegebene Construction der gleichseitigen Hyperbel für die allgemeine nur durch eine proportionale Änderung der Ordinaten zu modificiren. Sind die Axen gegeben, so construire man einen Kreis vom Radius a und eine Parallele zur Nebenaxe im Abstand b. Dann schneidet ein Radius CQ auf dieser die Ordinate MP desjenigen Hyperbelpunktes ab, dessen Abscisse CM von der Kreistangente in Q abgeschnitten wird. Für die gleichseitige Hyperbel ist jene Hilfsparallele eine Scheiteltangente.



Somit hängt die Bewegung eines Punktes P in der Hyperbel von der Drehung eines Radius CQ im Scheitelkreis ab, d. h. von dessen Neigungswinkel $MCQ = \varphi$ als einem Parameter. In der Tat ergeben sich unmittelbar aus der Figur *die Parametergleichungen der Hyperbel* als

$$x = a \sec \varphi, \quad y = b \tan \varphi.$$

Auf dieselben wird man in der Tat geführt, wenn man für $x : a$ und $y : b$ trigonometrische Functionen eines Winkels sucht, welche die Hyperbelgleichung identisch befriedigen

$$1 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sec^2 \varphi - \tan^2 \varphi.$$

Die conjugirte Hyperbel wird gleichzeitig durch

$$x = a \cot \varphi, \quad y = b \operatorname{cosec} \varphi$$

gegeben und wird ebenso aus ihrer Hauptaxe und ihrem Scheitelkreis construirt.

Eine andere Parameterdarstellung ergibt die Asymptotengleichung des § 178

$$x = k\lambda, \quad y = \frac{k}{\lambda}, \quad xy = k^2.$$

181. **Polaren und Tangenten.** Um einige Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel mit Hilfe der Centralgleichungen zu untersuchen, übertragen wir einige der für die allgemeine Gleichung im VIII. Kapitel erhaltene Resultate auf die Normalformen

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a'^2} \pm \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Wenn wir das Vorzeichen von b^2 unbestimmt lassen, bezieht sich das obere stets auf die Ellipse, das untere auf die Hyperbel. Die Halbaxen seien a und b, conjugirte Halbmesser im allgemeinen a' und b' (accentuirt), so dafs sich das erste Gleichungspaar auf rechtwinklige, das zweite auf schiefwinklige Coordinaten bezieht.

Nach § 154 ist die Gleichung einer Sehne $x'|y'$, $x''|y''$

$$\frac{x'+x''}{a^2}x \pm \frac{y'+y''}{b^2}y = \frac{x'x''}{a^2} \pm \frac{y'y''}{b^2} + 1.$$

Dieselbe geht für $x' = x''$, $y' = y''$ in die *Gleichung der Tangente im Punkt* $x'|y'$ über (§ 153)

$$\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1, \quad \frac{x'x}{a'^2} \pm \frac{y'y}{b'^2} = 1.$$

Ist $x'|y'$ überhaupt ein beliebiger Punkt, so stellt diese nämliche Gleichung *die Polare des Punktes* $x'|y'$ dar, d. h. die Berührungssehne der von $x'|y'$ ausgehenden Tangenten oder den Ort der durch die Curve von $x'|y'$ harmonisch getrennten Pole (§ 160). Die Gleichung entsteht aus der Curvengleichung durch Einsetzung von $x'x$, $y'y$ statt x^2, y^2.

Insbesondere ist die Polare eines Punktes $x'|0$ eines Durchmessers durch $x'x = a'^2$ gegeben, also zum conjugirten Durchmesser parallel, ebenso wie die Tangenten in den Endpunkten des ersten (§ 155). Um daher die Polare eines Punktes P zu finden, ziehen wir den Halbmesser CP, bestimmen den Punkt P' auf demselben so, dafs das Rechteck $CP \cdot CP'$

dem Quadrate dieses Halbmessers gleich ist, und ziehen durch P' eine Parallele zu dem ihm conjugirten Durchmesser (§ 115).

Umgekehrt finden wir zu einer gegebenen Geraden $\xi x + \eta y + 1 = 0$ den Pol $x'|y'$, indem wir die Gleichung mit der einer Polare vergleichen, als

$$x' = -a^2\xi,\ y' = = \mp b^2\eta \text{ bez. } x' = -a'^2\xi,\ y' = \mp b'^2\eta.$$

Wenn $x'|y'$ der Curve selbst angehört, so berührt die Gerade sie in ihm. Daher ist die Bedingung, dafs eine Gerade Tangente des Kegelschnittes sei:

$$a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 = 1, \quad a'^2\xi^2 \pm b'^2\eta^2 = 1.$$

Dies ist somit *die Tangentialgleichung der Ellipse bez. Hyperbel*, wobei man bemerkt, dafs dieselbe ebenfalls in der rein quadratischen einfachen Gestalt erscheint (vgl. § 163).

B. 1) *Hesse'sche Normalform der Gleichung der Tangente.* Um $\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1$ auf die Form $x \cos\alpha \pm y \sin\alpha = p$ zu bringen, haben wir zu setzen $\frac{x'}{a^2} = \frac{\cos\alpha}{p}$, $\frac{y'}{b^2} = \frac{\sin\alpha}{p}$ und erhalten mittelst der Gleichung der Curve für den Abstand der Tangente vom Centrum $p^2 = a^2\cos^2\alpha \pm b^2\sin^2\alpha$. Daher lautet die verlangte Gleichungsform

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \sqrt{(a^2\cos^2\alpha \pm b^2\sin^2\alpha)} = 0$$

oder $$x\cos\alpha + y\cos\beta - \sqrt{(a'^2\cos^2\alpha \pm b'^2\cos^2\beta)} = 0,$$

wenn α, β die auf beliebige conjugirte Durchmesser bezogenen Winkel sind.

2) *Gleichung des Tangentenpaares aus $x'|y'$ an den Kegelschnitt.* Wir verfahren wie in § 156 und finden

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2.$$

Hieraus folgt die Gleichung paralleler Tangenten der Richtung m als

$$(mx - y)^2 = m^2a^2 \pm b^2.$$

3) *Winkel φ des Tangentenpaares aus $x'|y'$.*

Wenn eine Gleichung zweiten Grades zwei Gerade darstellt, so bezeichnen die gleich Null gesetzten drei quadratischen Glieder zwei zu ihnen parallele Linien durch den Anfangspunkt: also hängt der durch das Linienpaar eingeschlossene Winkel nur von den drei höchsten Gliedern der allgemeinen Gleichung ab. Ordnen

wir dann die letzte Gleichung des Textes, so finden wir nach § 55

$$\tan \varphi = \frac{2ab\sqrt{\pm\left(\frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} - 1\right)}}{x'^2 + y'^2 - a^2 \mp b^2}.$$

4) Die Polare eines Punktes einer Asymptote ist zu ihr parallel. Die Pole aller Asymptotenparallelen liegen auf der Asymptote.

5) *Der Ort des Schnittpunktes von zu einander rechtwinkligen Tangenten ist der Hauptkreis der Curve*

$$x^2 + y^2 = a^2 \pm b^2.$$

Wir haben in 3) nur den Nenner des für $\tan \varphi$ gefundenen Wertes mit Null zu vergleichen, oder wir berechnen die Entfernung des Schnittpunktes $x \mid y$ vom Centrum nach 1) aus dessen Abständen p_1, p_2 von den Tangenten

$$x^2+y^2=p_1^2+p_2^2=(a^2\cos^2\alpha\pm b^2\sin^2\alpha)+(a^2\sin^2\alpha\pm b^2\cos^2\alpha)=a^2\pm b^2.$$

Der Hauptkreis ist reell für Ellipsen und spitzwinklige Hyperbeln, rein imaginär dagegen für stumpfwinklige Hyperbeln ($b > a$).

Wenn die Tangenten sich unter einem gegebenen schiefen Winkel schneiden, so ist der Ort ihres Schnittpunktes im allgemeinen durch eine specielle Gleichung vierten Grades gegeben (3)).

182. **Gleichungen conjugirter Durchmesser.** Die Gleichung desjenigen Durchmessers, der zu dem durch einen gegebenen Punkt $x' \mid y'$ der Curve gehenden $y'x - x'y = 0$ conjugirt ist, lautet

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} = 0, \quad \frac{x'x}{a^2} - \frac{y'y}{b^2} = 0,$$

denn dieselbe stellt die durch den Nullpunkt gehende Parallele zur Tangente in $x' \mid y'$ dar. Wir erhalten die Coordinaten eines Endpunktes $x'' \mid y''$ dieses Durchmessers, indem wir die Gleichung nach x und y auflösen und die Werte in die Gleichung der Curve einsetzen, wobei zu beachten ist, daſs $x' \mid y'$ letzterer auch genügt. Man findet leicht für die Ellipse, bez. Hyperbel

$$\frac{x''}{a} = \pm\frac{y'}{b}, \quad \frac{y''}{b} = \pm\frac{x'}{a}; \text{ bez. } \frac{x''}{a} = \pm\frac{y'}{b}i, \quad \frac{y''}{b} = \pm\frac{x'}{a}i,$$

wo die Unterdrückung des Factors i bei den Hyperbelpunkten die Schnittpunkte des conjugirten Durchmessers mit der conjugirten Hyperbel liefert. Genau dasselbe gilt, wenn wir die Curvengleichung auf conjugirte Durchmesser a', b' beziehen.

Die Betrachtung der Vorzeichen von $x'|y'$ und $x''|y''$ lehrt: *Die Paare conjugirter Durchmesser der Ellipse trennen einander* (vgl. § 171) d. h. $x'|y'$ und $x''|y''$ liegen auf verschiedenen Seiten einer Coordinatenaxe. Und: *Die Paare conjugirter Durchmesser der Hyperbel trennen einander nicht,* d. h. $x'|y'$ und $x''|y''$ liegen im gleichen oder im entgegengesetzten Coordinatenfeld. Also liegen conjugirte Durchmesser der Ellipse auf verschiedenen, solche der Hyperbel auf denselben Seiten der Curvenaxen.

Das letztere erkennt man auch durch Einführung der Winkel ϑ', ϑ'', welche conjugirte Durchmesser mit der Hauptaxe bilden und für welche nach obigem (vgl. § 150) ist

$$\tan\vartheta' = \frac{y'}{x'}, \ \tan\vartheta'' = \frac{y''}{x''} = \mp\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'} = \mp\frac{b^2}{a^2}\cot\vartheta'.$$

Ferner erkennt man aber, daſs es auch Durchmesser gibt, mit denen ihre conjugirten zusammenfallen, nämlich für $\tan^2\Theta = \mp b^2 : a^2$. *Somit* (§ 177) *sind die Asymptoten die zu sich selbst conjugirten Durchmesser.* Ist Θ reell und $\tan\vartheta' < \tan\Theta$, so muſs $\tan\vartheta'' > \tan\Theta$ sein, *also liegen conjugirte Durchmesser der Hyperbel auf verschiedenen Seiten jeder Asymptote;* in der Tat können sie nicht gleichzeitig reell schneiden (§ 175).

Conjugirte Durchmesser liegen harmonisch in Bezug auf die Asymptoten. Denn, $\tan\vartheta' \tan\vartheta'' = \tan^2\Theta$ ist nach § 25 der Ausdruck dafür, daſs die Strahlen ϑ', ϑ'' und $+\Theta, -\Theta$ harmonisch liegen. Wir können auch das Kriterium harmonischer Lage zweier Linienpaare in § 57 auf die Gleichung des Asymptotenpaares und *die Gleichung eines Paares conjugirter Durchmesser* anwenden, welche letztere durch Multiplication von $y'x - x'y = 0$ und $\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 0$ entsteht:

$$x'y'\left(\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2}\right) = xy\left(\frac{x'^2}{a^2} \mp \frac{y'^2}{b^2}\right).$$

Doch bedürfen diese Sätze keiner weiteren Beweise, wenn man bedenkt, daſs *conjugirte Durchmesser harmonische Polaren* sind (§§ 155, 159). Für die Hyperbel führt dies auch die Figur des § 177 auf die harmonischen Eigenschaften des Parallelogramms zurück. So liefert jede Tangente des Kegel-

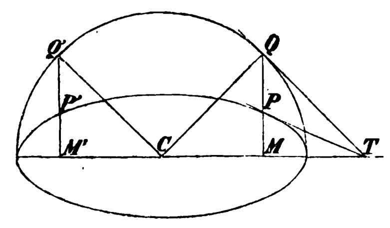
schnittes durch ihre Schnitte mit seinem Hauptkreis (§ 181. 5)) zwei conjugirte Durchmesser als Diagonalen eines umgeschriebenen Rechtecks.

183. **Die Construction conjugirter Durchmesser** ist nach den Proportionen $x'' : y' = \mp x' : y'' = a : b$

leicht und stets auf reellem Wege ausführbar.

Eine andere Methode gründet sich darauf, dafs die Aufgabe für die speciellen Curven mit $a = b$ in der einfachsten Form gelöst werden kann. Conjugirte Durchmesser des Kreises sind zu einander rechtwinklig, solche der gleichseitigen Hyperbel liegen in Bezug auf die Halbirungslinien des Axenwinkels symmetrisch; hier wie dort sind sie gleich lang (§ 179). Diese Eigenschaften lassen sich nach § 173 und § 180 für die Ellipse und schiefe Hyperbel modificiren.

Im Falle der Ellipse benutzen wir die Parametergleichungen (§ 173) und erhalten die den Durchmessern ϑ', ϑ'' entsprechenden Winkelparameter φ', φ'' aus $\tan\varphi' = \frac{a}{b}\tan\vartheta'$, $\tan\varphi'' = \frac{a}{b}\tan\vartheta''$, so dafs $\tan\vartheta' \tan\vartheta'' = -b^2 : a^2$ in die Orthogonalitätsbedingung $\tan\varphi' \tan\varphi'' = -1$ übergeht.



Man construirt also CP' zu CP nach dem Satz: die Endpunkte P, P' conjugirter Durchmesser der Ellipse bestimmen in den verlängerten Ordinaten MP, $M'P'$ auf dem umgeschriebenen Kreise Punkte Q, Q', deren Kreisdurchmesser CQ, CQ' zu einander senkrecht sind, und umgekehrt.

Im Falle der Hyperbel könnten wir ebenso (§ 180) statt ihrer Punkte P, P' die Punkte Q, Q' einführen, welche in der gleichseitigen Hyperbel von derselben Hauptaxe auf den Ordinaten MP, $M'P'$ liegen. Alsdann sind CP, CP' conjugirte Durchmesser, wenn CQ, CQ' mit den Axen gleiche Winkel bilden. Aber hier bietet die harmonische Lage zu den Asymptoten ein besseres Mittel in der Form des Satzes des § 177. Ist in der dortigen Figur CA gegeben, so findet

man den Endpunkt des conjugirten Durchmessers CB, indem man bedenkt, dafs AB zu CT' parallel und in CT halbirt ist.

Der Übergang von P zu Q oder die Substitution von $x \mid \frac{b}{a} y$ statt $x \mid y$ gibt auch das Mittel, die Tangente in einem Punkt P des Kegelschnittes zu construiren. Denn jene Substitution verwandelt

$$\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1 \text{ in } \frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{a^2} = 1:$$

die Tangente des Kreises bez. der gleichseitigen Hyperbel in Q und die des Kegelschnittes in P schneiden sich in einem Punkt T der Hauptaxe $y = 0$. Soll man also die Ellipsentangente in P ziehen, so gibt man die Kreistangente in Q an und verbindet P mit ihrem Schnittpunkt T in der Hauptaxe.

Die Vorteile der Parametermethode zeigen die Beispiele.

B. 1) Der Inhalt des Dreiecks PCP' ist das $\frac{b}{a}$ fache desjenigen des Dreiecks QCQ', also ist $ab = a'b' \sin \omega$.

2) Die Quadrate zweier conjugirten Halbmesser sind

$$a'^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi, \quad b'^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi.$$

3) Die Sehne der Punkte α, β der Ellipse hat die Gleichung

$$\frac{x}{a} \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) + \frac{y}{b} \sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) = \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta),$$

und schneidet die zugehörige Sehne α, β des Kreises (§ 112) auf der Hauptaxe.

Der Pol der Sehne ist

$$a \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) \mid b \sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) : \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta).$$

Ebenso ist die Gleichung der Tangente in $\varphi = \alpha$

$$\frac{x}{a} \cos \alpha + \frac{y}{b} \sin \alpha = 1.$$

4) Die Länge der Sehne α, β ist zu bestimmen.

$$l = \sqrt{\{a^2 (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + b^2 (\sin \alpha - \sin \beta)^2\}},$$

$$l = 2 \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) \sqrt{[a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) + b^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta)]}.$$

Aber nach 2) repräsentirt die letzte Wurzel die Länge des dem Punkte $\frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ conjugirten Halbmessers, und nach 3) ist die Tangente im Punkte $\frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ parallel zur Sehne α, β; wenn also b' die Länge des zur gegebenen Sehne parallelen Halbmessers repräsentirt, so ist $l = 2b' \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$.

5) Der doppelte Inhalt des durch drei Punkte α, β, γ gebildeten Dreiecks ist

$$F = ab\{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)\}$$
$$= 4ab\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha).$$

6) Wenn die Halbirungslinien der Seiten eines eingeschriebenen Dreiecks sich im Centrum schneiden, so ist dasselbe von constanter Fläche.

7) Der Kreis, welcher dem durch drei Punkte α, β, γ bestimmten Dreieck umgeschrieben ist, hat, wenn b', b'', b''' die zu den Seiten parallelen Halbmesser bedeuten,[40]) den Radius

$$R = \frac{b'b''b'''}{ab},$$

denn das Product der drei Seiten ist gleich dem mit R multiplicirten doppelten Inhalt.

Die Gleichung dieses Kreises ist mit $c^2 = a^2 - b^2$

$$x^2 + y^2 - \frac{2c^2x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$+\frac{2c^2y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)-\tfrac{1}{2}c^2\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)\}$$

und hieraus folgt leicht das Centrum.

8) Der Inhalt des durch drei Tangenten gebildeten Dreiecks ist nach § 38 $ab\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\tan\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\tan\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$.

9) Die Punkte $a\sec\varphi \mid b\tan\varphi$ und $a\cot\varphi \mid b\sec\varphi$ sind die Endpunkte conjugirter Durchmesser in conjugirten Hyperbeln (§ 180).[41])

10) Ist $x = k\lambda$, $y = k:\lambda$ ein Punkt einer gleichseitigen Hyperbel, so ist von vier Punkten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ jeder der Höhenschnittpunkt des Dreiecks des andern (§ 179. 3)), wenn $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = -1$ und hat seinen symmetrischen $-x \mid -y$ auf dem durch sie gehenden Kreis.

184. **Winkel und Längen conjugirter Durchmesser.** Beziehen wir eine Centralgleichung auf verschiedene Paare conjugirter Durchmesser, so sind gewisse Coefficientenfunctionen nach § 168 unveränderlich, nämlich $a_{11}a_{22}:\sin^2\omega$ und $(a_{11}+a_{22}):\sin^2\omega$, wenn ω den von dem Paar eingeschriebenen *Conjugationswinkel* bedeutet. Bedeutet nun (§ 169) in der Axengleichung $a_{11}:a_{33} = 1:a^2$, $a_{22}:a_{33} = \pm 1:b^2$ und in der Durchmessergleichung

$$a_{11} : a_{33} = 1 : a'^2, \quad a_{22} : a_{33} = \pm 1 : b'^2,$$

so bestehen die Beziehungen

$$\frac{1}{a'^2 b'^2 \sin^2\omega} = \frac{1}{a^2 b^2}, \quad \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{1}{a'^2} \pm \frac{1}{b'^2}\right) = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2}$$

oder, wenn man die zweite Gleichung durch die erste dividirt,

$$a'b' \sin\omega = ab, \quad a'^2 \pm b'^2 = a^2 \pm b^2.$$

Die geometrische Bedeutung der ersten Relation ist offenbar, wenn für die Hyperbel die reelle Ausdrucksweise des § 176 gebraucht wird: *Das durch Verbindung der Endpunkte conjugirter Durchmesser gebildete Dreieck hat constanten Inhalt*, oder auch: *Die Fläche jedes umgeschriebenen Parallelogramms von conjugirten Seitenrichtungen ist gleich dem Product der Axen* $4ab$.

Die zweite Relation lautet: *Die algebraische Summe der Quadrate conjugirter Durchmesser ist constant*, nämlich: *Die Summe der Quadrate conjugirter Durchmesser der Ellipse ist gleich der Summe der Axenquadrate, die Differenz der Quadrate conjugirter Durchmesser conjugirter Hyperbeln ist gleich der Differenz der Axenquadrate.*

Man kann diese Sätze auch aus den Formeln für die Coordinaten $x' \mid y'$, $x'' \mid y''$ der Endpunkte conjugirter Durchmesser in § 182 ablesen, denn es ist

$$a'^2 = x'^2 + y'^2, \quad b'^2 = x''^2 + y''^2 = \frac{b^2}{a^2}x'^2 + \frac{a^2}{b^2}y'^2,$$

also

$$a'^2 \pm b'^2 = (a^2 \pm b^2)\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\right) = a^2 \pm b^2;$$

das Quadrat des Inhalts des Parallelogramms $0 \mid 0$, $x' \mid y'$, $x'' \mid y''$ ist

$$a'^2 b'^2 \sin^2\omega = (x'y'' - x''y')^2 = \left(\frac{b}{a}x' \pm \frac{a}{b}y'\right)^2 = a^2 b^2.$$

Vermöge dieser beiden Relationen sind unter fünf Gröfsen a, b, a', b', ω je zwei durch die übrigen bestimmt, z. B. die Axen durch zwei nach Gröfse und Lage gegebene, conjugirte Durchmesser, die Längen conjugirter Durchmesser von vorgeschriebenem Winkel bei gegebenen Axen. Man bildet die nötigen Gleichungen durch Elimination, hat dann aber noch die gegenseitige Lage der Axen und Durchmesser zu ermit-

teln. Dazu dient die Relation $\tan\vartheta' \tan\vartheta'' = \mp b^2 : a^2$, welche zwischen den Neigungswinkeln conjugirter Durchmesser gegen die Hauptaxe besteht (§ 182).

B. 1) *Die Quadratsumme der Reciproken je zweier zu einander rechtwinkligen Durchmesser ist constant.*

Nehmen wir ein solches Paar a_1, a_2 zu Axen rechtwinkliger Coordinaten, so ist in der Curvengleichung $a_{33} = a_{11} a_1^2 = a_{22} a_2^2$. Also ist der Satz nur die geometrische Bedeutung davon, dafs nach § 166 $a_{11} + a_{22}$ durch die Drehungstransformationen nicht geändert wird.

2) *Abstand des Centrums von der Tangente.* Für den Abstand $CT = p$ des Nullpunkts von $\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1$ ist (§ 37)

$$\frac{1}{p} = \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}} = \frac{1}{ab}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x'^2 + \frac{a^2}{b^2}y'^2}.$$

Nennen wir also $CP = a'$, $CP' = b'$, so ist $p = ab : b'$, *das Product eines Durchmessers in den Abstand der zu ihm parallelen Tangente ist constant.* Damit ist auch die Constanz von $a'b' \sin\omega$ bewiesen, da $\sin\omega = \sin CPT = \frac{p}{a'} = \frac{ab}{a'b'}$.

3) *Bestimmung der Axen aus zwei conjugirten Durchmessern.* Wir berechnen zuerst aus

$$\vartheta'' - \vartheta' = \omega \text{ und } \tan\vartheta' \tan\vartheta'' = \mp b^2 : a^2,$$

$$\cos(\vartheta' + \vartheta'') = \frac{a^2 \pm b^2}{a^2 \mp b^2} \cos\omega,$$

indem wir jene in den Formen $\cos\vartheta' \cos\vartheta'' + \sin\vartheta' \sin\vartheta'' = \cos\omega$, $a^2 \sin\vartheta' \sin\vartheta'' \pm b^2 \cos\vartheta' \cos\vartheta'' = 0$ schreiben und $\cos\vartheta' \cos\vartheta''$, $\sin\vartheta' \sin\vartheta''$ bilden. Mit Hilfe der beiden Durchmesserrelationen folgt aber

$$\frac{\cos(\vartheta' + \vartheta'')}{\cos\omega} = \frac{a'^2 \pm b'^2}{\sqrt{(a'^2 \pm b'^2)^2 \mp 4a'^2 b'^2 \sin^2\omega}}$$

zur Bestimmung von ϑ' und ϑ'' und endlich

$$\frac{2a^2}{a'^2 \pm b'^2} = 1 + \frac{\cos\omega}{\cos(\vartheta' + \vartheta'')}, \quad \frac{2b^2}{a'^2 \pm b'^2} = 1 - \frac{\cos\omega}{\cos(\vartheta' + \vartheta'')}.$$

4) *Axenlängen und Excentricität eines durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnittes.*

Nach § 167 ist mit der dort gegebenen Abkürzung R

$$\frac{2\mathrm{D}}{a^2} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega - R),$$

$$\frac{2\mathrm{D}}{b^2} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega + R),$$

$$\cos^2\Theta = \frac{1}{e^2} = b^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{2R}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega + R}.$$

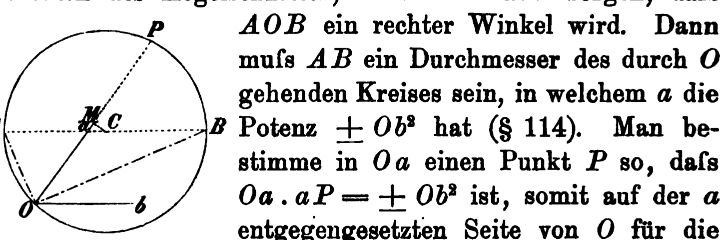
Letzteren Ausdruck erhält man auch direct, wenn man den Cosinus des halben Winkels des Linienpaares

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{12}y^2 = 0 \qquad \text{bestimmt.}$$

185. *Die Construction der Axen eines Centralkegelschnittes aus einem gegebenen Paar conjugirter Durchmesser* läfst sich auf folgenden Satz gründen (vgl. auch § 191. 4)):

Auf jeder Tangente des Kegelschnittes begrenzen irgend zwei conjugirte Durchmesser vom Berührungspunkt aus Segmente, deren Product constant und gleich dem Quadrat des zu ihr parallelen Halbmessers ist. Zum Beweis nehmen wir diesen Durchmesser a' und den conjugirten b', welcher den Berührungspunkt enthält, zu Coordinatenaxen. Die conjugirten Durchmesser $x'y = y'x$, $a^2y'y \pm b^2x'x = 0$ (§ 182) schneiden in $x = a'$ die Segmente ab $y = a'y' : x'$ und $y = \mp b'^2x' : a'y'$, deren Rechteck in der Tat gleich $\pm b'^2$ ist. Umgekehrt bestimmen solche Punkte einer Tangente, deren Segmente das Product $\pm b'^2$ ergeben, conjugirte Durchmesser.

Nun seien Oa, Ob zwei conjugirte Durchmesser, also die Parallele zu Ob durch a eine Tangente. Irgend zwei Punkte A, B derselben liefern conjugirte Durchmesser OA, OB, wenn $Aa.aB = \pm Ob^2$. Also finden wir in OA, OB die Axen des Kegelschnittes, wenn wir dafür sorgen, dafs



AOB ein rechter Winkel wird. Dann mufs AB ein Durchmesser des durch O gehenden Kreises sein, in welchem a die Potenz $\pm Ob^2$ hat (§ 114). Man bestimme in Oa einen Punkt P so, dafs $Oa\,.\,aP = \pm Ob^2$ ist, somit auf der a entgegengesetzten Seite von O für die Ellipse, auf derselben Seite mit a für die Hyperbel. Dann schneidet der durch O und P gehende Kreis, dessen Centrum C in der Tangente liegt, A und B so aus, dafs OA, OB die Axen sind.

B. 1) Die Segmente, welche in einer festen Tangente ein

Paar paralleler Tangenten abschneidet, geben ein Rechteck gleich dem Quadrat des ihr parallelen Halbmessers.

Bei derselben Coordinatenwahl, wie im Text, sind für $x = a'$ die durch $\frac{x'x}{a'^2} \pm \frac{y'y}{b'^2} = 1$, $-\frac{x'x}{a'^2} \mp \frac{y'y}{b'^2} = 1$ abgeschnittenen Segmente $y = \pm \frac{b'^2}{y'}\left(1 - \frac{x'}{a'}\right)$, $y = \mp \frac{b'^2}{y'}\left(1 + \frac{x'}{a'}\right)$, deren Product sich mittelst der Curvengleichung auf $\pm b'^2$ reducirt.

2) Die Schnittpunkte einer veränderlichen Tangente mit zwei festen parallelen Tangenten bestimmen conjugirte Durchmesser.

3) Wenn eine veränderliche Tangente eines Centralkegelschnittes zwei feste parallele Tangenten schneidet, so bestimmt sie Abschnitte auf diesen, deren Rechteck constant und dem Quadrat des zu ihnen parallelen Halbmessers gleich ist.

Nehmen wir den den Tangenten parallelen Durchmesser und den conjugirten zu Coordinatenaxen, so ist die Gleichung der veränderlichen Tangente $\frac{x'x}{a'^2} \pm \frac{y'y}{b'^2} = 1$. Die Abschnitte in den festen Tangenten werden gefunden, indem man in der letzten Gleichung nach einander $x = \pm a'$ macht und sie nach y auflöst. Ihr Product wird $\frac{b'^4}{y'^2}\left(1 - \frac{x'^2}{a'^2}\right) = \pm b'^2$. Daher verhält sich das Rechteck aus den Abschnitten der festen Tangenten zu dem Rechteck aus den Abschnitten der veränderlichen Tangente wie die Quadrate dieser Halbmesser (§ 162).

4) Wenn irgend zwei Halbmesser gegeben sind, so sind die Dreiecke, welche von ihnen und denjenigen beiden unter ihren Ordinaten gebildet werden, welche bez. durch den Endpunkt des andern Halbmessers gehen, von gleicher Fläche.

5) Die Dreiecke, welche einer von irgend zwei Halbmessern mit der Tangente der Curve im Endpunkt der andern bildet, sind von gleicher Fläche.

186. *Die Bestimmung der Paare conjugirter Durchmesser von vorgeschriebenem Conjugationswinkel* umfaſst die Axenbestimmung als speciellen Fall. Man geht von den Sehnen aus, welche die Enden eines Durchmessers AB mit einem beliebigen Punkt D der Curve verbinden und *Supplementarsehnen* genannt werden.

Durchmesser, die zu irgend einem Paar Supplementarsehnen parallel sind, sind conjugirt. Denn, da im Dreieck ABD die Verbindungslinie der Halbirungspunkte zweier Seiten mit der dritten Seite parallel ist, so muſs der AD halbirende Durch-

messer parallel zu BD und der BD halbirende parallel zu AD sein. Zum analytischen Beweis bildet man die Gleichungen von AD und BD und zeigt, dafs das Product ihrer Richtungscoefficienten gleich $\mp b^2 : a^2$ ist.

Um also die Paare conjugirter Durchmesser zu construiren, welche den Winkel ω einschliefsen, suchen wir zwei Supplementarsehnen, welche den Winkel ω mit einander bilden. Dazu beschreiben wir über irgend einem Durchmesser den Bogen eines Kreises, in welchem ω der Peripheriewinkel ist, und verbinden die Punkte, wo dieser Kreis die Curve schneidet, mit den Enden des angenommenen Durchmessers: so erhalten wir ein Paar Supplementarsehnen, welche zu den verlangten Durchmessern parallel sind.

Um die Einsicht in die Lagenverhältnisse zu erleichtern, denken wir uns die Axen gegeben und legen die Hilfskreise durch ein Scheitelpaar. Eine Hyperbel wird offenbar von jedem Kreis durch die reellen Scheitel in noch zwei reellen Punkten geschnitten, deren Verbindungsgerade zur Hauptaxe parallel ist, d. h. *in der Hyperbel schliefsen stets zwei symmetrische Paare conjugirter Durchmesser einen beliebig gegebenen Winkel ein.* Eine Ellipse hat dagegen mit den durch die Scheitel der grofsen Axe gehenden Kreisen offenbar nur dann noch zwei reelle, zur kleinen Axe symmetrische Schnittpunkte, wenn der Kreis die kleine Axe nicht zwischen ihren Scheiteln schneidet.

Auf die Axen bezogen erhält man leicht für die Hilfskreise, welche über der Sehne $2a$ den spitzen Peripheriewinkel ω enthalten, die Centra $0 \mid \pm a \cot\omega$ und die Gleichungen

$$x^2 + y^2 \mp 2ay \cot\omega - a^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} \mp 2\frac{y}{a} \cot\omega = 1.$$

Die Coordinaten der Schnittpunkte genügen einer der letzten und der Ellipsengleichung, also auch je ihrer Differenz

$$y \left\{ \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} y \pm \frac{2}{a} \cot\omega \right\} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der x-Axe und je einer Parallelen, welche die Ellipse nur so lange reell schneidet, als ihr Abstand

$$\frac{2ab^2}{a^2 - b^2} \cot\omega \leqq b \quad \text{oder} \quad \tan\omega \geqq \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Der kleinste spitze Winkel, welchen conjugirte Durchmesser der Ellipse einschliefsen können, ist der Winkel der Diagonalen im Rechteck der Scheiteltangenten; denn die x-Parallele mufs berühren und dann sind die Supplementarsehnen die Verbindungsgeraden der Scheitel der grofsen und der kleinen Axe. Und allgemein können wir nun die gesuchten Durchmesserenden durch eine Parallele zur Hauptaxe in dem leicht zu construirenden Abstand $a \cot \omega$ ausschneiden. *Nur zu einem spitzen Conjugationswinkel ω, der gröfser ist als der der Scheitelverbindungsgeraden, existiren in der Ellipse zwei symmetrische Paare conjugirter Durchmesser.*

187. **Äqui-conjugirte Durchmesser der Ellipse** *(gleich lange conjugirte Durchmesser) liegen in den Diagonalen des Rechtecks der Scheiteltangenten.* Denn nach § 186 sind sie conjugirt und infolge ihrer symmetrischen Lage haben sie gleiche Länge. Man kann dieses ausgezeichnete Durchmesserpaar auch aus der Betrachtung der Constanz von $a'^2 + b'^2$ und $a'b' \sin \omega$ (§ 184) folgendermafsen finden.

Bekanntlich hat unter den Rechtecken von gegebener Diagonale das Quadrat den gröfsten Inhalt, d. h. bei constanter Quadratsumme $a'^2 + b'^2$ ist $a'b'$ ein Maximum, wenn $a' = b'$ ist. Alsdann ist aber $\sin \omega = ab : a'b' = ab : a'^2$, also der spitze Conjugationswinkel ω selbst ein Minimum Ω. Somit ergibt sich als das Quadrat der äqui-conjugirten Halbmesser einer Ellipse $a'^2 = b'^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ und

$$\sin \Omega = ab : \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad \text{und} \quad \tan \tfrac{1}{2}\Omega = \pm\, b : a.$$

In der Hyperbel kann es infolge $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$ keine gleichen conjugirten Durchmesser geben, wenn sie nicht gleichseitig ist (§ 179). Aber aus § 177 folgt: *Wenn eine Hyperbel und eine Ellipse dieselben Axen in Gröfse und Lage haben, so fallen die Asymptoten der Hyperbel mit den äqui-conjugirten Durchmessern der Ellipse zusammen.*

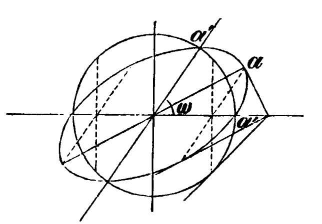
Die Gleichung der Ellipse, bezogen auf die äqui-conjugirten Durchmesser als Coordinatenaxen, lautet

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Ihre geometrische Bedeutung ist die, dafs jeder Punkt der

Ellipse von ihren äqui-conjugirten Durchmessern senkrechte Abstände $x \sin \Omega$, $y \sin \Omega$ hat, deren Quadratsumme constant ist, nämlich $(a^2 + b^2) \sin \Omega$.

Für jede Ellipse gibt es also ein bestimmtes schiefwinkliges Coordinatensystem, in welchem ihre Gleichung von der Form derjenigen eines Kreises in rechtwinkligen Coordinaten ist:



$$x^2 + y^2 = a'^2.$$

Daher entsteht aus einem Kreis stets eine Ellipse, wenn man alle parallele Kreissehnen um ihre Halbirungspunkte um einen constanten Winkel dreht. Denn der die Drehpunkte enthaltende und der unter Ω gegen ihn geneigte Durchmesser sind die Coordinatenaxen und äqui-conjugirten Durchmesser der Ellipse.

B. 1) Eine Ellipse, deren gleiche conjugirte Durchmesser a' den spitzen Winkel Ω einschliefsen, hat die Halbaxen

$$a = \sqrt{2} \,.\, a' \cos \tfrac{1}{2}\Omega, \quad b = \sqrt{2} \,.\, a' \sin \tfrac{1}{2}\Omega$$

und die Excentricität $e = 1 - \tan^2 \frac{1}{2}\Omega$.

2) Die gleichen conjugirten Durchmesser der Ellipse sind das Stellvertreterpaar ihrer imaginären Asymptoten nach § 43 $(\tan \Theta = i \tan \frac{1}{2}\Omega)$.

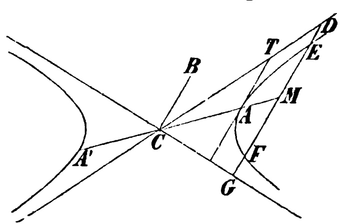
3) Die Gleichungen der Paare conjugirter Durchmesser, welche den Winkel ω einschliefsen, lauten

$$\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} - \frac{xy}{ab} \sqrt{\left[\left(\frac{a^2 \mp b^2}{ab \cot \omega}\right)^2 \mp 4\right]} = 0.$$

188. **Eigenschaften der Hyperbel bezüglich der Asymptoten** sind die einzigen, welche unter denen der Ellipse keine entsprechenden finden.

Die Abschnitte ED und GF, welche auf einer Secante der Hyperbel zwischen der Curve und den Asymptoten enthalten sind, sind gleich lang. Dies folgt daraus, dafs der zu CB conjugirte Durchmesser CA sowol die Sehne FE der Hyperbel als das Segment GD zwischen den Asymptoten halbirt, jenes nach der Definition conjugirter Durchmesser (§ 150), dieses, weil CA, CB bezüglich der Asymptoten harmonisch liegen.

Zum analytischen Beweis nimmt man den zu GD parallelen und den ihm conjugirten Durchmesser zu Coordinatenaxen



und erhält aus $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0$ $MD = b'x : a'$, $MG = -b'x : a'$ und aus der Curvengleichung $ME = -MF$, also $ED = GF$ oder $FD = GE$.

Diese Eigenschaft erlaubt, beliebig viele Punkte der Hyperbel zu construiren, wenn die Asymptoten und ein einziger Punkt E gegeben sind. Denn man hat nur beliebige Secanten durch E zu ziehen und innerhalb der E enthaltenden Asymptotenwinkel auf jeder einen Punkt F so zu bestimmen, dafs $ED = GF$.

Ein wichtiger Specialfall, der schon aus dem Schlufssatz des § 177 abgelesen werden kann, ist: *Das zwischen den Asymptoten liegende Segment einer Hyperbeltangente wird im Berührungspunkt halbirt und ist dem parallelen Halbmesser gleich.* Somit ist das von den Asymptoten und der Tangente gebildete Dreieck doppelt so grofs als das Parallelogramm aus denselben und den Asymptotenparallelen des Berührungspunktes. *Daher* (§ 178) *begrenzt die Hyperbeltangente mit den Asymptoten ein Dreieck von constantem Inhalt.*

Die von einer Asymptote aus gemessenen Segmente GE, GF der Hyperbel in einer Secante ergeben das Quadrat des parallelen Halbmessers CB als ihr Product. Denn aus den obigen Annahmen folgt

$$GF = b'\left\{\frac{x}{a'} - \sqrt{\left(\frac{x^2}{a'^2} - 1\right)}\right\}, \quad GE = b'\left\{\frac{x}{a'} + \sqrt{\left(\frac{x^2}{a'^2} - 1\right)}\right\}$$

und hieraus $GF.GE = b'^2 = CB^2$. Man erkennt darin wiederum die charakteristische Asymptoteneigenschaft (§ 178): durch Vergröfserung der Entfernung der Secante vom Centrum wird der zwischen der Curve und der Asymptote enthaltene Abschnitt GF kleiner als jede angebbare Gröfse.

Die Verwendung der Asymptotengleichung des § 178 zeigen die Beispiele.

B. 1) Unter Voraussetzung der Asymptotengleichung $xy = k^2$

ist *die Gleichung einer Sehne* (§ 154) $x'y + y''x = k^2 + x'y''$ und *die Gleichung der Tangente* in $x' | y'$ $x'y + y'x = 2k^2$ oder

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 2.$$

Hiernach sind die in den Asymptoten durch irgend eine Tangente gemachten Abschnitte gleich $2x'$ und $2y'$, ihr Rechteck ist daher $= 4k^2$.

2) Wenn zwei feste Punkte in einer Hyperbel $x' | y'$, $x'' | y''$ mit irgend einem veränderlichen Punkt $x''' | y'''$ derselben verbunden werden, so fassen diese Sehnen auf jeder der Asymptoten eine constante Strecke zwischen sich.

Da die Gleichung einer der Sehnen $x'''y + y'x = y'x''' + k^2$ ist, so ist der von ihr in der x-Axe vom Nullpunkt aus gebildete Abschnitt gleich $x''' + x'$. Ebenso ist der Abschnitt, welcher der andern Sehne entspricht, gleich $x''' + x''$, und die Differenz zwischen beiden $x' - x''$ ist somit von der Lage des Punktes $x''' | y'''$ in der Curve unabhängig.

3) Die Coordinaten $x | y$ des Punktes, in welchem die Tangenten der Curve in $x' | y'$, $x'' | y''$ sich schneiden, folgen aus

$$x'y + y'x = 2k^2 = 2x'y', \quad x''y + y''x = 2k^2 = 2x''y''$$

als
$$x = \frac{2k^2(x' - x'')}{x'y'' - x''y'} = \frac{2x'x''}{x' + x''}; \quad y = \frac{2y'y''}{y' + y''}.$$

189. **Beispiele.** Die Methode, die Algebra auf Probleme bezüglich der Kegelschnitte anzuwenden, ist im wesentlichen dieselbe, wie die in dem Fall der Geraden und des Kreises angewendete. Wir wollen daher aus der grofsen Anzahl von Aufgaben, die zu Örtern des zweiten Grades führen, nur einige auswählen.

B. 1) Eine Gerade von constanter Länge l bewegt sich zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels; der durch einen festen Punkt in ihr beschriebene Ort ist ein Kegelschnitt.

L N P O M K

Bezeichnen wir PL durch n, PK durch m, so haben wir aus ähnlichen Dreiecken

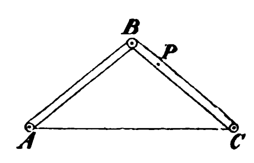
$$OL = \frac{ly}{m}, \quad OK = \frac{lx}{n},$$

und daraus folgt (vgl. § 174)

$$l^2 = \frac{l^2y^2}{m^2} + \frac{l^2x^2}{n^2} - \frac{2l^2xy\cos\omega}{mn} \text{ oder } \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{2xy\cos\omega}{mn} = 1;$$

die Gleichung einer *Ellipse*, die den Punkt O zu ihrem Centrum hat; denn $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ ist hier negativ, nämlich $= -\frac{\sin^2\omega}{m^2n^2}$.

2) Welchen Ort beschreibt ein Punkt Q, der bei festem P in LK so angenommen wird, dafs $QK = PL$ ist?



3) Zwei gleiche Lineale AB, BC sind durch ein Charnier in B vereinigt, der Endpunkt A ist befestigt, indefs C die Gerade AC durchlaufen mufs; man soll den durch irgend einen festen Punkt P in BC beschriebenen Ort finden.

4) Aus der Basislänge und dem Product der Tangenten der halben Basiswinkel den Ort der Dreiecksspitze zu finden.

Indem man die Tangenten der Hälften der Basiswinkel in Function der Seiten ausdrückt, findet man, dafs die Summe der Seiten gegeben ist, daher der Ort eine *Ellipse* ist.

5) Welches ist der Ort des Mittelpunktes des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises, wenn von jenem die Basis und die Summe der Seiten bekannt sind?

Man kann aus dem letzten Beispiel und aus § 49. 4) unmittelbar erkennen, dafs der Ort eine *Ellipse* ist, deren Scheitel die Endpunkte der gegebenen Basis sind.

6) Aus der Basis und der Summe der Seiten eines Dreiecks den Ort des Schwerpunktes (§ 41. 1)) zu bestimmen.

7) Welches ist der Ort des Centrums eines Kreises, der in zwei gegebenen Geraden Abschnitte von vorgeschriebener Länge macht?

8) Man soll den Ort des Mittelpunktes eines Kreises finden, welcher zwei andere Kreise berührt, oder welcher einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt (§ 209).

9) Man bestimme den Ort des Centrums für einen Kreis, der durch einen gegebenen Punkt geht und in einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abschnitt macht.

10) Man bestimme den Ort des Centrums für einen Kreis, der durch einen gegebenen Punkt geht und dessen Abschnitt in einer gegebenen Geraden von diesem Punkt aus unter gegebenem Winkel erscheint.

11) Zwei Ecken eines gegebenen Dreiecks bewegen sich längs fester gerader Linien; der Ort der dritten Ecke ist zu finden.

12) Ein Dreieck ABC ist einem gegebenen Kreis ϱ umgeschrieben, der Winkel an C ist gegeben, und B bewegt sich längs einer festen Geraden; man soll den Ort von A finden.

Wir wenden Polarcoordinaten an, deren Pol das Centrum

des Kreises ist, und deren Winkel gegen die Normale p der festen Geraden gemessen werden. Bezeichnen wir in diesem Sinn die Coordinaten von A, B durch $r \mid \vartheta$, $r' \mid \vartheta'$, dann ist $r' \cos\vartheta' = p$ der Abstand. Aber es ist leicht zu sehen, dafs der Winkel $AOB = \alpha$ gegeben ist; und da die Höhe des Dreiecks AOB bekannt ist, gilt die Gleichung

$$\varrho = \frac{rr' \sin\alpha}{\sqrt{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\alpha)}}.$$

Aus ihr geht durch $\vartheta + \vartheta' = \alpha$ die Polargleichung des Ortes

$$\varrho^2 = \frac{p^2 r^2 \sin^2\alpha}{r^2 \cos^2(\alpha - \vartheta) + p^2 - 2pr \cos\alpha \cos(\alpha - \vartheta)}$$

hervor, eine Gleichung, welche einen *Kegelschnitt* darstellt.

13) Eine Gerade bewegt sich so, dafs sie stets einen festen Kegelschnitt A berührt; in jeder ihrer Lagen bestimmt man ihren Pol in Bezug auf einen andern festen Kegelschnitt B. Der von diesem Pol durchlaufene Ort ist ein Kegelschnitt.

Ist $\alpha \mid \beta$ irgend ein Punkt des Ortes, und $\xi x + \eta y + \zeta = 0$ seine Polare in Bezug auf den Kegelschnitt B, so sind nach § 155 ξ, η, ζ lineare Functionen von $\alpha \mid \beta$. Nach § 163 ist aber die Bedingung, unter welcher die Gerade $\xi x + \eta y + \zeta = 0$ den Kegelschnitt A berührt, vom zweiten Grade in Bezug auf ξ, η, ζ.

14) Der Ort der Schnittpunkte der Tangenten in den Endpunkten conjugirter Durchmesser ist $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2$.

Man erhält die Gleichung durch Addition der Quadrate der Gleichungen beider Tangenten unter Berücksichtigung der Relationen des § 182.

15) Teile einen Kreisbogen in drei gleiche Teile.

Die Teilpunkte werden als Schnittpunkte des gegebenen Bogens mit einer gewissen Hyperbel bestimmt. (Vgl. § 48. 7).)

16) Durch die Endpunkte einer Sehne von constanter Länge in einem festen Kreis zieht man Parallelen zu zwei festen Geraden; der Ort ihres Schnittpunktes ist eine Ellipse, deren Axen die Winkel der durch den Kreismittelpunkt gehenden Parallelen zu den festen Geraden halbiren.

17) Von den parallelen Seiten eines Trapezes ist die eine nach Gröfse und Lage, die andere der Gröfse nach gegeben; die Summe der nicht parallelen Seiten ist bekannt; man verlangt den Ort des Schnittpunktes der Diagonalen.

18) Wenn eine Ecke eines der Ellipse umgeschriebenen Parallelogramms den Scheitelberührungskreis durchläuft, so beschreibt die gegenüberliegende Ecke denselben gleichfalls und die beiden andern Ecken liegen auf zur Hauptaxe normalen Geraden, den Directrixen (§ 194).

Zehntes Kapitel.

Die Focaleigenschaften von Ellipse und Hyperbel.

---

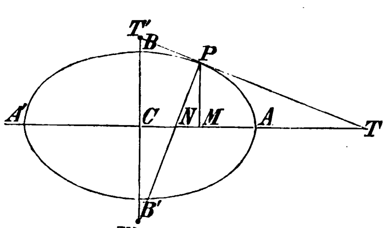
190. **Normale** einer Curve in einem Punkt P derselben heifst die in P errichtete Normale zu der in diesem Punkt berührenden Tangente. Bei den folgenden Untersuchungen, welche die Bestimmung von Normalen verlangen, setzen wir stets rechtwinklige Coordinaten voraus.

Nach § 36 ist die Gleichung der durch $x' \mid y'$ gehenden Geraden zu bilden, die zur Tangente $\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1$ einer auf ihre Axen bezogenen Centralcurve senkrecht ist, also *die Gleichung der Normale einer Ellipse bez. Hyperbel in* $x' \mid y'$

$$\frac{x'}{a^2}(y - y') = \pm \frac{y'}{b^2}(x - x') \quad \text{oder} \quad \frac{a^2 x}{x'} \mp \frac{b^2 y}{y'} = c^2,$$

wo c^2 (§ 170) die algebraische Differenz $a^2 - (\mp b^2)$ bezeichnet.

Wir finden daraus den Abschnitt CN, welchen eine Normale in der Hauptaxe vom Centrum ab bestimmt, als



$$x = \frac{c^2}{a^2} x' \quad \text{oder} \quad CN = e^2 x'.$$

In der Ellipse ($e < 1$) fällt also N zwischen C und M, in der Hyperbel ($e > 1$) über M hinaus.

Wir können somit zu einem gegebenen Punkt N der Hauptaxe die Abscisse x' des Fufspunktes oder vielmehr zweier symmetrisch gelegener Fufspunkte der Curve bestimmen, deren Normale je durch N geht. Im Fall der

Ellipse sind aber diese Fufspunkte, d. h. die Normalen selbst nur reell, so lange $x'^2 \leqq a^2$, also so lange N zwischen den Punkten von den Abscissen $\pm e^2 a$ liegt. Ebenso gehören im Fall der Hyperbel reelle Normalen nur zu den Punkten, welche aufserhalb der Strecke $\pm e^2 a$ liegen, da $x'^2 \geqq a^2$ sein mufs.

Der Kreis kann als eine Ellipse betrachtet werden, deren Excentricität Null ist; daher ist im Fall des Kreises immer $CN = 0$: *jede Normale eines Kreises geht durch sein Centrum.*

191. **Subnormale und Subtangente.** Das Stück MN der Hauptaxe, welches zwischen Normale und Ordinate enthalten ist, wird die *Subnormale* genannt. Die Subnormale hat (§ 190) die Länge

$$x' - \frac{c^2}{a^2} x' \text{ oder } NM = \pm \frac{b^2}{a^2} x':$$

Die Normale eines Punktes teilt seine Abscisse in einem constanten Verhältnis; und zwar innerlich bei der Ellipse, äufserlich bei der Hyperbel im Verhältnis der Axenquadrate $\pm b^2 : a^2$. Die Subnormale der gleichseitigen Hyperbel ist also gleich der Abscisse.

Wenn eine im Punkte P an die Curve gezogene Tangente die Hauptaxe in T schneidet, so wird der Abschnitt MT die *Subtangente* genannt. Aus der Gleichung der Tangente folgt der Axenabschnitt $CT = a^2 : x'$ also ist die Subtangente

$$MT = \frac{a^2}{x'} - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Als die Länge n der Normale bezeichnet man gewöhnlich das von der Hauptaxe abgeschnittene Segment PN:

$$PN^2 = PM^2 + MN^2 = y'^2 + \frac{b^4}{a^4} x'^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2\right).$$

Wenn aber b' der zu CP conjugirte Halbmesser ist, so ist die Klammergröfse gleich b'^2 (§ 184). Also ist *die Länge der Normale* $n = bb' : a$.

Wenn die Normale bis zum Schnitt mit der kleinen Axe verlängert wird, so zeigt man in derselben Art, dafs dieses Segment die Länge $ab' : b$ hat. Die Vergleichung beider Er-

gebnisse liefert die Sätze: *Die durch die Axen abgeschnittenen Segmente der Normale ergeben ein Product gleich dem Quadrat des zur Tangente parallelen Halbmessers, und ein constantes Verhältnis, nämlich gleich dem der Quadrate der Halbaxen.*

B. 1) *Das Rechteck aus der Normale und dem Abstand der Tangente vom Centrum ist constant und gleich dem Quadrat der kleinen Halbaxe.*

Denn dieser Abstand p wurde § 184. 2) gleich $ab:b'$ gefunden.

2) Die Länge der Normale kann auch in Function ihres Neigungswinkels α nach § 181. 1) ausgedrückt werden

$$n = \frac{b^2}{p} = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)}} = \frac{\pm a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \alpha)}}.$$

3) Die Axen einer Ellipse halbiren die Winkel der Durchmesser CD, CD', welche auf der Normale des Punktes P Segmente PD, PD' abschneiden, die dem zu CP conjugirten Halbmesser gleich sind.

Denn die Punktepaare NN' und DD' sind harmonisch, weil $PN \cdot PN' = PD^2$ (§ 14), also mufs auch das Durchmesserpaar CD, CD' zu dem Rechtwinkelpaar CN, CN' harmonisch sein (§ 57). Dies liefert eine neue Construction der Axen aus zwei conjugirten Durchmessern $CP = a'$, $CQ = b'$, indem man von P das Perpendikel auf CQ fällt und b' darauf abträgt bis D und D'.

4) Die Längen CD, CD' in 4) sind bez. $a + b$, $a - b$.

192. **Normalen aus einem Punkt.** Die Gleichung der Normale $a^2y'x \mp b^2x'y = c^2x'y'$ in § 189 drückte eine Relation aus, die zwischen den Coordinaten $x' | y'$ eines Punktes in der Curve und den Coordinaten $x | y$ irgend eines Punktes in der Normale vom Fufspunkt $x' | y'$ besteht. Nun kann man die Normalen des Kegelschnittes suchen, welche durch einen beliebig gegebenen Punkt gehen; es sind dann ihre Fufspunkte anzugeben. Analytisch sind also in der Gleichung der Normale die Coordinaten $x | y$ eines Punktes gegeben und die des Fufspunktes $x' | y'$ aus jener und der Curvengleichung zu bestimmen. Indem wir die gegebenen Coordinaten accentuiren und die gesuchten von den Accenten befreien, erhalten wir für die Fufspunkte der durch $x' | y'$ gehenden Normalen die neben der Curvengleichung zu erfüllende Relation

$$c^2xy \pm b^2y'x - a^2x'y = 0.$$

Der durch diese Gleichung dargestellte Ort zweiten Grades geht durch den gegebenen Punkt $x'|y'$ und das Centrum $0|0$ der gegebenen Curve. Da eine blofse Paralleltransformation die linearen Glieder zum Verschwinden bringt, ist der Ort eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten zu den Axen des gegebenen Kegelschnittes parallel sind. Die beiden Curven haben im algebraischen Sinn vier Schnittpunkte (§ 23) und eine nähere Untersuchung zeigt, dafs sie sämmtlich reell sein können, dafs aber stets zwei reell sein müssen. *Von einem beliebigen Punkt der Ebene gehen also vier Normalen der Centralcurve aus, von denen mindestens zwei reell sind.*

Für einen Punkt $x'|0$ bez. $0|y'$ einer Axe tritt an Stelle der gleichseitigen Hyperbel die Axe selbst und die dazu normale Gerade $c^2x - a^2x' = 0$ bez. $c^2y \pm b^2y' = 0$. Von den vier Normalen des Punktes fallen also zwei mit der Axe selbst zusammen, da ihre Fufspunkte die Scheitel sind. Die Realität der beiden andern Normalen für Punkte $x'|0$ ist schon § 190 erörtert. Für Punkte $0|y'$ der Nebenaxe sind, im Fall der Hyperbel reelle Normalen stets, im Fall der Ellipse nur, so lange y' zwischen $\pm c^2 : b$ liegt, vorhanden.

Die gefundene gleichseitige Hyperbel kann folgendermafsen definirt werden: sie ist der Ort des Schnittpunktes eines Durchmessers der Curve mit dem von $x'|y'$ aus auf seinen conjugirten gefällten Perpendikel. Denn zu $y = mx$ ist der conjugirte Durchmesser $b^2x \pm ma^2y = 0$ und das durch $x'|y'$ gehende Perpendikel $(x - x') + m(y - y') = 0$ und die Elimination von m gibt obige Gleichung. Da also eine Sehne $x'|y'$, $x|y$ der gleichseitigen Hyperbel senkrecht ist zum conjugirten des $x|y$ enthaltenden Durchmessers, so ist sie, falls $x|y$ auch der gegebenen Curve angehört, wirklich zur Tangente normal.

B. 1) Eine Gerade $\xi x + \eta y + 1 = 0$ ist eine Normale der Curve $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, wenn (vgl. § 181)

$$\frac{a^2}{\xi^2} \pm \frac{b^2}{\eta^2} = c^4 \quad \text{oder} \quad c^4\xi^2\eta^2 \mp b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = 0.$$

2) Die Coordinaten $X' | Y'$ des Schnittpunktes der Tangenten in den Punkten $x' | y'$ und $x'' | y''$ sind

$$X' = \frac{x'y'' + y'x''}{y' + y''}, \quad Y' = \frac{x'y'' + y'x''}{x' + x''},$$

oder auch

$$X' = \frac{x' + x''}{1 + \frac{x'x''}{a^2} \pm \frac{y'y''}{b^2}}, \quad Y' = \frac{y' + y''}{1 + \frac{x'x''}{a^2} \pm \frac{y'y''}{b^2}}.$$

Man findet zunächst nach § 32

$$X' = -a^2 \frac{y' - y''}{x'y'' - y'x''}, \quad Y' = \pm b^2 \frac{x' - x''}{x'y'' - y'x''},$$

kann dies aber umformen mittelst der Relationen

$$x'^2 y''^2 - y'^2 x''^2 = \pm b^2 (x'^2 - x''^2) = -a^2 (y'^2 - y''^2),$$

welche aus der Curvengleichung für $x' | y'$ und $x'' | y''$ folgen.

3) Die Coordinaten $X | Y$ des Schnittpunkts der Normalen in den Punkten $x' | y'$ und $x'' | y''$ sind

$$X = \frac{c^2 x' x'' X'}{a^4}, \quad Y = -\frac{c^2 y' y'' Y'}{b^4},$$

wenn hier $X' | Y'$ die Coordinaten des Tangentenschnittpunktes in 2) bedeuten.

Wenn man endlich noch $x'x''$ und $y'y''$ mit Hilfe der Gleichung der Polare von $X' | Y'$ durch diese Coordinaten rational ausdrückt, so gehört zu jedem Punkt $X' | Y'$ der Ebene als Normalenschnittpunkt

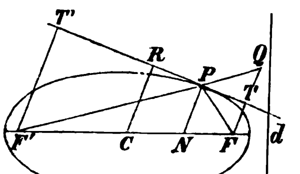
$$X = \frac{c^2 X'}{a^2} \frac{1 \mp \frac{Y'^2}{b^2}}{\frac{X'^2}{a^2} \pm \frac{Y'^2}{b^2}}, \quad Y = \pm \frac{c^2 Y'}{b^2} \frac{1 - \frac{X'^2}{a^2}}{\frac{X'^2}{a^2} \pm \frac{Y'^2}{b^2}}.$$

4) Wann sind die Normalen zweier Curvenpunkte zu einander rechtwinklig? (Vgl. § 181. 5).)

Der Ort des Punktes, von dem aus zwei zu einander rechtwinklige Normalen der Curve gehen, folgt durch 3) aus dem Hauptkreis.

193. **Brennpunkte.** Zu zwei Punkten einer Centralcurve, welche in der Hauptaxe dieselbe Abscisse x haben, gehört als Schnittpunkt ihrer Normalen der Punkt $x' = c^2 x : a^2$ (§ 190) und als Schnittpunkt ihrer Tangenten der Punkt $x'' = a^2 : x$ (§ 191). Diese beiden Punkte der Hauptaxe sind stets reell, wenn x, d. h. die Sehne der beiden Curvenpunkte reell ist, ob diese nun selbst reell oder conjugirt imaginär sind. Im letzteren Fall können wir die Punkte der Curve

in der Art des § 107 definiren, nämlich als die Schnittpunkte des über der Strecke x', x'' als Durchmesser beschriebenen Kreises und der Polare des Punktes x'' bezüglich des Kegelschnittes.



Die Punkte x' und x'', welche zu demselben x gehören, ergeben ein constantes Product ihrer Abscissen $x'x'' = c^2$. Nach § 14 bedeutet aber diese Relation, dafs jedes Punktepaar x', x'' durch die beiden festen Punkte $x = \pm c$ harmonisch getrennt wird.

Die beiden reellen Punkte F, F', welche in der Hauptaxe symmetrisch zum Centrum in der Entfernung $\pm c$ liegen, heifsen *die reellen Brennpunkte* (*foci*) *der Centralcurve.* Die Gröfse $c = ca$ nennt man daher die *Focaldistanz.* Aus gegebenen Axen ergibt sie sich als $\sqrt{(a^2 \mp b^2)}$ für die Ellipse bez. Hyperbel, speciell 0 für den Kreis, $a\sqrt{2}$ für die gleichseitige Hyperbel. Die Brennpunkte befinden sich im Innern der Ellipse ($c^2 \leqq a^2$) oder der Hyperbel ($c^2 \geqq a^2$), liefern also imaginäre Tangenten, aber auch imaginäre Normalen, da sie zwischen den Scheiteln und den Punkten $\pm c^2 : a$ (§ 190) liegen.

Eine analoge Überlegung gilt für die Nebenaxe. Zu zwei Punkten derselben reellen Ordinate y gehören zwei reelle Punkte der Nebenaxe, der Normalenschnittpunkt $y' = \mp c^2 y : b^2$ und der Tangentenschnittpunkt $y'' = \pm b^2 : y$. Sie gestatten umgekehrt jene Punkte als Schnittpunkte eines Kreises und einer Geraden zu definiren. Die Abstände der Punkte eines Paares vom Centrum ergeben wiederum ein constantes, aber wesentlich negatives Product $y'y'' = -c^2$. Daher liegen y' und y'' wieder zu zwei festen, aber imaginären Punkten $y = \pm ci$ harmonisch. Dieselben können in manchen Aufgaben durch ihre reellen Stellvertreter $y = \pm c$ (§ 16) ersetzt werden.

Die beiden conjugirt imaginären Punkte der Nebenaxe $y = \pm ci$ sind als *die imaginären Brennpunkte der Curve* zu bezeichnen. *Somit haben die Centralcurven vier Brennpunkte,* aber nur zwei reelle in der Hauptaxe; nur für den Kreis

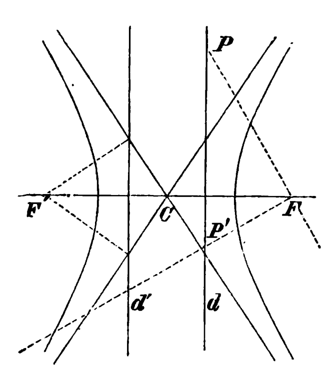
fallen sie sämmtlich in sein Centrum. Wir werden uns in diesem Kapitel nur mit den Eigenschaften der reellen Brennpunkte beschäftigen.

194. **Directrix (Leitgerade) des Kegelschnittes heifst die Polare eines Brennpunktes.** Die zu dem reellen Brennpunkt $\pm c$ gehörige Directrix ist (§ 181) die reelle Gerade

$$\pm cx = a^2, \quad \text{oder} \quad a \mp ex = 0,$$

welche in den Entfernungen $\mp a^2 : c$ auf der Hauptaxe senkrecht steht. Auf allen durch den Brennpunkt gehenden Sehnen, sogenannten *Focalsehnen*, sind die stets reellen Endpunkte durch den Brennpunkt und den Schnittpunkt mit der Directrix harmonisch getrennt. Auch ist die Directrix die Berührungssehne des vom Brennpunkt ausgehenden imaginären Tangentenpaares.

Ein Punkt P oder $a^2 : c \,|\, y'$ der einen Directrix d hat eine durch den zugehörigen Brennpunkt F gehende Polare (§ 157) $\frac{x}{c} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1$, während seine Verbindungsgerade mit dem Brennpunkt die Gleichung ergibt $y'(x - c) \mp \frac{b^2}{c} y = 0$ (§ 35). Die beiden Geraden sind aber zu einander rechtwinklig, — natürlich ebensowol, wenn wir c durch $-c$ ersetzen, — d. h. *die Polare eines Punktes der Directrix ist die zu seiner Verbindungsgeraden mit dem Brennpunkt normale Focalsehne.* Man kann diesen Satz auch so formuliren: Harmonische Pole P, P' auf der Directrix spannen am zugehörigen Brennpunkt einen rechten Winkel PFP'. Den kürzesten Ausdruck dieser überaus wichtigen Focaleigenschaft bietet die Redeweise des § 159: *Conjugirt harmonische Polaren aus einem Brennpunkt sind zu einander rechtwinklig.*



*195. **Allgemeine Definition der Brennpunkte.** Die vorstehende Entwickelung, welche von den Normalen aus zu den Brennpunkten hinleitet, führt zu dem Satz: Die Brenn-

punkte sind diejenigen Punkte, welche für die Schnittpunkte ihrer Polare mit der Curve zugleich die Normalenschnittpunkte sind. In der Tat schneidet die Polare des Brennpunkts zugleich die Fufspunkte der von ihm ausgehenden imaginären Normalen aus, weil nach § 190 $x = \pm c : e^2$ und $c > e^2 a$ ist. Dies besagt aber, dafs die von einem Brennpunkt ausgehenden Tangenten zu sich selbst normal sind, also die absoluten Richtungen des § 58 haben müssen. Dasselbe folgt auch aus dem Satz, dafs die conjugirten Polaren des Brennpunkts Rechtwinkelpaare sind, weil die gemeinsamen harmonische Strahlen derselben absoluter Richtung sind (§ 58).

Nun lassen sich aus den unendlich fernen absoluten Punkten zwei Paare conjugirt imaginärer Tangenten an einen reellen Kegelschnitt ziehen, die *das Parallelogramm der Tangenten von absoluter Richtung* (das umgeschriebene isotrope Parallelogramm) bilden. Von den vier endlichen Ecken desselben müssen wirklich zwei reell und zwei conjugirt imaginär, die beiden im Endlichen gelegenen Diagonalen also reell sein; dieselben sind schon infolge der harmonischen Eigenschaften des Vierseits (§ 159) zu einander rechtwinklige Durchmesser, d. h. mit den Axen identisch. Man gelangt so zu der nicht nur für Curven des zweiten Grades gültigen allgemeinen Definition: *Brennpunkte einer Curve heifsen die Schnittpunkte ihrer Tangenten absoluter Richtung.*

Die Directrixen als Polaren der Brennpunkte schneiden auf dem Kegelschnitt die imaginären Berührungspunkte der vier Tangenten absoluter Richtung aus. Daher sind dies auch die Schnittpunkte der Curve mit ihrem Hauptkreis (§ 181. 5), denn ihre Tangente ist auf sich selbst normal. Da demnach ihr Halbmesserquadrat $a^2 \pm b^2$ beträgt, so ist die Länge ihrer conjugirten, d. h. in absoluter Richtung gemessenen Halbmesser Null.

Die Gleichungen der Tangentenpaare von den Richtungscoefficienten $\pm i$ folgen leicht (§ 181. 2)) als $(y \mp ix)^2 + c^2 = 0$, diejenigen der Tangentenpaare der Brennpunkte als

$$(x \mp c)^2 + y^2 = 0, \quad x^2 + (y \pm ci)^2 = 0.$$

Offenbar stellen alle diese Gleichungspaare dieselben vier Tangenten dar.

Zugleich erinnern die letzten Gleichungen daran, dafs die reellen und die imaginären Brennpunkte *associirte Paare* sind (§ 120). Überhaupt erkennt man, dafs die in den §§ 193, 194 benutzten Kreise, welche den Vierecken der Normalen und Tangenten umgeschrieben sind, conjugirte Kreisbüschel bilden, in denen die Brennpunkte als die Grenzpunkte auftreten (§§ 124, 126).[41])

196. **Brennstrahlen** (Focalradien) eines Curvenpunktes P heifsen die Segmente FP, $F'P$ seiner Verbindungsgeraden mit den Brennpunkten F, F'.

Ist die Entfernung eines Curvenpunktes vom Brennpunkt $c|0$ auszudrücken, so können wir in dem Quadrat $(x'-c)^2+y'^2$ derselben y'^2 mittelst der Curvengleichung eliminiren. Unter Berücksichtigung der Definition $c^2 = a^2 \mp b^2$ entsteht so der Ausdruck durch x allein $e^2x'^2 - 2cx' + a^2$ oder

$$(x'-c)^2 + y'^2 = \left(\frac{c}{a}x' - a\right)^2 = (ex' - a)^2.$$

Somit ist die Länge des Brennstrahls selbst eine lineare Function der Abscisse des Curvenpunktes.

Betrachten wir nur die absolute Länge FP, so müssen wir für sie die positive Wurzel aus $(ex' - a)^2$ wählen. Dieselbe ist, falls die Curve eine Ellipse ist,

$$FP = a - ex',$$

denn die Excentricität e ist kleiner als Eins (§ 170) und für reelle Punkte ist $x'^2 \leqq a^2$.

In der Hyperbel dagegen, wo $e > 1$ ist, hat $a - ex'$ nur für negatives x' einen positiven Wert, also für jeden Punkt auf demjenigen Ast, in dessen Innern der gewählte Brennpunkt nicht liegt. Für ein positives x', d. h. einen Punkt des F umschliefsenden Astes, gibt aber, da dann $x \geqq a$, $ex' - a$ den positiven Wert des Brennstrahls.

197. **Definition aus Brennpunkt und Directrix.** Der Ausdruck für die Länge des Brennstrahls von $x|y$ liefert, gleich Null gesetzt, die Gleichung $ex - a = 0$ der Directrix,

welche zu dem Brennpunkt gehört. Daher ist sein Wert dem Abstand des Curvenpunktes $x \mid y$ von dieser Geraden proportional, denn dieser wird, abgesehen vom Vorzeichen, gegeben durch $x - \frac{a}{e}$ (§ 37). In der Tat setzt sich so aus x und dem Abstand $a : e$ der Directrix vom Centrum ihr Abstand vom Punkte $x \mid y$ zusammen.

A F

Wir erkennen als wichtige Eigenschaft der Kegelschnitte: *Die Entfernung eines Punktes der Curve vom Brennpunkt steht zu seiner Entfernung von der Directrix in einem constanten Verhältnis, nämlich gleich der Excentricität e.* Dasselbe gilt ebenso für das andere Paar aus Brennpunkt und Directrix.

Umgekehrt kann ein Kegelschnitt als der Ort eines Punktes definirt werden, dessen Entfernung von einem festen Punkt, dem Brennpunkt F, zu seinem Abstand von einer festen Geraden, der Directrix d, proportional ist. Man kann hiernach die Curve leicht construiren und ihre ganze Theorie entwickeln. Ist nämlich $x_0 \mid y_0$ der Brennpunkt, $\xi x + \eta y + 1 = 0$ die Gleichung der Directrix, e die Verhältniszahl, so kann die Gleichung des Ortes sofort geschrieben werden als

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{e^2}{\xi^2 + \eta^2} (\xi x + \eta y + 1)^2,$$

denn die rechte Seite ist das Quadrat de e-fachen Abstandes. Die Gleichung stellt, je nachdem e kleiner oder gröfser als Eins ist, eine Ellipse oder eine Hyperbel dar, deren Axen leicht zu ermitteln sind.

Man kann diese Eigenschaft auch so aussprechen: Wenn eine Curve so beschaffen ist, dafs die Entfernung irgend eines ihrer Punkte von einem Fixpunkt als eine rationale lineare Function seiner Coordinaten ausgedrückt werden kann, so ist die Curve ein Kegelschnitt mit dem Fixpunkt als Brennpunkt.[42])

B. Die Brennpunkte der aus einem Punkt einer Ellipse als Centrum und mit der zugehörigen Tangente und Normale als Axen beschriebenen Ellipsen, welche die kleine Axe der gegebenen Ellipse in ihrem Centrum berühren, liegen auf zwei con-

centrischen Kreisen, deren Radien die Summe und Differenz der Halbaxen derselben sind.

198. **Focalgleichung.** Die Gleichung des § 196 kann auch als das Resultat der Transformation der Axengleichung zum Brennpunkt $c|0$ als Nullpunkt angesehen werden, indem man sie nur schreibt

$$(x - c)^2 + y^2 = (ex - a)^2 = [e(x - c) \mp p]^2.$$

Dabei ist $x - c$ die vom Brennpunkt aus gezählte Abscisse und

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$$

offenbar der zur Hauptaxe senkrechte Brennstrahl oder die Ordinate im Brennpunkt. Diese heifst der *Linearparameter* ($2p$ = latus rectum) des Kegelschnittes.

Gebräuchlicher ist es, Polarcoordinaten einzuführen, die vom Brennpunkt und der Hauptaxe aus gezählt werden. Dann ist $x - c = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, wo θ die Anomalie des Brennstrahls r heifst. Nach § 196 haben wir für die Ellipse daher $r = a - ex = p - er\cos\theta$ zu setzen und erhalten damit als *die Focalgleichung der Ellipse*

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \quad \left(p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right).$$

Setzen wir umgekehrt für die Hyperbel $r = ex - a = p + er\cos\theta$, so wird *die Focalgleichung der Hyperbel*

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \quad \left(p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\right).$$

Dieselbe liefert positive Werte von r nur für Anomalien, die, vom Zeichen abgesehen, gröfser sind als der halbe Asymptotenwinkel Θ $\left(\cos\theta < \frac{1}{e}, \text{ § } 177\right)$, jedoch negative oder rückwärts abzutragende r für kleinere Anomalien. Will man also nur positive Brennstrahlen, so stellt die Gleichung nur den den Brennpunkt umschliefsenden Ast der Hyperbel dar $(\Theta < \theta < 2\pi - \Theta)$. Den andern Ast definirt dann ebenso die Gleichung

$$r = \frac{-p}{1 + e\cos\theta} \quad (\pi - \Theta < \theta < \pi + \Theta),$$

welche aus der ersten hervorgeht, indem man $-r|\pi+\theta$ statt $r|\theta$ schreibt (§ 6), und die so keine eigentlich neue Gleichung ist.

Die auf den Brennpunkt $-c|0$ bezogenen Focalgleichungen der Ellipse bez. Hyperbel lauten

$$r=\frac{p}{1-e\cos\theta}, \text{ bez. } r=\frac{p}{1+e\cos\theta}.$$

B. 1) Das harmonische Mittel zwischen den Segmenten einer Focalsehne ist constant und dem Linearparameter gleich.

Denn wenn der Brennstrahl FP, rückwärts verlängert, die Curve noch in P' schneidet, so ist

$$FP=\frac{p}{1+e\cos\theta}, \; FP'=\frac{p}{1-e\cos\theta}, \text{ somit } \frac{1}{FP}+\frac{1}{FP'}=\frac{2}{p}.$$

Wenn dagegen P und P' auf *verschiedenen* Ästen dieser Hyperbel liegen, so müssen ihre Brennstrahlen mit verschiedenen Vorzeichen eingeführt werden.

2) Das Rechteck aus den Segmenten einer Focalsehne steht zur ganzen Sehne in einem constanten Verhältnis.

Dieser Satz ist nur ein anderer Ausdruck des letzten; aber man erkennt auch direct, dafs die Gröfsen $FP\cdot FP'$, $PF+FP'$ in einem constanten Verhältnis stehen, denn sie sind

$$\frac{p^2}{1-e^2\cos^2\theta} \quad \text{und} \quad \frac{2p}{1-e^2\cos^2\theta}.$$

3) Jede Focalsehne gibt, mit der Hauptaxe multiplicirt, das Quadrat des zu ihr parallelen Durchmessers.

Denn das Quadrat des Halbmessers, der mit der Hauptaxe einen Winkel $\vartheta=\theta$ bildet ist (§ 170)

$$R^2=\frac{\pm b^2}{1-e^2\cos^2\theta},$$

und daher ist die in 2) gefundene Länge der Sehne

$$PF+FP'=\frac{2R^2}{a}.$$

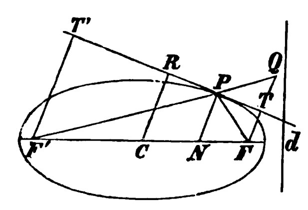
4) Die Summe der zu zwei conjugirten Durchmessern parallelen Focalsehnen ist constant.

Denn die Summe der Quadrate zweier conjugirten Durchmesser ist constant (§ 184).

5) Die Summe der Reciproken zweier zu einander rechtwinkligen Focalsehnen ist constant.

199. **Summe bez. Differenz der Brennstrahlen.** Ein Punkt $x'|y'$ einer Ellipse hat nach dem Vorstehenden vom

Brennpunkt F oder $c|0$, bez. vom Brennpunkt F' oder $-c|0$ die positiven Entfernungen



$$FP = r = a - ex', \quad F'P = r' = a + ex'.$$

Daher ist $FP + F'P = r + r' = 2a$: *Die Summe der Brennstrahlen eines Ellipsenpunktes ist constant und der grofsen Axe gleich.*

Dagegen hat ein Punkt der Hyperbel, je nachdem er auf dem positiven oder negativen Ast liegt, von F bez. F' die positiven Entfernungen

$$r = ex' - a, \quad r' = ex' + a \quad \text{oder} \quad r = a - ex', \quad r' = -a - ex'.$$

Also ist entweder $r' - r = 2a$ oder $r - r' = 2a$: *Die Differenz der Brennstrahlen eines Hyperbelpunktes ist constant und der Hyperbelaxe gleich.*

In allen Fällen ist aber das Product (§ 196)

$$rr' = \pm(a^2 - e^2x'^2) = \pm\left(a^2 - x'^2 \pm \frac{b^2}{a^2}y'^2\right) = \frac{a^2}{b^2}x'^2 + \frac{b^2}{a^2}y'^2 = b'^2.$$

In den Centralcurven ist das Rechteck der Brennstrahlen eines Punktes gleich dem Quadrat des dem seinen conjugirten Halbmessers.

Mittelst des Schlusses, dafs in einem Dreieck eine Seite kleiner ist als die Summe der beiden andern, weist man leicht geometrisch nach, dafs *für jeden Punkt Q aufserhalb, bez. innerhalb der Ellipse*

$$FQ + F'Q > 2a, \quad \text{bez.} \quad FQ + F'Q < 2a,$$

und für Q aufserhalb, bez. innerhalb der Hyperbel

$$F'Q - FQ < 2a, \quad \text{bez.} \quad F'Q - FQ > 2a.$$

Daher ist die bifocale Relation $(r \pm r')^2 = 4a^2$ für Punkte der Ellipse bez. Hyperbel charakteristisch oder kann als die bipolare Gleichung dieser Curven bezeichnet werden (§ 6).

200. **Fadenconstruction.** Die bifocale Relation liefert der elementaren Geometrie die Definition der centralen Kegelschnitte: *Der Ort der Spitze eines Dreiecks, von dem die Basis $2c$ und die Summe bez. Differenz der Seiten ($= 2a$) gegeben ist, ist eine Ellipse bez. Hyperbel mit den Basisenden als Brennpunkten und der Hauptaxe $2a$.*

Zum directen Beweis dieser Umkehrung wählt man die Basis zur x-Axe, ihre Mitte zum Nullpunkt und erhält die Gleichung des Ortes

$$\sqrt{[y^2 + (x + c)^2]} \pm \sqrt{[y^2 + (x - c)^2]} = 2a.$$

Durch Entfernung der Wurzelgröfsen nimmt sie die Form an

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Wenn die *Summe* der Seiten gegeben ist, so ist $a > c$, der Coefficient von y^2 daher positiv und der Ort eine *Ellipse.* Wenn aber die *Differenz* gegeben ist, so ist $a < c$, der Coefficient von y^2 negativ und der Ort eine Hyperbel.

Diese Definition gibt auch in der sog. *Fadenconstruction* die Mittel, eine Ellipse oder Hyperbel mechanisch zu beschreiben. Wenn die Enden eines Fadens an zwei festen Punkten F und F' befestigt sind, so beschreibt ein Stift, der sich derart bewegt, dafs er den Faden immer gleichmäfsig gestreckt erhält, eine Ellipse, von welcher F und F' die Brennpunkte sind, und deren grofse Axe gleich der Länge des Fadens ist.

Um eine Hyperbel zu beschreiben, lasse man ein Lineal an einem Ende F drehbar befestigt sein; wenn dann ein am festen Punkt F' befestigter Faden auch an einem Punkt des Lineals R befestigt ist und durch einen Ring in P gespannt erhalten wird, so beschreibt der Punkt P bei der Drehung des Lineals ein endliches Stück eines Hyperbelastes. Denn da die Summe von $F'P$ und PR constant ist, so mufs es die Differenz von FP und $F'P$ auch sein.

201. **Der Winkel der Brennstrahlen eines Curvenpunktes hat die Tangente und die Normale derselben zu Halbirungslinien.** Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des in § 193 ausgesprochenen Satzes, dafs Tangente und Normale eines Punktes die Hauptaxe in Punkten schneiden, welche zu den Brennpunkten harmonisch liegen. Denn dann müssen nach § 57 auch die Brennstrahlen FP, $F'P$ jenes Punktes in Bezug

auf PT und PN harmonisch, also in Bezug auf das rechtwinklige Paar PT, PN speciell symmetrisch sein (vgl. § 96).

Zum directen Beweis bestimmen wir die Winkel der Brennstrahlen mit der Tangente, indem wir ihre Sinus durch die Coordinaten ausdrücken. Zunächst berechnen wir die Abstände der Tangente von den Brennpunkten. Die Entfernung von $\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} - 1 = 0$ von $c \mid 0$ ist (§ 37)

$$FT = \frac{1 - \frac{cx'}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right)}} = \frac{1 - \frac{ex'}{a}}{\frac{b'}{ab}} \qquad (\text{§ 184. 2})).$$

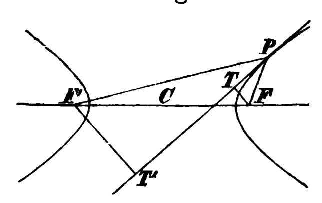
Also ist $\qquad FT = \frac{b}{b'}(a - ex') = \frac{b}{b'} \cdot FP$

und ebenso $\quad F'T' = \frac{b}{b'}(a + ex') = \frac{b}{b'} \cdot F'P.$

Für die Hyperbel gelten dieselben Formeln mit einem bloſsen Zeichenwechsel (§ 196).

Daher ist $\frac{FT}{FP} = \sin FPT = \frac{b}{b'}, \quad \frac{F'T'}{F'P} = \sin F'PT' = \frac{b}{b'},$

d. h. die Tangente bildet mit den Brennstrahlen ihres Berührungspunktes gleiche Winkel. Aus der Betrachtung der Lage der Tangente zur Curve ist offenbar, *daſs die Tangente der Ellipse die äuſsere, die Tangente der Hyperbel aber die innere Halbirungslinie des Winkels der Brennstrahlen ist.* Dieser Satz erlaubt die Tangenten des durch die Fadenconstruction erhaltenen Kegelschnittes sofort anzugeben.

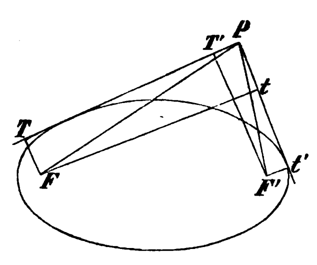


Auch liegt hierin die Erklärung des Namens Brennpunkte: Lichtstrahlen, welche von F ausgehen, werden von der Ellipse nach F' convergent reflectirt, und von der Hyperbel so, daſs sie von F' aus divergiren.

202. Aus dem Hilfssatz des § 201 folgert man:

$$FT \,.\, F'T' = \frac{b^2}{b'^2}(a^2 - e^2x'^2) = b^2 \qquad (\text{§ 196}):$$

Das Rechteck aus den Brennpunktsabständen der Tangente ist constant und gleich dem Quadrat der halben Nebenaxe.



Somit ist für zwei beliebige Tangenten

$$FT \,.\, F'T' = Ft \,.\, F't',$$

oder

$$\frac{FT}{Ft} = \frac{F't'}{F'T'}.$$

Aber $\frac{FT}{Ft}$ ist das Verhältnis der Sinus der Teile, in welche der Strahl FP den Winkel der Tangenten teilt, und $\frac{F't'}{F'T'}$ ist das Verhältnis der Sinus der Teile, in welche $F'P$ denselben Winkel teilt; wir haben daher

$$\sphericalangle\, TPF = \sphericalangle\, t'PF'.$$

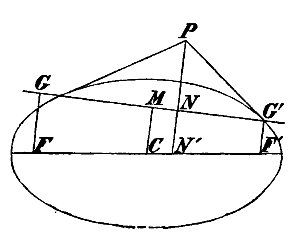
Daher wird $\sphericalangle\, TPt'$ und FPF' von derselben Geraden halbirt: *Zwei Tangenten eines Kegelschnittes haben dieselben Winkelhalbirenden, wie die Brennstrahlen ihres Schnittpunktes.* Hieraus geht der Satz des § 201 als Specialfall hervor, sobald der Tangentenschnittpunkt in die Curve selbst rückt.

Die Beispiele zeigen, in welcher Weise sich infolge der Analogie zwischen den Gleichungen der Tangente und Polare, einige der auf erstere bezüglichen Eigenschaften auf die letztere übertragen.

B. 1) Wenn sich ein Punkt in einer festen Senkrechten zur Axe bewegt, so dreht sich die von ihm auf seine Polare gefällte Senkrechte um einen festen Punkt in der Axe.[43])

Denn der durch jene Senkrechte bestimmte Abschnitt in der Axe ist (wie in § 190) $= e^2x'$ und daher mit x' constant.

2) Man finde die Längen der vom Centrum und von den Brennpunkten auf die Polare von $x'|y'$ gefällten Senkrechten.



3) Bei der vorigen Construction ist $CM \,.\, PN' = b^2$. Dieser Satz verallgemeinert den in § 191. 1) bewiesenen, nach welchem das Rechteck aus der Normale und dem Centrumsabstand der Tangente constant ist.

4) Man beweise:

$$PN' \,.\, NN' = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - e^2x'^2).$$

Wenn P ein Punkt der Curve ist, so gibt diese Gleichung den bekannten Ausdruck für die Länge der Normale wieder (§ 191).

5) Man beweise: $FG \,.\, F'G' = CM \,.\, NN'$. Für den speciellen Fall, wo P in der Curve liegt, geht dies über in

$$FG \,.\, F'G' = FT \,.\, F'T' = b^2.$$

203. Verlängert man das von einem Brennpunkt F auf die Tangente in P gefällte Perpendikel FT über sie hinaus (Fig. § 201), so schneidet dasselbe auf dem Brennstrahl $F'P$ eine Länge $F'Q$ ab, welche gleich der Hauptaxe ist. Denn aus $\sphericalangle FPT = F'PT'$ folgt $FT = TQ$, $FP = PQ$ und Q liegt bei der Ellipse bez. Hyperbel so, dafs $F'Q$ als Summe bez. Differenz von $F'P$ und PQ erscheint.

Aus $FC = \frac{1}{2}FF'$, $FT = \frac{1}{2}FQ$ folgt dann auch $CF = \frac{1}{2}F'Q = a$ und $CT \parallel F'P$. Ebenso ergibt sich $CT' = a$, $CT' \parallel FP$. *Die Fufspunkte T, T' der von den Brennpunkten F, F' auf eine Tangente des Kegelschnittes gefällten Perpendikel liegen auf dem Scheitelkreis* (§§ 171. 175), denn sie haben vom Centrum die constante Entfernung a. Man bestätigt dies auch direct (vgl. B. 1), 4)).

Umgekehrt liefert dieser Satz eine Construction der Centralcurven aus ihren Tangenten: Man zieht von einem Punkt F nach den Punkten P des Scheitelkreises Strahlen FP und PT senkrecht zu FP. *Wenn ein rechter Winkel sich so bewegt, dafs sein Scheitel P einen Kreis durchläuft und ein Schenkel durch einen festen Punkt geht, so berührt der andere PT einen Kegelschnitt, der F zum Brennpunkt hat.* Eine Ellipse oder Hyperbel entsteht, je nachdem F innerhalb oder aufserhalb des Kreises liegt.

B. 1) Die Länge CT einer Geraden, die durch das Centrum parallel zu einem Brennstrahl FP gezogen und durch die in T berührende Tangente begrenzt wird, ist constant und gleich a.

Diese Länge wird gefunden, indem man den Abstand des Centrums von der Tangente $ab : b'$ durch $b : b' = \sin FPT$ dividirt.

2) Die Normale teilt die Entfernung der Brennpunkte in zwei Abschnitte, welche den Brennstrahlen selbst proportional sind.

Die Entfernung des Fufspunktes der Normale in der x-Axe vom Centrum ist $= e^2x'$ (§ 190); seine Entfernungen von den

Brennpunkten sind somit $c + e^2x'$, $c - e^2x'$, Gröfsen, welche offenbar das $e$fache der Brennstrahlen $a + ex'$, $a - ex'$ sind.

3) Die Fufspunkte der Normalen zur Ellipse von irgend einem Punkt in der kleinen Axe aus liegen auf dem durch denselben und die beiden Brennpunkte gehenden Kreis (§ 192).

4) Polargleichung des Ortes der Fufspunkte der Senkrechten, die von den Brennpunkten auf die Tangente gefällt werden.

Der Abstand des Brennpunktes von der Tangente wird ausgedrückt, indem man in die Gleichung von § 181. 1) einsetzt $x' = c$, $y' = 0$. Demnach ist die Polargleichung des Ortes

$$r = \sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha \pm b^2 \sin^2 \alpha)} - c \cos \alpha,$$

oder $$r^2 + 2cr \cos \alpha + c^2 \cos^2 \alpha = a^2 \cos^2 \alpha \pm b^2 \sin^2 \alpha,$$

oder $$r^2 + 2cr \cos \alpha = \pm b^2.$$

Dies ist nach § 113 die Polargleichung eines Kreises, dessen Centrum in der x-Axe in der Entfernung $-c$ vom Brennpunkt liegt und den Radius a hat.

5) Nimmt man vom Brennpunkt F in Bezug auf jede Tangente den symmetrischen Punkt Q, so ist der Ort von Q der um den andern Brennpunkt F' mit dem Radius $2a$ beschriebene Kreis.

6) Man bilde die Gleichung für den Ort der Fufspunkte der Senkrechten zu den Tangenten aus den Punkten der kleinen Axe, welche vom Mittelpunkt die Focaldistanz haben.

Die Quadratsumme der Distanzen einer Tangente von den Punkten $0 \,|\, \pm c$ ist constant und gleich $2a^2$.

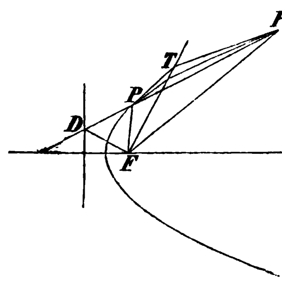
7) Der Ort des Schnittpunktes der Normale vom Brennpunkt auf die Tangente eines Centralkegelschnittes mit der vom Centrum nach dem Berührungspunkt gezogenen Geraden ist die entsprechende Directrix.

8) Der Ort des Schnittpunktes der Senkrechten vom Centrum auf die Tangente mit dem Brennstrahl des Berührungspunktes ist ein Kreis.

9) Der Ort des Fufspunktes der Normale, die man vom Schnittpunkt der Tangente mit der kleinen Axe auf den Brennstrahl des Berührungspunktes fällt, ist der Kreis aus dem Brennpunkt durch die Scheitel der kleinen Axe.

204. **Der durch eine Sehne am Brennpunkt gespannte Winkel.** Wir bezeichnen, unter Voraussetzung der Axengleichung, die Endpunkte P_1, P_2 der Sehne mit $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$, ihren Pol T mit $x' \,|\, y'$, die Brennstrahlen dieser Punkte mit

r_1, r_2, r' und ihre Anomalien mit θ_1, θ_2, θ', bezogen auf F oder $c \mid 0$. Alsdann gelten die Gleichungen:



$$\cos\theta' = \frac{x'-c}{r'},\quad \sin\theta' = \frac{y'}{r'} \text{ und}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{x_1-c}{r_1},\quad \sin\theta_1 = \frac{y_1}{r_1}.$$

Demnach ist für den Winkel, den die Länge TP der vom Pol ausgehenden Tangente am Brennpunkt spannt,

$$\cos(\theta' - \theta_1) = \frac{(x'-c)(x_1-c)+y'y_1}{r'r_1}.$$

Aber mittelst der Gleichung der Tangente $\frac{x'x_1}{a^2} \pm \frac{y'y_1}{b^2} = 1$ eliminiren wir $y'y_1$ und erhalten

$$r'r_1\cos(\theta'-\theta_1) = x'x_1 - c(x'+x_1) + c^2 \pm b^2\left(1 - \frac{x\,x_1}{a^2}\right)$$

$$= e^2x'x_1 - c(x'+x_1) + a^2 = (a-ex')(a-ex_1);$$

oder, weil $r_1 = a - ex_1$ ist,

$$\cos(\theta'-\theta_1) = \frac{a-ex'}{r'}.$$

Weil dieser Wert nur von den Coordinaten $x' \mid y'$ abhängt und die Coordinaten $x_1 \mid y_1$ des Berührungspunktes nicht enthält, so spannt auch die zweite Tangente aus $x' \mid y'$ denselben Winkel $\theta' - \theta_1 = \theta' - \theta_2$ am Brennpunkt: *Es wird also der von irgend einer Sehne am Brennpunkt gespannte Winkel PFP' durch die Verbindungslinie des Brennpunktes mit ihrem Pol T halbirt*[44]) und zwar ist

$$\cos\frac{\delta}{2} = \frac{a-ex'}{\sqrt{[(x'-c)^2+y'^2]}}.$$

Eine durch den Brennpunkt selbst gehende Sehne spannt an ihm einen gestreckten Winkel (π). Daher ergibt sich als ein Specialfall der Satz des § 194 in der Form: *Der Brennstrahl des Pols einer Focalsehne ist zu ihr senkrecht.* Nun hat die Focalsehne FT ihren Pol D im Schnitt der Directrix mit der Polare von T, $\sphericalangle DFT$ ist ein Rechter, somit ist FD die äufsere Halbirungslinie der Winkel PTP' aller durch D gehenden Sehnen.

B. 1) Der Winkel, welchen das zwischen zwei festen Tangenten enthaltene Segment einer veränderlichen Tangente am Brennpunkt spannt, ist constant.

Führt man die Brennstrahlen der Berührungspunkte ein, so ist der bezeichnete Winkel die Hälfte desjenigen, der durch die Berührungssehne der festen Tangenten gespannt wird.

2) Beschreibt man über dem zwischen den Scheiteltangenten (der Hauptaxe) enthaltenen Segment einer Tangente als Durchmesser einen Kreis, so geht derselbe durch die Brennpunkte.

3) Wenn zwei feste Punkte Q, Q' eines Kegelschnittes mit einem veränderlichen Punkt P desselben verbunden werden, so fassen die Verbindungslinien in der Directrix des Kegelschnittes ein Segment zwischen sich, welches am zugehörigen Brennpunkt einen constanten Winkel spannt.

Denn, bezeichnen wir die Schnittpunkte jener beiden Secanten der Curve mit der Directrix durch R, R', so ist nach dem Text

$$\sphericalangle PFR = \tfrac{1}{2} \sphericalangle PFQ + \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \sphericalangle PFR' = \tfrac{1}{2} \sphericalangle PFQ' + \frac{\pi}{2},$$

somit $\sphericalangle RFR' = \frac{1}{2} \sphericalangle QFQ'$. Geht die Sehne QQ' durch den Brennpunkt, so ist dieser constante Winkel stets ein Rechter: Die Verbindungsgeraden eines beweglichen Punktes P mit den Enden einer Focalsehne schneiden die Directrix in harmonischen Polen.

Der Satz ist geeignet, ein gutes Beispiel für den Gebrauch der Polarcoordinaten in der Untersuchung der Kegelschnitte zu bilden. Er entspricht übrigens dem Satz von der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen am Kreis.

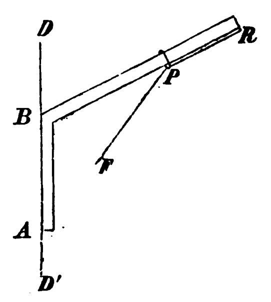
205. Für die Hyperbel gibt wiederum (vgl. § 188) die Beziehung zu den Asymptoten einige Zusätze. Weil diese Tangenten mit unendlich fernem Berührungspunkt sind, *so geht die Directrix durch die Fuſspunkte der vom Brennpunkt auf die Asymptoten gefällten Perpendikel* (§ 204). Man sehe die Figur zu § 194, wo dieser Satz als Specialfall unmittelbar anschlieſst (§ 181. 4)).

Hieraus folgt mittelst $c \sin \Theta = b$ (§ 177): *Der Abstand der Asymptoten von den Brennpunkten ist gleich der halben Nebenaxe b.* Dies ist auch ein specieller Fall von § 203, da die Brennpunktsabstände für die Asymptoten offenbar einander gleich, also gleich b sind.

Der Brennstrahl eines Punktes der Hyperbel ist gleich seiner Entfernung von der Directrix, auf einer Parallelen zur Asymptote

gemessen. Denn die Entfernung vom Brennpunkt ist das $e$fache des Abstandes von der Directrix (§ 197), und die Entfernung von der Directrix verhält sich zur Länge der bezeichneten Parallelen, wie $\cos \Theta = 1 : e$ (§ 177) zu Eins.

Man kann daraus eine Methode zur Erzeugung der Hyperbel durch eine stetige Bewegung ableiten. Ein in B gebrochenes Lineal ABR bewegt sich mit seiner Kante AB längs der festen Linie DD'. Ein Faden von der Länge RB ist an den zwei Punkten R und F befestigt, während ein Ring in P den Faden stets gespannt hält. Dann beschreibt der Punkt P bei der Bewegung des Lineals eine Hyperbel, von welcher F ein Brennpunkt, BR die Richtung einer Asymptote und DD' die Directrix ist; denn PF ist stets gleich PB.



206. **Scheitelgleichung.** Da nur solche Gleichungen, die nicht auf den Mittelpunkt bezogen sind, für Kegelschnitte aller Gattungen (§ 145) gelten, so erweist sich unter den speciellen Gleichungsformen zu vergleichenden Betrachtungen neben der Focalgleichung die folgende als geeignet. Man bezieht die Gleichung auf die Hauptaxe und eine Scheiteltangente und nennt sie die Scheitelgleichung. Sie lautet offenbar für die Ellipse, wenn diese sich auf der positiven Seite der Tangente $y = 0$ befindet,

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

und für die Hyperbel, wenn $y = 0$ den positiven Ast berührt,

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x}{a} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Führen wir durch $b^2 = ap$ nach § 198 den Linearparameter p ein, so sind *die Scheitelgleichungen der Centralcurven*

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a}x^2.$$

Demnach ist das Quadrat der Ordinate in der Ellipse *kleiner,* in der Hyperbel *größer* als das Rechteck aus der Abscisse

und der im Brennpunkt halbirten Sehne $2p$. Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, dafs in der Parabel diese Gröfsen *gleich* sind.

Auf Grund dieser Eigenschaften sind die Namen Ellipse, Hyperbel und Parabel zuerst gegeben worden.[45])

Dieselbe Gleichungsform bleibt offenbar auch noch bestehen, wenn wir sie auf einen Durchmesser und die Tangente in einem seiner Endpunkte beziehen, jedoch ist dann $b'^2 : a'$ nicht die durch den Brennpunkt gehende Ordinate (§ 198. 3)).

207. Zuweilen kann man die Curve mit Vorteil auf *die Tangente und die Normale in einem Curvenpunkt als Coordinatenaxen* beziehen. Damit die x-Axe die Curve in zwei vereinten Punkten schneide, mufs $a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$ ein Quadrat, also $a_{13}{}^2 = a_{11}a_{33}$ sein. Der Berührungspunkt ist der Nullpunkt, wenn $a_{33} = 0$, also auch $a_{13} = 0$ ist. Die Gleichung hat so die Form:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}y = 0.$$

B. 1) *Die Hypotenusen der einem Kegelschnitt eingeschriebenen rechtwinkligen Dreiecke von gegebener Gegenecke gehen durch einen festen Punkt in der Normale derselben.*

Ist $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$ die Gleichung eines Linienpaares, so multipliciren wir diese Gleichung mit a_{11}, die der Curve mit A, subtrahiren und erhalten

$$2(a_{12}A - a_{11}B)\,xy + (a_{22}A - a_{11}C)\,y^2 + 2a_{23}Ay = 0$$

als (§ 40) die Gleichung einer durch die Schnittpunkte des Linienpaares und des Kegelschnittes gehenden Curve. Aber dieselbe kann in $y = 0$ und

$$2(a_{12}A - a_{11}B)\,x + (a_{22}A - a_{11}C)\,y + 2a_{23}A = 0$$

zerlegt werden; daher mufs letztere die Gleichung der die Endpunkte der gegebenen Linien verbindenden Sehne sein. Der Punkt, in welchem diese Sehne die Normale, d. h. die y-Axe, schneidet, ist bestimmt durch seine Ordinate $y_0 = \frac{2a_{23}A}{a_{11}C - a_{22}A}$. Wenn aber die Geraden rechtwinklig sind, ist $C = -A$ (§ 87), der Abschnitt in der Normale also constant und gleich

$$y_0 = -2a_{23} : (a_{11} + a_{22}).$$

Für den Kreis ist y_0 dem Radius gleich, d. h. die Hypotenuse

geht durch das Centrum, für die gleichseitige Hyperbel ist y_0 unendlich grofs, d. h. die Hypotenuse ist immer der Normale parallel. Wenn man daher durch einen Punkt der gleichseitigen Hyperbel zwei zu einander rechtwinklige Sehnen zieht, so ist die von ihm auf die Verbindungssehne ihrer Endpunkte gefällte Normale die Tangente der Curve.

Der Beweis zeigt aber auch, dafs dieser Satz allgemein wahr ist, sobald $C:A$ constant ist. Zieht man also durch einen Curvenpunkt Gerade, die mit der Normale Winkel bilden, für welche das Product der trigonometrischen Tangenten constant ist, so geht die Sehne ihrer Endpunkte durch einen festen Punkt der Normale.

2) Wenn auf einer Tangente eines Kegelschnittes die constante Strecke AB verschoben wird, welches ist der Ort des Schnittpunktes der von A und B an den Kegelschnitt gelegten Tangenten?

Die Gleichung des Paares von Tangenten, welche vom Punkt $x'|y'$ an den auf die feste Tangente $y=0$ bezogenen Kegelschnitt gehen, würde nach § 156 gefunden; für $y=0$ erhalten wir aus ihr eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln nach der Voraussetzung eine constante Differenz haben sollen. Der Ausdruck dieser Bedingung liefert die Gleichung des Ortes, welche sich durch y^2 teilbar und dadurch auf den zweiten Grad reducirt erweist.

Mit Hilfe derselben Gleichung würden wir auch den Ort des Schnittpunktes der Tangenten finden, wenn die Summe, das Product etc. der in der Axe gebildeten Abschnitte gegeben wäre.

208. Wir schliefsen hier einige auf die *Focaleigenschaften der Kegelschnitte* bezügliche Aufgaben und Sätze an und fordern den Leser auf, die fehlenden Beweise zu entwickeln. Die Beispiele 15) — 21) illustriren die Anwendbarkeit der Methode der excentrischen Anomalie (§ 173).

B. 1) In einem Kegelschnitt ist der Brennstrahl eines jeden Punktes gleich der bis zum Schnitt mit der Tangente am Endpunkt der Brennpunktsordinate verlängerten Ordinate des Punktes.

2) Vom Brennpunkt eines Kegelschnittes aus werden gegen die Tangenten desselben unter gegebenem Winkel gerade Linien gezogen; man soll den Ort ihrer Fufspunkte bestimmen.

3) Die Geraden, welche je einen Brennpunkt mit dem Fufspunkt der Normalen vom andern Brennpunkt auf eine Tangente verbinden, schneiden einander in der entsprechenden Normale des Kegelschnittes und halbiren sie.

4) Die Focal-Polargleichung der Sehne, welche die Punkte von den Anomalien $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ verbindet,[46] ist

$$\frac{p}{r}=e\cos\vartheta+\sec\beta\cos(\vartheta-\alpha) \qquad (\S\ 44.\ 3)).$$

5) Die Focal-Polargleichung der Tangente in dem Punkt von der Anomalie α lautet[47]

$$\frac{p}{r}=e\cos\vartheta+\cos(\vartheta-\alpha).$$

6) Die Halbirungslinien der Winkel, welche die Brennstrahlen eines Punktes mit der Hauptaxe bilden, und die Tangente der Curve in diesem Punkt schneiden sich in der Scheiteltangente der Hauptaxe.

7) Geht eine Sehne PP' eines Kegelschnittes durch einen festen Punkt O, so ist $\tan\frac{1}{2}PFO\,.\,\tan\frac{1}{2}P'FO$ constant.

Wir geben einen einfachen geometrischen Beweis dieses Satzes;[48] einen analytischen liefert die Gleichung in 4). Denken wir irgendwo in PP' (Fig. § 203) einen Punkt O genommen, und sei FO das e'fache der Entfernung von O von der Directrix; so gelten, da die Entfernungen von P und O von der Directrix zu PD und OD proportional sind, die Gleichungen

$$\frac{FP}{PD}:\frac{FO}{OD}=\frac{e}{e'} \text{ oder } \frac{\sin PDF}{\sin PFD}:\frac{\sin ODF}{\sin OFD}=\frac{e}{e'}.$$

Also nach § 204 $\cos OFT:\cos PFT=e:e'$, oder, weil (§ 203) PFT die Hälfte der Summe und OFT die Hälfte der Differenz der Winkel PFO und $P'FO$ ist,

$$\tan\tfrac{1}{2}PFO\,.\,\tan\tfrac{1}{2}P'FO=(e-e'):(e+e').$$

8) *Unter welcher Bedingung sind zwei Punkte $x'|y'$, $x''|y''$ die Endpunkte einer Focalsehne?*

Die Bedingung kann in verschiedenen äquivalenten Formen ausgedrückt werden, von denen jedoch zwei vorzüglich brauchbare dadurch erhalten werden, dafs man ausdrückt, es sei $\vartheta''=\vartheta'+\pi$, für ϑ', ϑ'' als die Anomalien dieser Punkte. Die Bedingungen $\sin\vartheta''=-\sin\vartheta'$, $\cos\vartheta''=-\cos\vartheta'$ geben bez.

$$\frac{y'}{a-ex'}+\frac{y''}{a-ex''}=0,\quad \frac{x'-c}{a-ex'}+\frac{x''-c}{a-ex''}=0,\ \text{d. h.}$$

$$a(y'+y'')=e(x'y''+x''y');\ 2ex'x''-(a+ce)(x'+x'')+2ac=0.$$

9) Wenn in den Endpunkten einer Focalsehne die Normalen gezogen sind, so halbirt eine durch ihren Schnittpunkt der grofsen Axe parallel gezogene Gerade die Sehne.

Da jede Normale den Winkel zwischen den Brennstrahlen halbirt, so ist der Schnittpunkt der Normalen der Curve in den Endpunkten einer Focalsehne das Centrum des Kreises, welcher dem von der Sehne und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte mit dem andern Brennpunkt gebildeten Dreieck eingeschrieben ist. Sind aber a, b, c die Seiten eines Dreiecks von den Ecken $x'|y'$, $x''|y''$, $x'''|y'''$, so sind nach § 13. 7) die Coordinaten vom Centrum des eingeschriebenen Kreises

$$x = \frac{ax' + bx'' + cx'''}{a + b + c}, \quad y = \frac{ay' + by'' + cy'''}{a + b + c}.$$

Im gegenwärtigen Fall sind die Coordinaten der Ecken $x' \mid y'$, $x'' \mid y''$, $-c \mid 0$ und die Längen der Gegenseiten bez. $a + ex''$, $a + ex'$, $2a - ex' - ex''$. Daher ist

$$4ay = (a + ex')\,y'' + (a + ex'')\,y'$$

oder mit Hilfe der ersten Relation von 8) $y = \frac{1}{2}(y' + y'')$, was den Satz beweist (vgl. § 192. 3)). In derselben Weise findet man einen Ausdruck für x, welchen die zweite Relation von 8) reducirt auf

$$2ax = (a + ec)(x + x'') - 2ac.$$

10) Die Verbindungslinie des Schnittpunktes der Tangenten in den Endpunkten einer Focalsehne mit dem Schnittpunkt der entsprechenden Normalen geht durch den Brennpunkt und ist die Halbirungslinie des Winkels der Brennstrahlen der Endpunkte der Sehne.[49])

Man findet die Coordinaten des Schnittpunktes der Tangenten analog wie in 9), weil dieser Punkt das Centrum des Kreises ist, der dem dort betrachteten Dreieck auf der Aufsenseite der Basis eingeschrieben ist.

11) Der Ort des Schnittpunktes der Normalen an den Enden einer Focalsehne ist ein Kegelschnitt.

Ist $\alpha \mid \beta$ der Mittelpunkt der Sehne, so ist nach 10)

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(x' + x'') = \frac{a^2(x + c)}{a^2 + c^2}, \quad \beta = \tfrac{1}{2}(y' + y'') = y.$$

Und wenn die Gleichung des durch den Punkt $\alpha \mid \beta$ beschriebenen Ortes bekannt wäre, so würde durch die eben gewonnenen Substitutionen die Gleichung des durch $x \mid y$ beschriebenen Ortes aus ihr abgeleitet werden (§ 192. 4)). Die Focal-Polargleichung des Ortes, welchen der Mittelpunkt der Sehne beschreibt, ist aber nach § 198

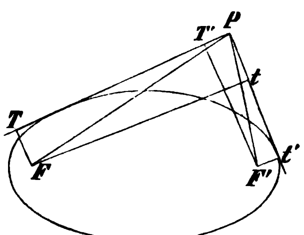
$$r = \tfrac{1}{2}(r' - r'') = \frac{-b^2}{a}\,\frac{e\cos\vartheta}{1 - e^2\cos^2\vartheta},$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten mit dem Centrum als An-

fangspunkt $b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 = b^2 c\alpha$. Daher ist die Gleichung des gesuchten Ortes

$$a^2b^2(x+c)^2 + (a^2+c^2)^2 y^2 = b^2 c(a^2+c^2)(x+c).$$

12) Wenn δ der Winkel zwischen den von einem Punkt P an die Ellipse gezogenen Tangenten ist, und r, r' die Brennstrahlen von P bezeichnen, so ist



$$\cos\delta = \frac{r^2 + r'^2 - 4a^2}{2rr'}.$$

Denn nach § 202 ist

$$\sin TPF . \sin tPF = \frac{FT . F'T'}{PF . PF'} = \frac{b^2}{rr'};$$

man hat aber $\cos FPF' - \cos TPt = 2\sin TPF . \sin tPF$, und $2rr'\cos FPF' = r^2 + r'^2 - 4c^2$.

13) Wenn man die Längen der Tangenten PT, Pt' von P aus durch τ, τ' und die Längen der zu den Tangenten parallelen Halbmesser mit d, d' bezeichnet, so gilt die Relation

$$\tau\tau' + dd' = rr'.$$

14) Wenn man einen Punkt O in der Ebene eines Kegelschnittes mit den Brennpunkten F, F' desselben verbindet und die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve bez. durch R, R'; S, S' bezeichnet, so ist

$$\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR'} = \frac{1}{OS} - \frac{1}{OS'}. \text{[50)]}$$

Aus der quadratischen Gleichung, durch welche im § 144 der Vector bestimmt ward, geht hervor, dafs die Differenz der reciproken Werte der Wurzeln für solche Werte von ϑ die nämliche sein mufs, für die

$$A_{22}\cos^2\vartheta - 2A_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta + A_{11}\sin^2\vartheta \qquad (\S\ 163)$$

constanten Wert hat. Dies ist aber der Fall für irgend zwei Werte von ϑ, welche den Richtungen von Linien entsprechen, die gleich geneigt sind gegen die beiden Geraden

$$A_{22}x^2 - 2A_{12}xy + A_{11}y^2 = 0.$$

Die betrachtete Function ist aber gleich Null für die Richtungen der beiden Tangenten durch O (§ 201).

15) Der Inhalt des Dreiecks von drei Normalen ist

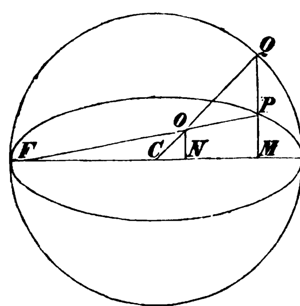
$$\frac{c^4}{4ab}\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\tan\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\tan\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$$
$$\times\{\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)\}^2;$$

also schneiden sich drei Normalen in einem Punkt, wenn

$$\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)=0 \quad \text{ist.}$$ [51])

16) Welches ist der Ort des Punktes, in dem der Brennstrahl FP den Kreisradius CQ schneidet?

Bezeichnen wir P durch $x'|y'$, O durch $x|y$, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken FON, FPM



$$\frac{y}{x+c}=\frac{y'}{x'+c}=\frac{b\sin\varphi}{a(e+\cos\varphi)}.$$

Wir erhalten die Polargleichung des Ortes von O, indem wir $r\cos\varphi$ für x, $r\sin\varphi$ für y schreiben, als

$$\frac{r}{c+r\cos\varphi}=\frac{b}{a(e+\cos\varphi)},$$

oder
$$r=\frac{bc}{c+(a-b)\cos\varphi}.$$

Demnach ist der Ort eine Ellipse, von welcher C der eine Brennpunkt ist, und man kann leicht nachweisen, dafs der andere mit F zusammenfällt. (§ 198.)

17) Die Normale des Punktes P wird bis zum Schnitt mit CQ verlängert; der Ort des Schnittpunktes ist ein Kreis.

Die Gleichung der Normale ist $\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=c^2$ (§ 183.3)); mit der vorigen Substitution geht dieselbe in $(a-b)r=c^2$ oder $r=a+b$ über.

Der Schnitt der Normale mit der zu CQ zur Axe symmetrischen Geraden $y=-x\tan\varphi$ ist analog der Kreis vom Radius $a-b$. Die Normalen der Ellipse können als Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser zwei Kreise betrachtet werden.[52])

18) Man zeige, dafs $\tan\frac{1}{2}PFC=\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}\tan\frac{1}{2}\varphi$ ist.

19) Bilde die Orthogonalitätsbedingung von zwei Normalen und die Ortsgleichung ihres Schnittpunkts (§ 192. 4).

20) Wenn man vom Scheitel der Ellipse einen Strahl nach einem Punkt der Curve und durch das Centrum eine Parallele zu ihm zieht, so bestimme man den Ort des Punktes, in welchem diese letztere die Tangente des Punktes schneidet.

Die trigonometrische Tangente des durch den Strahl mit der Axe gebildeten Winkels ist $=y':(x'+a)$; daher ist die Gleichung der durch das Centrum gehenden Parallelen

$$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'+a}=\frac{b\sin\varphi}{a(1+\cos\varphi)}=\frac{b}{a}\,\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

oder $\frac{y}{b}\sin\varphi + \frac{x}{a}\cos\varphi = \frac{x}{a}$; sonach wird der Ort des Schnittpunktes dieser Linie mit der Tangente $\frac{y}{b}\sin\varphi + \frac{x}{a}\cos\varphi = 1$ durch $x = a$ repräsentirt, d. h. der fragliche Ort ist die Tangente am andern Ende der Axe.

Dieselbe Untersuchungsmethode bleibt anwendbar, wenn der erste Strahl durch einen beliebigen Punkt $x' \mid y'$ in der Curve gezogen ward; man substituirt alsdann a' und b' für a und b, und der Ort ist die Tangente an dem diametral entgegengesetzten Punkt.

Durch den nämlichen Punkt der Scheiteltangente gehen auch die Halbirungslinien der Winkel, welche die Brennstrahlen eines Punktes mit der x-Axe bilden. (6.)

*209. **Kegelschnitte als Mittelpunktsorte von Kreisen.** Offenbar kann man Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten $\pm c \mid 0$ constante Summe oder Differenz $2a \gtrless 2c$ haben, dadurch erhalten, dafs man um den einen Punkt einen Kreis vom Radius $2a$ beschreibt und die Mittelpunkte von Kreisen sucht, welche den gegebenen berühren und durch den zweiten festen Punkt hindurchgehen. Dies führt auf einen Zusammenhang der Lehre von den Kreissystemen mit den Orten zweiten Grades.

Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei feste Kreise G, G' unter vorgeschriebenen Winkeln σ, σ' schneiden, ist ein Kegelschnitt (§ 132). Nehmen wir die Centrale von G, G' als x-Axe, ihre Mitte als Nullpunkt, so seien $\pm c \mid 0$ die Mittelpunkte, ϱ, ϱ' die Radien von G, G'. Alsdann schneidet ein Kreis vom Centrum $\alpha \mid \beta$ und Radius r G, bez. G' unter dem Winkel σ bez. σ', wenn

$$(\alpha - c)^2 + \beta^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos\sigma$$
$$(\alpha + c)^2 + \beta^2 = r^2 + \varrho'^2 - 2r\varrho'\cos\sigma'. \qquad (§ 122.)$$

Den Ort von $\alpha \mid \beta$ erhalten wir durch Elimination von r aus diesen Gleichungen. Nun ergibt aber Subtraction

$$4c\alpha = \varrho'^2 - \varrho^2 - 2r(\varrho'\cos\sigma' - \varrho\cos\sigma),$$

d. h. r als eine *lineare* Function von α. Also liefert die Substitution derselben in eine der Relationen in der Tat eine Gleichung zweiten Grades in $\alpha \mid \beta$.

Lassen wir insbesondere die festen Kreise von dem beweglichen berührt werden, d. h. nehmen entweder

$$\cos\sigma = \cos\sigma' = \pm 1, \text{ oder } \cos\sigma = -\cos\sigma' = \pm 1 \quad (\S\, 134),$$

so bringt man die Eliminationsresultate leicht auf die Formen

$$\frac{\alpha^2}{\left(\frac{\varrho-\varrho'}{2}\right)^2} + \frac{\beta^2}{\left(\frac{\varrho-\varrho'}{2}\right)^2 - c^2} = 1, \text{ bez. } \frac{\alpha^2}{\left(\frac{\varrho+\varrho'}{2}\right)^2} + \frac{\beta^2}{\left(\frac{\varrho+\varrho'}{2}\right)^2 - c^2} = 1.$$

Der Ort der Mittelpunkte der Kreise, welche zwei gegebene Grundkreise gleichartig, bez. ungleichartig berühren (§ 133), *ist ein Kegelschnitt, der die Centra der Grundkreise zu Brennpunkten und die Differenz bez. Summe ihrer Radien zur Hauptaxe hat.*

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem $\varrho \mp \varrho' > 2c$ oder $\varrho \mp \varrho' < 2c$ ist, also sind genau nach § 120 die drei Lagen der Grundkreise zu einander zu unterscheiden. *Die beiden Serien von Berührungskreisen erzeugen zwei Ellipsen bez. zwei Hyperbeln, wenn die Grundkreise ein- bez. ausschliefsend liegen; wenn die Grundkreise sich aber reell schneiden, erzeugen die gleich- bez. ungleichartig berührenden Kreise eine Hyperbel bez. eine Ellipse.* Die Kegelschnitte gehen natürlich durch die Schnittpunkte P, P' der Grundkreise G, G', da diese die Centra der berührenden Nullkreise sind. Also können für jeden Kegelschnitt die Grundkreise dieser Erzeugung in unendlich vielen Paaren gewählt werden.

Ein Kreis entsteht nur aus concentrischen Grundkreisen, eine gleichseitige Hyperbel aus Grundkreisen mit zu einander rechtwinkligen gemeinsamen Tangenten. Denn das Asymptotenpaar des Kegelschnittes ist offenbar stets zu den Paaren gemeinsamer Tangenten normal (§ 129). Gleiche Grundkreise erzeugen ihre Radicalaxe, sich berührende Grundkreise ihre Centrale anstatt des einen Kegelschnittes. Wenn ein Grundkreis den Radius Null hat, so entsteht nur *ein* Mittelpunktsort. Weiterhin werden wir sehen, dafs *eine* Parabel erzeugt wird, wenn einer der Grundkreise eine Gerade wird.

*210. **Focalgleichung in Liniencoordinaten.** In der Lehre von den Brennpunktseigenschaften werden sich weiter-

hin die Liniencoordinaten zur Behandlung der Probleme als geeignet erweisen. *Die auf einen Brennpunkt als Anfangspunkt bezogene Gleichung eines beliebigen Kegelschnittes in Liniencoordinaten hat die charakteristische Gestalt der Gleichung eines Kreises in Punktcoordinaten*, d. h. es ist in der allgemeinen Gleichung des § 189 $A_{11} = A_{22}$, $A_{12} = 0$ (vgl. § 102). Transformiren wir zunächst die Axengleichung $a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 = 1$ (§ 181) unter Beibehaltung der x-Axe zu $c \mid 0$ als Nullpunkt, so lauten die vermittelnden Substitutionen der Liniencoordinaten

$$\xi = \frac{\xi'}{1 - c\xi'}, \quad \eta = \frac{\eta'}{1 - c\xi'} \qquad (\S\ 75).$$

In der Tat ordnet man das Transformationsresultat wegen $c^2 = a^2 \mp b^2$ leicht zu folgender *Focalgleichung in Liniencoordinaten*

$$\left(\xi \pm \frac{c}{b^2}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{a}{b^2}\right)^2.$$

Einer Drehung des Axensystems um den Brennpunkt gehört eine Substitution in Liniencoordinaten zu, die linear und homogen ist. Bezogen auf Axen, die um den Winkel ϑ gedreht sind, lautet die Gleichung analog

$$\left(\xi \pm \frac{c}{b^2}\cos\vartheta\right)^2 + \left(\eta \mp \frac{c}{b^2}\sin\vartheta\right)^2 = \left(\frac{a}{b^2}\right)^2.$$

Das Charakteristische dieser Gleichungsformen ist die Reduction der Glieder zweiten Grades auf $\xi^2 + \eta^2$. Setzt man dieselben für sich gleich Null, so stellt $\xi^2 + \eta^2 = 0$ die beiden absoluten Richtungen dar (§ 58). Für unendlich grofse Werte von $\xi \mid \eta$ ist die linke Seite auf diese ihre höchsten Terme reducirt, also haben die Tangenten aus dem Brennpunkt die absoluten Richtungen, in directer Bestätigung der allgemeinen Definition des § 195.

B. 1) Die Enveloppe einer Geraden, deren Abstände von zwei festen Punkten constantes Product haben, ist ein Kegelschnitt mit diesen Punkten als Brennpunkten. (§ 202.)

Sind $\pm c \mid 0$ die festen Punkte, so ist das Product der Distanzen von der Geraden $\xi \mid \eta$ positiv oder negativ, je nachdem die Gerade die Punkte auf derselben oder auf verschiedenen Seiten hat; also setzen wir (§ 76)

$$\pm b^2 = \frac{1 + c\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{1 - c\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}; \text{ somit } (\pm b^2 + c^2)\,\xi^2 \pm b^2\eta^2 = 1.$$

Da für $\xi = 0$, $\eta = 0$ bez. $\pm b^2\eta^2 = 1$, $(\pm b^2 + c^2)\xi^2 = 1$ werden, so schneiden die zur x- bez. y-Axe parallelen Tangenten der Enveloppe die y- bez. x-Axe in den Abständen

$$\sqrt{\pm b^2}, \quad \sqrt{\pm b^2 + c^2}$$

und c ist somit die Focaldistanz; etc.

2) *Die Brennpunkte seien aus der allgemeinen Centralgleichung zu bestimmen.*[53])

Ist in rechtwinkligen Coordinaten

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

gegeben, und sind die Coordinaten des einen Brennpunkts $X \mid Y$, so sind die des andern $-X \mid -Y$. Die Gerade $\xi x + \eta y + 1 = 0$ ist nach 1) Tangente, wenn

$$(1 + \xi X + \eta Y)(1 - \xi X - \eta Y) = k^2(\xi^2 + \eta^2)$$

oder $\quad \xi^2(X^2 - k) + \eta^2(Y^2 - k) + 2\xi\eta XY + 1 = 0.$

Anderseits ist die Tangentialgleichung des Kegelschnittes

$$a_{33}(a_{22}\xi^2 + a_{11}\eta^2 - 2a_{12}\xi\eta) + a_{12}^2 - a_{11}a_{22}.$$

Damit die beiden Bedingungsgleichungen für $\xi \mid \eta$ identisch seien, mufs

$$\frac{X^2 - k}{a_{22}} = \frac{Y^2 - k}{a_{11}} = \frac{-XY}{a_{12}} = \frac{a_{33}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \text{ sein.}$$

Somit sind die Brennpunktscoordinaten aus den Gleichungen zu bestimmen

$$\frac{X^2 - Y^2}{a_{11} - a_{22}} = \frac{a_{33}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{XY}{a_{12}},$$

d. h. die Brennpunkte sind die Schnittpunkte zweier gleichseitigen Hyperbeln (§ 179). Auch können wir k^2 ermitteln aus dem Eliminationsresultat von $X \mid Y$, das äquivalent ist mit

$$(a_{11}k^2 - a_{33})(a_{22}k^2 - a_{33}) = a_{12}^2k^4.$$

Durch Vergleich mit § 184. 4) erkennt man aber die beiden Wurzeln k^2 als die Quadrate der Halbaxen. Der einen Wurzel entspricht das reelle, der andern das imaginäre Brennpunktepaar.

Mittelst einer Paralleltransformation kann die Brennpunktsbestimmung auf die allgemeine Gleichung zweiten Grades übertragen werden.

3) Wenn ein rechter Winkel sich so bewegt, dafs sein Scheitel einen Kreis beschreibt, während der eine seiner Schenkel durch einen festen Punkt geht, so umhüllt der andere Schenkel einen Kegelschnitt, der diesen Punkt zum Brennpunkt und den nach ihm gehenden Kreisdurchmesser zur Hauptaxe hat. (§ 203.)

Mit dem Mittelpunkt des Kreises als Anfangspunkt und dem Durchmesser des festen Punktes als x-Axe hat man für einen Punkt $x \mid y$ des Kreises und die ihn enthaltende Tangente der Enveloppe

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \xi x + \eta y + 1 = 0.$$

Aus dem Product $= -1$ der Tangenten der Winkel, welche diese Tangente und die auf ihr im Punkt $x \mid y$ normale Gerade durch den festen Punkt $+ c \mid 0$ mit der x-Axe bilden, folgt

$$\xi y = \eta (x - c); \text{ also } x = -\frac{\eta + c\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{\xi + c\eta^2}{\xi^2 + \eta^2},$$

somit durch Einsetzen in die erste Gleichung die Enveloppe

$$(\xi^2 + \eta^2)\{1 + c^2\eta^2 - r^2(\xi^2 + \eta^2)\} = 0.$$

Nun ist $\xi^2 r^2 + \eta^2 (r^2 - c^2) = 1$ eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $r \gtrless c$; es ist für $c = 0$ der gegebene Kreis und für $c = r$ das Paar seiner Durchmesserendpunkte. Der sich absondernde Factor $\xi^2 + \eta^2 = 0$ sagt wegen $\xi = \pm \eta i$ und also auch $x = \pm y i$ aus, dafs die Verbindungslinien des festen Punktes mit den imaginären Kreispunkten Tangenten der Enveloppe sind (§ 58). Somit ist der feste Punkt Brennpunkt des Kegelschnittes — wie auch der zu ihm symmetrische. (Siehe §§ 277. 310.)

4) Die Sehne, welche ein um seinen Scheitel O sich drehender constanter Winkel δ zwischen zwei festen Geraden $\xi_1 \mid \eta_1$, $\xi_2 \mid \eta_2$ spannt, umhüllt einen Kegelschnitt vom Brennpunkt O.

Mit $y = m_1 x$, $y = m_2 x$ als den Schenkeln des sich drehenden Winkels hat man $(1 + m_1 m_2) \tan \delta = m_1 - m_2$; und da die Tangente $\xi \mid \eta$ der Enveloppe, die Geraden $\xi_1 \mid \eta_1$ und $y = m_1 x$, ebenso $\xi \mid \eta$, $\xi_2 \mid \eta_2$ und $y = m_2 x$ je durch einen Punkt gehen, so folgt

$$m_1 = \frac{\xi_1 - \xi}{\eta - \eta_1}, \quad m_2 = \frac{\xi_2 - \xi}{\eta - \eta_2};$$

$$\{(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2) + (\xi_1 - \xi)(\xi_2 - \xi)\} \tan \delta = (\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_2) - (\xi_2 - \xi)(\eta - \eta_1),$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \xi \left\{ \frac{\eta_1 - \eta_2}{\tan \delta} - \xi_1 - \xi_2 \right\} + \eta \left\{ \frac{\xi_2 - \xi_1}{\tan \delta} - \eta_1 - \eta_2 \right\} = \frac{\xi_2 \eta_1 - \xi_1 \eta_2}{\tan \delta} - \xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2.$$

Weil $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$ und $\xi = \xi_2$, $\eta = \eta_2$ die Gleichung erfüllen, so sind die gegebenen Geraden selbst Tangenten der Enveloppe.

Man discutire die speciellen Fälle $\delta = 0$, $\delta = 90^0$, $\delta = 45^0$, δ gleich dem Winkel der festen Geraden; $\xi_1 \mid \eta_1$, $\xi_2 \mid \eta_2$ als orthogonal und als parallel zu einander; endlich $\xi_2 = \eta_2 = 0$.

Elftes Kapitel.

Die Parabel.

211. **Durchmessergleichung der Parabel.** Die Gleichung zweiten Grades repräsentirt (§ 145) eine Parabel, wenn $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ ist, oder die ersten drei Glieder ein vollkommenes Quadrat bilden, also die Gleichung die Form hat

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Diese Gleichung können wir für einen endlichen Coordinatenanfang nicht so transformiren (§ 147), dafs die Coefficienten von x und y beide verschwinden. Die Form der Gleichung leitet jedoch sogleich zu einer andern Methode, sie zu vereinfachen.

Die linearen Functionen $\alpha x + \beta y$ und $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$ sind zu den senkrechten Abständen des Punktes $x|y$ von den durch $\alpha x + \beta y = 0$ und $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ repräsentirten Geraden proportional. Wenn wir also die beiden Geraden construiren, so drückt die Gleichung der Curve aus, dafs das Quadrat des Abstandes eines Punktes der Curve von der ersten Geraden in einem constanten Verhältnis zum Abstand von der zweiten steht.

Wenn wir nun durch Transformation die erste Gerade zur neuen x-Axe, die zweite zur neuen y-Axe machen, so erhält die transformirte Gleichung die Form $y^2 = 2p'x$, weil die mit x und y bezeichneten linearen Polynome den senkrechten Abständen eines Punktes von den neuen Coordinatenaxen proportional sind.

Offenbar ist der neue Anfangspunkt ein Punkt der Curve, und, weil wir für jeden Wert von x zwei entgegengesetzt

gleiche Werte von y erhalten, ist die neue x-Axe ein Durchmesser, die neue y-Axe aber parallel zu seinen Ordinaten (§ 148). Aber die Ordinate eines Durchmessers in seinem Endpunkt ist (§ 155) eine Tangente der Curve, die neue y-Axe somit die Tangente der Curve im Nullpunkt. Also ist die Gerade $\alpha x + \beta y = 0$ der durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Durchmesser, und $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ die Tangente der Curve in dem Endpunkt desselben. *Die Gleichung der Parabel, bezogen auf einen Durchmesser und die Tangente im Endpunkt desselben als Axen, ist von der Form*

$$y^2 = 2p'x.$$

212. **Scheitelgleichung.** Obgleich wir so die Gleichung der Parabel auf eine wirklich einfache Form bringen, so sind doch unsere neuen Axen im allgemeinen nicht rectangulär. Allein es ist auch möglich, *die Gleichung unter Beibehaltung von rectangulären Axen in diese Form zu bringen.*

Führen wir eine willkürliche Constante k ein, so wird die Gleichung $(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ mit

$$(\alpha x + \beta y + k)^2 + 2(a_{13} - \alpha k)x + 2(a_{23} - \beta k)y + a_{33} - k^2 = 0$$

äquivalent gefunden. Also ist nach dem letzten §

$$\alpha x + \beta y + k = 0$$

die Gleichung eines Durchmessers und

$$2(a_{13} - \alpha k)x + 2(a_{23} - \beta k)y + a_{33} - k^2 = 0$$

die der Tangente in seinem Endpunkt.

Nun ist die Bedingung, dafs diese beiden Geraden zu einander senkrecht sind (§ 36), $\alpha(a_{13} - \alpha k) + \beta(a_{23} - \beta k) = 0$. Also erhalten wir eine lineare Gleichung zur Bestimmung des besondern Wertes von k, welcher die neuen Axen rectangulär macht, nämlich

$$k = \frac{\alpha a_{13} + \beta a_{23}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Somit gibt es nur den *einen* Durchmesser

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha x + \beta y) + (\alpha a_{13} + \beta a_{23}) = 0,$$

dessen Ordinaten von ihm senkrecht geschnitten werden (vgl. § 151).

Dieser Durchmesser wird *die Axe*, sein Endpunkt *der Scheitel* der Parabel genannt. *Die in rechtwinkligen Coordinaten interpretirte Gleichung von der Form*

$$y^2 = 2px$$

ist also die auf Axe und Scheiteltangente bezogene Gleichung einer Parabel, ihre Scheitelgleichung.

Man nennt den einzigen Coefficienten p' dieser reducirten Gleichungsform den Linearparameter des zur x-Axe gewählten Durchmessers, speciell den auf die Axe bezogenen Parameter p der Scheitelgleichung den *Hauptparameter* (vgl. § 206).

213. **Transformation zur Scheitelgleichung.** Die in rechtwinkligen Coordinaten interpretirte allgemeine Gleichung kann auch durch directe Transformation derselben auf die Form $y^2 = 2px$ reducirt werden. Zur Transformation sind nach einander eine Verschiebung und eine Drehung der Axen anzuwenden (§ 9), wobei die Reihenfolge an und für sich für das Resultat unwesentlich ist. Im Gegensatz zu dem Verfahren der §§ 164, 165 bei Centralcurven können wir durch eine Parallelverschiebung die Terme mit x und y nicht wegschaffen. Daher führen wir zunächst eine Drehung aus, um die Glieder zweiten Grades zu reduciren und wählen deshalb die Gerade $\alpha x + \beta y = 0$ und ihre Normale $\beta x - \alpha y = 0$ zu neuen Axen $y' = 0$ und $x' = 0$. Dann haben wir, weil x' bez. y' die Abstände eines Punktes von den neuen Axen sind,

$$y' = \frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}, \quad x' = \frac{\beta x - \alpha y}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}};$$

mit der Abkürzung $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ lauten daher die Transformationsformeln

$$\gamma y' = \alpha x + \beta y, \quad \gamma x' = \beta x - \alpha y;$$
$$\gamma x = \alpha y' + \beta x', \quad \gamma y = \beta y' - \alpha x'.$$

Durch diese Substitutionen geht die Gleichung der Curve in

$$\gamma^3 y'^2 + 2(a_{13}\beta - a_{23}\alpha)x' + 2(a_{13}\alpha + a_{23}\beta)y' + \gamma a_{33} = 0$$

über, oder kommt durch Drehung der Axen auf die Form

$$a_{22}' y^2 + 2a_{13}' x + 2a_{23}' y + a_{33}' = 0.$$

Gehen wir zu parallelen Axen durch einen neuen Anfangspunkt $x_0 \mid y_0$ über, so gibt die Substitution $x + x_0 \mid y + y_0$ für $x \mid y$

$$a_{22}'y^2+2a_{13}'x+2(a_{22}'y_0+a_{23}')y+a_{22}'y_0^2+2a_{13}'x_0+2a_{23}'y_0+a_{33}'=0.$$

Durch diese Transformation wird der Coefficient von x nicht geändert, kann also auch nicht auf Null reducirt werden. Dagegen können wir $x_0 \mid y_0$ so bestimmen, dafs der Coefficient von y und das absolute Glied verschwinden, so dafs die Gleichung auf die Form $y^2 = 2px$ gebracht ist. Die entsprechenden Werte der Coordinaten des *Scheitels* als des neuen Anfangspunktes sind

$$y_0 = -\frac{a_{23}}{a_{22}}, \quad x_0 = \frac{a_{23}'^2 - a_{22}'a_{33}'}{2a_{13}'a_{22}'}$$

und der Wert des *Hauptparameters* lautet

$$p = -\frac{2a_{13}'}{a_{22}'} = \frac{2(a_{23}\alpha - a_{13}\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

B. 1) Der Hauptparameter der Parabel

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 22x + 46y + 9 = 0 \text{ ist } p = \tfrac{1}{5}.$$

Wir erhalten zuerst nach § 212 $k = 5$. Dann kann die Gleichung in der Form $(3x + 4y + 5)^2 = 2(4x - 3y + 8)$ geschrieben werden. Für x' bez. y' als die Entfernungen eines Punktes von $4x - 3y + 8 = 0$, bez. $3x + 4y + 5 = 0$ ist dann $5y' = 3x + 4y + 5$, $5x' = 4x - 3y + 8$, und die Gleichung kann geschrieben werden $y'^2 = \frac{2}{5}x'$.

Das Verfahren des jetzigen § fordert die Transformation zu

$$3x + 4y = 0, \quad 4x - 3y = 0 \text{ als Axen.}$$

Dadurch erhält man $25y'^2 + 50y' - 10x' + 9 = 0$ oder

$$25(y' + 1)^2 = 10x' + 16,$$

welches in $y'^2 = \frac{2}{5}x'$ übergeht, wenn man zu parallelen Axen durch $-\frac{8}{5} \mid -1$ transformirt.

2) Der Parameter der Parabel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0 \text{ ist } p = \frac{2a^2b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3) Wenn a und b die Längen zweier Tangenten einer Parabel sind, welche sich rechtwinklig schneiden, und m die Hälfte des Parameters ist, so ist

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}.$$

214. Wenn die ursprünglichen Coordinatenaxen schiefwinklig sind, so wird die Gleichung zunächst noch wie in § 213 reducirt, indem man die Gerade $\alpha x + \beta y = 0$ und ihre Normale $(\beta - \alpha \cos \omega) x - (\alpha - \beta \cos \omega) y = 0$ zu Axen wählt. Für
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \omega$$
werden die Transformationsformeln nach § 37
$$\gamma y' = (\alpha x + \beta y) \sin \omega, \quad \gamma x' = (\beta - \alpha \cos \omega) x - (\alpha - \beta \cos \omega) y;$$
also
$$\gamma x \sin \omega = (\alpha - \beta \cos \omega) y' + \beta x' \sin \omega,$$
$$\gamma y \sin \omega = (\beta - \alpha \cos \omega) y' - \alpha x' \sin \omega.$$

Durch diese Substitutionen wird die Gleichung zu
$$\gamma^3 y'^2 + 2\sin^2\omega(a_{13}\beta - a_{23}\alpha)x' + 2\sin\omega\{a_{13}(\alpha - \beta\cos\omega) + a_{23}(\beta - \alpha\cos\omega)\} y'$$
$$+ \gamma a_{33} \sin^2 \omega = 0.$$

Die Transformation zu parallelen Axen geschieht ganz wie in § 213; der Hauptparameter ist
$$p = -\frac{2a_{13}'}{a_{22}'} = \frac{2(a_{23}\alpha - a_{13}\beta)\sin^2\omega}{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

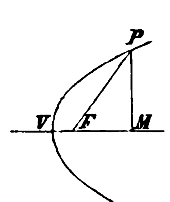
Selbstverständlich bewahren die beiden Ausdrücke des § 167 auch hier ihre Unveränderlichkeit. Die eine hat den Nullwert $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ als Bedingung der Parabel, die andere ist $\gamma^2 : \sin^2 \omega$, wovon man sich sofort überzeugt, wenn man die transformirte Gleichung durch $\gamma \sin^2 \omega$ dividirt.

215. **Parallelenpaar.** Wenn in der Originalgleichung $a_{13}\beta = a_{23}\alpha$ ist, so verschwindet in der transformirten Gleichung des § 213 der Coefficient von x. Die Gleichung
$$a_{22}' y^2 + 2a_{23}' y + a_{33}' = 0$$
repräsentirt zwei reelle, zusammenfallende oder imaginäre zur neuen x-Axe parallele Gerade. In der Tat ist in diesem Falle die allgemeine Bedingung $\mathsf{D} = 0$ (§ 59) erfüllt, unter welcher die Gleichung vom zweiten Grade ein Linienpaar darstellt. Denn, schreibt man diese Bedingung in der Form
$$a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = a_{11}a_{23}^2 - 2a_{12}a_{23}a_{13} + a_{22}a_{13}^2$$
und setzt für a_{11}, a_{12}, a_{22} bez. α^2, $\alpha\beta$, β^2 ein, so verschwindet die linke Seite der Gleichung, während die rechte auf $(a_{23}\alpha - a_{13}\beta)^2$ reducirt wird.

Indem man die Bedingung $a_{23}\alpha = a_{13}\beta$ in den gleichbedeutenden Formen $a_{23}\alpha^2 = a_{13}\alpha\beta$, $a_{23}\alpha\beta = a_{13}\beta^2$ schreibt, erkennt man: *Die allgemeine Gleichung zweiten Grades stellt ein Parallelenpaar dar, wenn aufser* $a_{12}{}^2 = a_{11}a_{22}$ *zugleich entweder* $a_{11}a_{23} = a_{12}a_{13}$ *oder* $a_{22}a_{13} = a_{23}a_{12}$ ist.

Dieses Parallelenpaar kann daher als der Grenzfall einer Parabel angesehen werden, für den Fall, dafs ihr Scheitel in unendliche Entfernung rückt. Wirklich kann die zerfallende Gleichung zweiten Grades ein Linienpaar vom Winkel Null nicht anders ergeben (§ 55), als wenn sie die Bedingung der Parabel erfüllt. Ebenso war in § 164 das reelle bez. imaginäre Linienpaar mit endlichem Doppelpunkt als Grenzfall der Hyperbel bez. Ellipse für den Fall der Axen Null erkannt.

216. **Gestalt der Parabel.** Aus der Gleichung $y^2 = 2px$ können wir sogleich die *Figur der Curve* erkennen. Sie ist in Bezug auf die x-Axe symmetrisch, weil jeder Wert von x nur y^2 liefert; kein Teil von ihr kann auf der negativen Seite der y-Axe liegen, weil y für negative Werte von x imaginär wird. Wenn wir aber dem x beliebig wachsende positive Werte geben, erhalten wir auch unbegrenzt wachsende Werte für y. Also ist die Gestalt der Curve die hier dargestellte, wo ihre concave Seite gegen die positive Axe gewendet ist.



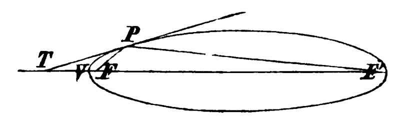
Die Construction der Curve liegt in der Gleichung: Man trägt auf der negativen x-Axe von V aus die Länge $VQ = 2p$ ab, dann schneidet der Kreis, welcher QM zum Durchmesser hat, auf der Scheiteltangente die Länge der Ordinate MP des zu VM als Abscisse gehörigen Punktes ab.

Obgleich die Parabel der Hyperbel darin gleicht, dafs sie unendliche Äste besitzt, so besteht doch eine wichtige Verschiedenheit zwischen der Natur der unendlichen Äste der beiden Curven. Die der Hyperbel strebten unablässig, mit zwei divergirenden geraden Asymptoten zusammenzufallen (§ 178). Dies gilt aber nicht für die Parabel, weil wir für die Bestimmung der Punkte, in welchen eine Gerade $x = ky + l$ die Parabel $y^2 = 2px$ schneidet, die quadratische Gleichung

$y^2 - 2pky - 2pl = 0$ erhalten, deren Wurzeln nie beide unendlich sein können, so lange k und l endliche Werte haben.

Daher gibt es keine endliche Gerade, welche die Parabel in zwei zusammenfallenden Punkten im Unendlichen schneidet, d. h. keine Asymptote, denn irgend ein Durchmesser $y = m$, welcher die Curve allerdings in einem unendlich entfernten Punkte schneidet (§ 149), trifft sie doch auch in dem Punkte $2px = m^2$. Der entsprechende Wert von x wächst mit m und wird erst mit m unendlich, d. h. *nur* die unendlich ferne Gerade berührt die Parabel im Unendlichen (§ 145).

217. **Continuirliche Gestaltsänderung.** Die Gestalt der Parabel wird dadurch besonders klar erkannt, dafs wir sie aus den Gestalten der Ellipse und Hyperbel hervorgehen lassen können, gemäfs folgendem Satze: *Wenn von einer Ellipse oder Hyperbel ein Scheitel und ein Brennpunkt gegeben sind, während ihre grofse Axe als unbegrenzt wachsend gedacht wird, so nähert sich die Curve fortwährend mehr der Parabel.*



Die Scheitelgleichung der Ellipse bez. Hyperbel ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a}\left(2x \mp \frac{x^2}{a}\right) \quad (\S\ 206).$$

Da wir die Entfernung $VF = m$ als unveränderlich voraussetzen, so haben wir b durch a und m auszudrücken, nämlich aus $\pm m = a - \sqrt{(a^2 \mp b^2)}$ (§ 193), also $b^2 = 2am \mp m^2$; dadurch wird die Gleichung

$$y^2 = \left(2m \mp \frac{m^2}{a}\right)\left(2x \mp \frac{x^2}{a}\right).$$

Lassen wir nun a unendlich grofs werden, so verschwinden alle Glieder rechts bis auf $2m \cdot 2x$ und die Gleichung reducirt sich auf $y^2 = 4mx$, d. i. die Gleichung einer Parabel vom Hauptparameter $2m$.

Eine Parabel kann somit als eine Ellipse oder Hyperbel betrachtet werden, deren Excentricität $= 1$ *ist;* denn in dem Werte $e^2 = 1 \mp \frac{b^2}{a^2}$ verschwindet $\frac{b^2}{a^2}$, der Coefficient von x^2 in der obigen Gleichung, wenn wir a unbegrenzt wachsen lassen, und endlich wird $e^2 = 1$.

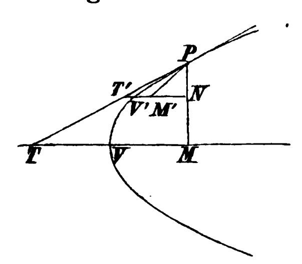
Somit entsteht aus zwei Centralkegelschnitten beider Gattungen durch continuirliche Gestaltänderung eine Parabel als gemeinsame Grenzlage. So gehen Ellipsen und Hyperbeln durch Vermittelung der Parabeln stetig in einander über und die grofsen gestaltlichen Unterschiede der Kegelschnitte erscheinen als stetige Umformungen eines einheitlichen Typus.

218. **Tangente.** Die Gleichung der zwei Punkte der Curve verbindenden Sehne ist (§ 154) $(y-y')(y-y'')=y^2-2px$ oder $(y'+y'')y=2px+y'y''$. Für $y''=y'$ wird wegen $y'^2=2px'$ die Gleichung der Tangente

$$y'y=p(x+x').$$

Für den Schnittpunkt der Tangente mit der Axe ergibt sich $x=-x'$ oder $VM=TV$. *Die Subtangente TM der Parabel wird im Scheitel halbirt.*

Da die Durchmessergleichung der Parabel für schiefwinklige Coordinaten die Form $y^2=2p'x$ behält (§ 211), so bleiben auch die Gleichungen der Sehne und Tangente unverändert, und die Subtangente ist auch dann noch das Doppelte der Abscisse, gemessen zwischen Durchmesserendpunkt und Ordinate des Berührungspunktes.



Dies gibt eine einfache Methode, in irgend einem Punkt der Parabel ihre Tangente zu ziehen, weil wir nur in der Axe $TV=VM$ zu nehmen und PT zu ziehen haben. Nachher können wir auch die irgend einem andern Durchmesser entsprechende Ordinate des Punktes bestimmen, weil wir nur $V'M'=T'V'$ zu machen und PM' zu ziehen haben.

219. **Zusammenhang der Linearparameter.** Wir können nun die Scheitelgleichung $y^2=2px$ durch wirkliche Transformation auf einen Durchmesser und die Tangente in seinem Endpunkt als Axen in der Form $y^2=2p'x$ beziehen, und zugleich die Abhängigkeit der Linearparameter p' unter einander erkennen.

Die Gleichung $y^2=2px$ wird durch Transformation zu parallelen Axen durch einen Punkt $x'|y'$ der Curve, indem

wir $x + x_0 | y + y'$ für $x | y$ schreiben, in $y^2 + 2yy_0 = 2px$ übergeführt. Wählen wir alsdann mit Beibehaltung der neuen x-Axe eine neue y-Axe, die zu jener unter dem Winkel ϑ geneigt ist, so ist $y \sin\vartheta$ für y, $x + y\cos\vartheta$ für x zu substituiren, und unsere Gleichung wird

$$y^2 \sin^2\vartheta + 2yy' \sin\vartheta = 2px + 2py \cos\vartheta.$$

Damit diese sich auf die Form $y^2 = 2p'x$ reducire, mufs

$$y' \sin\vartheta = p\cos\vartheta \quad \text{oder} \quad \tan\vartheta = p : y'$$

sein. Dann ist aber nach der Gleichung $yy' = p(x + x')$ der von der Tangente mit der x-Axe gebildete Winkel gleich ϑ und zu einer gegebenen Gröfse von ϑ ist der Berührungspunkt der Tangente eindeutig bestimmt als $y' = p\cot\vartheta$, $x' = \frac{1}{2}p\cot^2\vartheta$. Somit nimmt die obige Gleichung, auf einen Durchmesser und die conjugirte Tangente bezogen, die Form an

$$y^2 = \frac{2p}{\sin^2\vartheta}x \quad \text{oder} \quad p^2 = 2p'x,$$

und es ist $p'\sin^2\vartheta = p$: *Das Product des Linearparameters p' eines Durchmessers in das Quadrat des Sinus des Winkels, welchen seine Ordinaten mit der Axe bilden, ist constant und gleich dem Hauptparameter p.*

Wir können den Parameter irgend eines Durchmessers aus den Coordinaten seines Endpunktes ableiten, denn wegen $y'\tan\vartheta = p$ ist

$$\sin\vartheta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y'^2}} = \sqrt{\left(\frac{p}{p + 2x'}\right)} \text{ und } p' = p + 2x',$$

d. h. die halbe Differenz der Linearparameter zweier Durchmesser ist gleich der Differenz der Abstände ihrer Endpunkte von der Scheiteltangente.

220. **Pol und Polare.** Die Gleichung der Polare irgend eines Punktes $x' | y'$ lautet gemäfs § 155 ebenfalls

$$y'y = p(x + x') \quad \text{oder} \quad y'y = p'(x + x').$$

Dieselbe ist wiederum befriedigt durch $y = 0$, $x = -x'$: *Auf einem Durchmesser fassen die Polaren zweier Punkte und die Ordinaten derselben gleiche Abschnitte zwischen sich,* näm-

lich von der Gröfse $x' - x''$, wenn der Durchmesser als x-Axe genommen ist.

Die Schnittpunkte der Polare mit der Curve haben Ordinaten, welche sich aus der Gleichung $y^2 - 2y'y + 2px' = 0$ ergeben, sind also reell oder imaginär, je nachdem $y'^2 - 2px'$ positiv oder negativ ist. Da für Punkte $x' = 0$ der Scheiteltangente der Ausdruck positiv ist, so ist er es für alle Punkte des convex abgegrenzten Gebietes: dies ist das Äufsere der Curve. Für einen unendlich fernen Punkt ist die Polare ein Durchmesser, hat also nur einen Schnittpunkt im Endlichen: *Zu jeder Richtung gibt es in der Parabel eine und nur eine Tangente* (vgl. § 219).

Der Pol einer Geraden $\xi x + \eta y + 1 = 0$ folgt aus der Vergleichung der Coefficienten als

$$x' = \frac{1}{\xi}, \quad y' = -p\frac{\eta}{\xi}.$$

Die Tangentialgleichung der Parabel ist daher (vgl. § 181):

$$\eta^2 = \frac{2}{p}\xi \quad \text{oder} \quad \eta^2 = \frac{2}{p'}\xi.$$

B. 1) Die Coordinaten des Schnittpunktes der Tangenten in den Punkten $x'|y'$, $x''|y''$ der Parabel $y^2 = 2px$ folgen aus

$$2y = y' + y'', \quad 2px = y'y''.$$

2) Man bestimme den Winkel der beiden vom Punkt $x'|y'$ an die Parabel $y^2 = 4mx$ gezogenen Tangenten.

Die Gleichung des Tangentenpaares wird wie in § 156 ermittelt und ist

$$(y'^2 - 4mx')(y^2 - 4mx) = \{yy' - 2m(x + x')\}^2.$$

Die Gleichung zweier durch den Nullpunkt zu ihnen gezogenen Parallelen ist $x'y^2 - y'xy + mx^2 = 0$; deren Winkel wird nach § 55 bestimmt durch

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{y'^2 - 4mx'}}{x' + m}.$$

3) Der Inhalt des durch drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecks ist die Hälfte von dem Inhalt des Dreiecks der Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte.[54])

Substituiren wir die Coordinaten der Ecken des Dreiecks in die Formel des § 38, so finden wir für den letztbezeichneten

Inhalt den Ausdruck $\frac{1}{p}(y'-y'')(y''-y''')(y'''-y')$ und für den ersteren die Hälfte derselben Gröfse.

4) Eine Parabel, welche die Geraden AB, AC in B, C berührt und durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC geht, hat diesen zum Scheitel.

5) Man kann die Coordinaten eines Parabelpunktes P durch eine einzige Veränderliche λ ausdrücken als

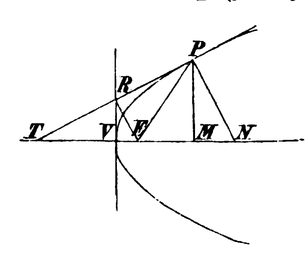
$$x = \frac{p}{2\lambda^2}, \quad y = \frac{p}{\lambda},$$

wo 2λ der Richtungscoefficient der vom Nullpunkt nach P gehenden Sehne ist.

Dann hat die Tangente in λ die Gleichung $\lambda y = \lambda^2 x + \frac{1}{2}p$, etc.

221. **Normale.** Die Gleichung der Normale in $x' \mid y'$, als der Senkrechten zur Tangente $yy' = p(x + x')$ ist

$$p(y - y') + y'(x - x') = 0.$$



Der von ihr in der x-Axe gebildete Abschnitt ist

$$VN = x' + p;$$

daher ist in der Parabel die Subnormale $MN = p$ (§ 191) *constant und dem Hauptparameter gleich.*

Die Länge $n = NP$ der Normale selbst ist $\sqrt{(MP^2 + MN^2)}$, oder

$$n = \sqrt{y'^2 + p^2} = \sqrt{p(2x' + p)} = \sqrt{pp'}.$$

Durch einen beliebigen Punkt $x' \mid y'$ *gehen drei Normalen der Parabel,* denn die Gleichung einer durch ihre Fufspunkte gehenden Curve ist nach § 192

$$xy - (x' - p)y - py' = 0.$$

Dies ist aber eine gleichseitige Hyperbel, welche die Axe der Parabel als Asymptote besitzt, also den unendlich fernen Punkt derselben als vierten Schnittpunkt enthält.

222. **Brennpunkt.** Genau wie in § 193 ergibt ein Punkt $-x' \mid 0$ als Tangentenschnittpunkt T und ein Punkt $x' + p \mid 0$ als Normalenschnittpunkt N die Bestimmung der beiden Punkte der Parabel auf der Ordinate $x = x'$. Die Abscissen der Punkte

der Paare T, N haben die constante Summe p, daher gibt es einen Punkt $x' = \frac{1}{2}p$, welcher die gemeinsame Mitte aller jener Paare ist. Man nennt diesen Punkt F in der Axe der Parabel, dessen Entfernung vom Scheitel gleich der Hälfte des Hauptparameters ist, *den Brennpunkt der Parabel.* Der Hauptparameter selbst ist nach der Gleichung, ebenso wie in den Centralkegelschnitten, die Ordinate der Curve im Brennpunkt.

Wenn wir nun auch nur von *einem* reellen Brennpunkt der Parabel sprechen, so werden doch, wie schon nach der Continuität des § 217 klar ist, die Entwickelungen des gegenwärtigen Abschnitts zeigen, *daſs eine Parabel in jeder Beziehung als eine Ellipse oder Hyperbel betrachtet werden darf, deren einer Brennpunkt der eben definirte Punkt ist, während der andere in unendlicher Entfernung liegt.* Um Brüche zu vermeiden, wollen wir in den folgenden §§ die Abkürzung $m = \frac{1}{2}p$ anwenden.

* Dieser Übergang von den Centralcurven zur Parabel zeigt auch, daſs die beiden imaginären Brennpunkte der Parabel (§ 193) die absoluten Richtungen sind, denn dieselben müssen auf der unendlich fernen Axe bezüglich der Richtungen von jedem Paar aus Tangente und Normale harmonisch liegen. Dasselbe ergibt die allgemeine Definition des § 195 durch die Schnittpunkte der Tangenten absoluter Richtung, denn nur zwei derselben sind von der unendlich fernen Geraden verschieden.

223. **Focalgleichung.** Die Entfernung irgend eines Punktes P der Curve vom Brennpunkt F oder *der Brennstrahl eines Parabelpunktes $x' | y'$ ist $r = x' + m$* (vgl. § 196), denn das Quadrat der Entfernung vom Brennpunkt $m | 0$ ist

$$(x' - m)^2 + y'^2 = (x' - m)^2 + 4mx' = (x' + m)^2.$$

Damit lautet das Resultat des § 219 einfacher: *Der Parameter irgend eines Durchmessers ist das Doppelte des Brennstrahls seines Endpunktes.*

Nennen wir wieder $\sphericalangle MFP$ die Anomalie θ von P, so ist

$$r = x' + m = VM + m = FM + 2m = r\cos\theta + 2m.$$

Daraus folgt als *Focalgleichung der Parabel*

$$r = \frac{2m}{1 - \cos\theta} = \frac{p}{1 - \cos\theta}.$$

Dieselbe Gleichung geht auch aus der Gleichung des § 198 durch die Annahme $e = 1$ hervor (§ 217), so daſs die aus derselben gezogenen Consequenzen gültig bleiben. Übrigens wird zuweilen θ auch von FV als Anfangsstrahl aus gezählt, und die Gleichung $r(1 + \cos\theta) = 2m$ geschrieben. Diese nimmt auch die Form an

$$r\cos^2 \tfrac{1}{2}\theta = m \quad \text{oder} \quad r^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2}\theta = m^{\frac{1}{2}},$$

und gehört so zu einer Gruppe von Curven von der allgemeinen Gleichungsform $r^n \cos n\theta = m^n$, die manche gemeinsame Eigenschaften haben.

224. **Directrix.** Die Polare des Brennpunktes einer Parabel wird wie bei der Ellipse und Hyperbel die *Directrix* genannt. Weil der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel m ist, so ist seine Polare (§ 220) die Normale zur Axe in demselben Abstand auf der andern Seite des Scheitels. Die Entfernung irgend eines Punktes von der Directrix ist somit gleich $x' + m$: *Der Abstand irgend eines Punktes der Curve von der Directrix ist seinem Brennstrahl gleich*, während für Ellipse und Hyperbel der Brennstrahl zum Abstand von der Directrix in dem constanten Verhältnis $e:1$ steht (§ 197). Umgekehrt ist der Ort eines Punktes, der sich nach dem ausgesprochenen Gesetz bewegt, die Curve von der Gleichung $(x - m)^2 + y^2 = (x + m)^2$ oder $y^2 = 4mx$.

Die Definition der Kegelschnitte durch Brennpunkt, Directrix und Excentricität erstreckt sich also auf alle Gattungen, während die bifocale Relation des § 199 nicht zur Erzeugung der Parabel dienen kann. Offenbar liefert die in § 205 zur mechanischen Beschreibung der Hyperbel gegebene Methode eine Parabel, wenn man das Lineal ABR im rechten Winkel gebogen nimmt.

225. **Jede Tangente bildet mit der Axe und dem Brennstrahl des Berührungspunktes gleiche Winkel.**

Denn die Entfernung vom Brennpunkt bis zum Schnittpunkt der Tangente mit der Axe beträgt $TV + VF = x' + m$ (§ 218). *Der Axenschnittpunkt der Tangente und ihr Berührungspunkt haben gleiche Brennstrahlen.* Das von der Axe, der Tangente und dem Brennstrahl des Berührungspunktes gebildete Dreieck ist gleichschenklig, hat also auch gleiche Winkel an der Tangente. Demnach schneidet die Tangente im Endpunkt der Brennpunkts-Ordinate die Axe unter einem Winkel von 45^0.

Der Satz ist eine Übertragung der Eigenschaft des Brennstrahlenwinkels der Centralkegelschnitte (§ 201). Denn, wenn wir dort den Brennpunkt F' unendlich fern denken, so wird der Brennstrahl $F'P$ parallel zur Axe und die Winkelgleichheit $\sphericalangle FPT = \sphericalangle F'PT'$ zu $\sphericalangle FPT = \sphericalangle FTP$.

226. **Focalabstand der Tangente.** Der Abstand des Brennpunktes $m \mid 0$ von der Tangente $y'y = 2m(x + x')$ ist (Fig. § 221)

$$FR = \frac{2m(x' + m)}{\sqrt{(y'^2 + 4m^2)}} = \frac{2m(x' + m)}{\sqrt{(4mx' + 4m^2)}} = \sqrt{m(x' + m)},$$

also die mittlere Proportionale zwischen dem halben Parameter FV und dem Brennstrahl FP des Berührungspunktes. Aus dem Vergleich mit $\sqrt{pp'}$ in § 221 folgt: *Der Focalabstand der Tangente ist gleich der Hälfte der Normale;* dasselbe ergibt sich auch geometrisch aus $TF = FN$.

Nennen wir den Winkel $MFR = \alpha$, so haben wir $\cos\alpha = -\sin FTR = \sqrt{[m : (x' + m)]}$ (§ 219) und $FR = \sqrt{m(x' + m)} = m : \cos\alpha$. Daher ist $FR \cdot \cos\alpha = m = VF$, d. h. R liegt in der Scheiteltangente. *Der Ort des Fufspunktes der vom Brennpunkt auf die Tangente gefällten Normale ist die Scheiteltangente.* In dieselbe und die ∞ Gerade geht offenbar der Scheitelkreis der Centralcurven über (§ 203, § 104). Die Umkehrung dieses Satzes liefert eine *Erzeugung der Parabel durch Tangenten* (vgl. B. 1)).

Zugleich ergibt sich aus dem obigen *die Normalform der auf den Brennpunkt als Nullpunkt bezogenen Gleichung der Parabeltangente*

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + \frac{m}{\cos\alpha} = 0.$$

B. 1) *Der eine Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel eine Gerade* $x = -m$ *durchläuft, während der andere Schenkel durch einen festen Punkt* $0|0$ *geht, berührt eine Parabel.*

Mit der Geraden $x = -m$ an Stelle des Kreises in § 203 und für $c = 0$ ergibt sich die leicht direct aus der Figur abzulesende Gleichung $m(\xi^2 + \eta^2) = \xi$; diese definirt aber eine Parabel, weil $\xi = 0$, $\eta = 0$ die Gleichung befriedigen; der Anfangspunkt ist Brennpunkt. Unter denselben Voraussetzungen erzeugt auch ein constanter von 90^0 verschiedener Winkel eine Parabel.

2) Man soll den Ort des Schnittpunktes des vom Brennpunkt auf eine Tangente gefällten Perpendikels mit der Geraden finden, welche den Scheitel mit dem Berührungspunkt verbindet.

227. **Der Winkel zweier Tangenten ist die Hälfte des Winkels der Brennstrahlen ihrer Berührungspunkte.**

Denn in dem gleichschenkligen Dreieck PFT der Figur § 221 ist der Winkel PTF, den die Tangente mit der Axe bildet, die Hälfte des Winkels PFN, welchen der Brennstrahl mit ihr einschliefst. Nun ist der Winkel zwischen irgend zwei Tangenten gleich der Differenz der Winkel, die sie mit der Axe bilden, und der Winkel zwischen den Brennstrahlen ist gleich der Differenz der von ihnen mit der Axe eingeschlossenen Winkel.

Wenn nun zwei Tangenten mit einander speciell einen rechten Winkel einschliefsen, so bilden die Brennstrahlen der Berührungspunkte mit einander einen gestreckten Winkel, d. h. die zwei Tangenten berühren in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne. Dann schneiden sie sich aber in der Polare des Brennpunktes, also (§ 224): *Der Ort des Schnittpunktes zu einander normaler Tangenten ist die Directrix.*

Zum directen Beweis des Satzes bilden wir die Gleichung der Polare irgend eines Punktes $-m|y'$ der Directrix: $y'y = 2m(x - m)$ und die der Verbindungsgeraden desselben mit dem Brennpunkt: $2m(y - y') + y'(x + m) = 0$. Die Gleichungen stellen offenbar ein Rechtwinkelpaar dar. Oder wir gehen von der in § 226 gegebenen Focalgleichung der Tangente $x\cos^2\alpha + y\sin\alpha\cos\alpha + m = 0$ aus. Mit Einsetzung von $\alpha + 90^0$ statt α folgt die Gleichung der nor-

malen Tangente als $x \sin^2 \alpha - y \sin \alpha \cos \alpha + m = 0$. Durch Addition dieser Gleichungen wird α eliminirt und als Gleichung des Ortes $x + 2m = 0$ erhalten, offenbar die Directrix.

228. **Der Brennstrahl des Schnittpunktes zweier Tangenten halbirt den Winkel der Brennstrahlen ihrer Berührungspunkte.** Aus den Focalgleichungen zweier Tangenten (§ 226)

$$x \cos^2 \alpha + y \sin \alpha \cos \alpha + m = 0, \quad x \cos^2 \beta + y \sin \beta \cos \beta + m = 0,$$

finden wir durch Subtraction die Gleichung der Geraden, welche ihren Schnittpunkt mit dem Brennpunkt verbindet,

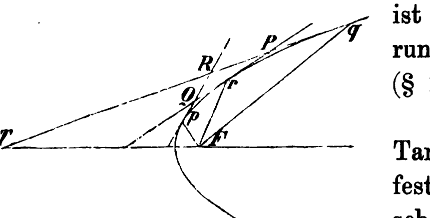
$$x \sin(\alpha + \beta) - y \cos(\alpha + \beta) = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, die mit der x-Axe einen Winkel $(\alpha + \beta)$ einschliefst. Weil aber in der Figur § 221 $\sphericalangle\, VFP = 2\alpha$ und $\sphericalangle\, VFP' = 2\beta$, so halbirt die Gerade vom Neigungswinkel $(\alpha + \beta)$ den Winkel PFP'.

Dieser Satz kann auch bewiesen werden, indem man wie in § 204 den Winkel $(\vartheta_1 - \vartheta_2)$ berechnet, unter welchem die durch den Punkt $x' | y'$ gehende Tangente einer Parabel vom Brennpunkt aus gesehen wird; denn, findet man $r \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = x' + m$, so zeigt die Unabhängigkeit von den Coordinaten des Berührungspunktes, dafs der Winkel für jede der beiden Tangenten aus $x' | y'$ derselbe ist.[55])

Zusätze. Wenn wir den Fall nehmen, wo der Winkel $PFP' = 180^0$, PP' eine Focalsehne ist, so schneiden die Tangenten TP und TP' einander in der Directrix, und der Winkel TFP ist gleich 90^0. (§ 227.)

Wenn eine Sehne PP' die Directrix in D schneidet, so ist FD die äufsere Halbirungslinie des Winkels PFP' (§ 204).



Wenn eine veränderliche Tangente der Parabel zwei feste Tangenten in P und Q schneidet, so ist der Winkel PFR, unter welchem das

Segment PQ der veränderlichen Tangente vom Brennpunkt aus erscheint, das Supplement des Winkels PRQ der festen Tangenten.

Denn $\sphericalangle QRT = \frac{1}{2} \sphericalangle pFq$ (§ 227), und nach dem Obigen ist auch $\sphericalangle PFQ = \frac{1}{2} < pFq$, daher $\sphericalangle PFQ = QRT$, dem Supplement des $\sphericalangle PRQ$.

Der Kreis, welcher dem von irgend drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreieck umgeschrieben ist, geht durch den Brennpunkt. Denn der durch PRQ beschriebene Kreis mufs durch F gehen, weil der im Segment PFQ enthaltene Winkel das Supplement des in PRQ enthaltenen ist.

229. **Beispiele.** Zunächst sind die Beispiele der vorigen beiden Kapitel, besonders der § 189 und § 208 darauf hin zu prüfen, ob ihre Beweise auch noch gültig bleiben, wenn der fragliche Kegelschnitt statt einer Centralcurve eine Parabel ist. Aufserdem folgt hier eine Anzahl specieller Beispiele für die Parabel.

B. 1) Der Höhenschnittpunkt des durch drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecks liegt in der Directrix.[56])

Die Gleichung einer Dreieckshöhe ist nach § 36

$$\frac{y_1 y_3 - y_1 y_2}{2p}\left(x - \frac{y_2 y_3}{2p}\right) + \frac{y_3 - y_2}{2}\left(y - \frac{y_2 + y_3}{2}\right) = 0,$$

und nimmt durch die Division mit $(y_3 - y_2)$ die Form an

$$y_1\left(x + \frac{p}{2}\right) - \frac{y_1 y_2 y_3}{2p} + py - \frac{p(y_1 + y_2 + y_3)}{2} = 0.$$

Aus der Symmetrie der Gleichung folgt, dafs die drei Höhen sich in der Directrix schneiden, im Punkt

$$y = \frac{y_1 y_2 y_3}{2p^2} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2}.$$

2) Das Vierseit derjenigen Tangenten einer Parabel, welche den Seiten eines derselben eingeschriebenen Vierecks parallel sind — und nach dem Vorigen auch das Viereck ihrer Berührungspunkte — hat die Fläche Null, etc. (vgl. § 220. 3)).

3) Man bestimme den Radius des Kreises, welcher einem der Parabel eingeschriebenen Dreieck umgeschrieben ist.

Der Radius des umgeschriebenen Kreises eines Dreiecks, welches die Seitenlängen l_1, l_2, l_3 und den Inhalt $\frac{1}{2}F$ besitzt, wird durch $l_1 l_2 l_3 : 2F$ ausgedrückt. Wenn aber l_1 die Länge der Sehne zwischen den Punkten $x_2 | y_2$, $x_3 | y_3$ und ϑ_1 der Winkel ist, welchen

diese Sehne mit der Axe macht, so ist offenbar $l_1 \sin\vartheta_1 = y_2 - y_3$ Durch Einsetzen des in § 220. 3) abgeleiteten Ausdrucks für den Inhalt ergibt sich der fragliche Halbmesser

$$R = \frac{p}{\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3}.$$

Wir können diesen Radius auch durch die zu den Seiten des Dreiecks parallelen Focalsehnen ausdrücken; denn nach § 223 ist die Länge einer Focalsehne, welche den Winkel ϑ mit der Axe bildet, gleich $p' = \frac{p}{\sin^2\vartheta}$; also $R^2 = \frac{p_1 p_2 p_3}{p}$. Aus § 219 ergibt sich, dafs p_1, p_2, p_3 die Parameter der Durchmesser sind, welche die Seiten des Dreiecks halbiren.

4) Man drücke den Radius R des Kreises, welcher dem von drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreieck umgeschrieben ist, in Function der Winkel aus, welche dieselben mit der Axe bilden.

$R = \frac{p}{4\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3}$ oder $R^2 = \frac{p_1 p_2 p_3}{16p}$, wenn p_1, p_2, p_3 die Parameter derjenigen Durchmesser sind, welche durch die Berührungspunkte der Tangenten gehen. (§ 219.)

5) Der Ort der Schnittpunkte derjenigen Tangenten einer Parabel, welche sich unter einem gegebenen Winkel φ schneiden, (§ 220. 2)) ist die Hyperbel

$$y^2 - 4mx = (x+m)^2 \tan^2\varphi \quad \text{oder} \quad y^2 + (x-m)^2 = (x+m)^2 \sec^2\varphi.$$

Aus der letzteren Form der Gleichung geht hervor, dafs die Hyperbel denselben Brennpunkt und die nämliche Directrix wie die Parabel besitzt, und dafs ihre Excentricität $= \sec\varphi$ ist.

6) Der Ort des Fufspunktes der Senkrechten, welche vom Brennpunkt einer Parabel auf die Normale gefällt wird, ist eine Parabel.

Der Focalabstand von $2m(y - y') + y'(x - x') = 0$ ist

$$r = \frac{y'(x'+m)}{\sqrt{y'^2 + 4m^2}} = \sqrt{\{x'(x'+m)\}}.$$

Wenn aber ϑ der durch die Senkrechte mit der x-Axe gebildete Winkel ist, so ist nach § 219

$$\sin\vartheta = \sqrt{\left(\frac{m}{x'+m}\right)}, \quad \cos\vartheta = \sqrt{\left(\frac{x'}{x'+m}\right)}.$$

Die Polargleichung des Ortes für den Brennpunkt als Nullpunkt ist daher $r\sin^2\vartheta = m\cos\vartheta$, oder $y^2 = mx$.

7) Die Coordinaten des Punktes, in welchem die den Punkten $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ entsprechenden Normalen sich schneiden, sind

$$x = 2m + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{4m}, \quad y = -\frac{y_1 y_2 (y_1 + y_2)}{8m^2}.$$

Wenn durch α, β die Coordinaten des Schnittpunktes der

entsprechenden Tangenten bezeichnet sind (§ 192. 3)), so hat man auch:
$$x = 2m + \frac{\beta^2}{m} - \alpha, \quad y = -\frac{\alpha\beta}{m}.$$

8) Die durch den Normalenschnittpunkt von $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ gehende dritte Normale hat ihren Fuſspunkt $x_3 | y_3$ in derjenigen Geraden, welche im Scheitel zur Parallelen jeder Sehne symmetrisch ist.

Indem man zwischen der Gleichung der Curve und der der Normale x eliminirt (§ 221), erhält man $y^3 + 2(y^2 - px')y = 2p^2y'$. Die drei Wurzeln sind daher durch die Relation $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ verbunden, deren geometrische Bedeutung die in dem Satz ausgesprochene ist.

9) Der Ort des Schnittpunktes der Normalen in den Endpunkten der durch $x' | y'$ gehenden Sehnen ist eine Parabel.

Wir haben die Relation $\beta y' = 2m(x' + \alpha)$ und erhalten durch die Substitution des aus ihr abgeleiteten Wertes von α in die Resultate von 7)
$$2mx + \beta y' = 4m^2 + 2\beta^2 + 2mx'; \; 2m^2y = 2\beta mx' - \beta^2 y';$$
sodann durch Elimination von β
$$2\{2m(y-y') + y'(x-x')\}^2 = (4mx' - y'^2)(y'y + 2x'x - 4mx' - 2x'^2)$$
die Gleichung einer *Parabel*, deren Axe zu der Senkrechten von dem Punkte auf seine Polare parallel ist. Wenn die Sehnen einer festen Geraden parallel sind, so reducirt sich der Ort auf eine Gerade, wie es auch gemäſs 8) sein muſs.

10) Der Ort des Schnittpunktes der zu einander rechtwinkligen Normalen ist $y^2 = m(x - 3m)$.

Denn in diesem Fall ist $\alpha = -m$, $x = 3m + \frac{\beta^2}{m}$; $y = \beta$.

11) Man finde aus den Längen zweier Tangenten a, b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ω den Parameter.

Man ziehe den die Berührungssehne halbirenden Durchmesser, so ist der Parameter desselben $p' = \frac{y^2}{2x}$ und der Hauptparameter ist $p = \frac{y^2 \sin^2\vartheta}{2x} = \frac{s^2y^2}{8x^3}$, wo s die Länge der vom Schnittpunkt der Tangenten auf die Sehne gefällten Senkrechten ist. Aber es ist $2sy = ab \sin\omega$ und $16x^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega$; also
$$p = \frac{2a^2b^2\sin^2\omega}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (\text{§ 213. 2).})$$

12) Ort des Schnittpunktes der Tangenten der Parabel, wenn gegeben ist entweder 1) das Product der Sinus oder 2) der Tangenten, 3) die Summe oder 4) die Differenz der Cotangenten der Winkel, die sie mit der Axe bilden, ist 1) ein Kreis, 2) und 3) eine Gerade, 4) eine Parabel.

Zwölftes Kapitel.

Specielle Beziehungen zweier Kegelschnitte.

---

230. **Kegelschnitte schneiden sich in vier Punkten.** Wir untersuchen diesen Fall des Bézout'schen Theorems (§ 23) direct.

Sind die Gleichungen zweier Curven zweiter Ordnung gegeben, so können wir sie nach y geordnet denken:

$$a_{22}y^2 + 2(a_{12}x + a_{23})\,y + (a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}) = 0,$$
$$a'_{22}y^2 + 2(a'_{12}x + a'_{23})\,y + (a'_{11}x^2 + 2a'_{13}x + a'_{33}) = 0.$$

Die Elimination von y können wir dadurch ausführen, dafs wir aus den Gleichungen y und y^2 wie zwei Unbekannte berechnen. Die Ausdrücke werden Brüche mit demselben in x linearen Nenner, der Zähler des Ausdrucks für y bez. y^2 ist vom 2. bez. 3. Grade in x. Setzen wir dann das Quadrat des ersten Bruches gleich dem zweiten, so *resultirt* eine Gleichung vom 4. Grade in x. Jeder ihrer Wurzeln gehört *eine* den ursprünglichen Gleichungen gemeinsame Wurzel y zu.

Im allgemeinen sind also vier Schnittpunkte vorhanden, die entweder reell oder in Paaren conjugirt imaginär sein können. Nennen wir die vier Punkte 1, 2, 3, 4, die sechs Verbindungsgeraden 12, 34; 13, 24; 14, 23; man sagt: *Zwei Kegelschnitte haben drei Paare von Schnittsehnen, die ein vollständiges Viereck bilden.* Sind zwei Schnittpunkte conjugirt imaginär, so ist doch ihre Verbindungsgerade immer reell (§ 17). *Daher ist von den Schnittsehnenpaaren stets eines reell,* auch wenn imaginäre Schnittpunkte vorkommen, wo die übrigen Sehnen imaginär sind. Wir werden im XIV. Kap. sehen, wie infolge dessen diese Linienpaare zur Bestimmung der Schnittpunkte dienen können.

Nun ist die Tangentialgleichung einer Curve zweiten

Grades in $\xi \mid \eta$ wieder vom zweiten Grade (§ 163). Demnach erkennen wir durch Wiederholung unserer Schlufsweise, dafs im allgemeinen vier Wertepaare $\xi \mid \eta$ existiren, welche zwei Kegelschnittsgleichungen zugleich genügen. Geometrisch heifst dies aber: *Zwei Curven zweiten Grades haben vier Tangenten gemeinsam* (vgl. § 129). In jeder derselben haben die Curven im allgemeinen verschiedene Berührungspunkte. Auch greifen ganz analoge Erörterungen Platz, wie wir sie im folgenden nur für die Gleichungen in Punktcoordinaten anstellen.

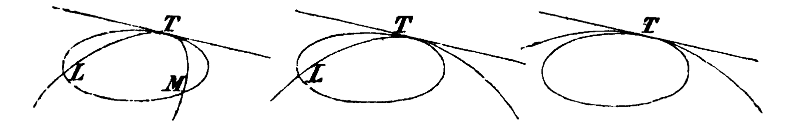
Die Schnittpunkte können verschiedene Besonderheiten ihrer gegenseitigen Lage bieten. Einerseits kann die Resultante dadurch, dafs ein oder mehrere Coefficienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen Null sind, von niedrigerem Grade sein. Dann haben wir einen oder mehrere der Schnittpunkte als unendlich fern anzusehen (§ 15).

Anderseits kann die Resultante mehrfache Wurzeln besitzen und diese liefern entweder mehrere getrennte oder vereinte, dann aber mehrfach zu zählende Schnittpunkte. Es sind folgende Fälle möglich: 1) ein zweifacher reeller Schnittpunkt und zwei reelle oder conjugirt imaginäre einfache Punkte, 2) zwei reelle oder conjugirt imaginäre zweifache, 3) ein dreifacher und ein einfacher, beide reell, oder endlich 4) ein vierfach zählender Schnittpunkt. Wir betrachten die dadurch charakterisirten besonderen Lagen der Kegelschnitte.

231. **Berührung zwischen Kegelschnitten.** Wenn 1) zwei der Schnittpunkte in T zusammenfallen, so berühren die Kegelschnitte einander, und die Verbindungsgerade der zusammenfallenden Punkte ist ihre gemeinschaftliche Tangente (§ 154). Die Kegelschnitte schneiden einander in diesem Fall noch in zwei reellen oder imaginären Punkten L, M, welche vom Berührungspunkt verschieden sind und eine stets reelle Schnittsehne LM ergeben. Zugleich sind, falls L, M nicht reell sind, TL, TM conjugirt imaginäre Gerade.

Wenn insbesondere 2) L und M zusammenfallen, also die Schnittsehne LM zu einer zweiten beiden Kegelschnitten gemeinschaftlichen Tangente wird, so haben die Kegelschnitte *eine doppelte Berührung.* Nun kann aber auch der Fall ein-

treten, dafs die Curven in einem imaginären Punkt dieselbe imaginäre Tangente berühren. Dann können sie weder einen



reellen Punkt noch eine reelle Tangente gemeinsam haben, denn nach § 19 Schlufs gilt der Satz: *Wenn sich zwei Kegelschnitte in einem imaginären Punkt berühren, so berühren sie sich auch in dem conjugirten.* Das Schnittsehnenviereck enthält dann nur die Verbindungsgerade der Berührungspunkte, doppelt gezählt, als reelles Seitenpaar. *Kegelschnitte in doppelter Berührung haben eine stets reelle Berührungssehne.*

Die Berührung der Kegelschnitte heifst 3) eine *Berührung der zweiten Ordnung,* wenn drei ihrer Schnittpunkte zusammenfallen. Dazu mufs einer der Punkte L, M in 1), z. B. M, sich T ohne Ende nähern und schliefslich mit ihm zusammenfallen. Die Punkte T und L sind reell, denn T zählt für das eine, TL für ein zweites Schnittpunktepaar. Curven, welche eine höhere Berührung als von der ersten Ordnung haben, heifsen *osculirende Curven. Kegelschnitte, welche einander osculiren, schneiden sich noch in einem reellen Punkt.*

Die Berührung zweier Kegelschnitte ist 4) die möglichst innige, wenn sie *vier* einander folgende Punkte gemein haben. In diesem Fall mufs L sich T nähern, bis die Linie LM mit der Tangente in T zusammenfällt. Zwei Curven haben eine *Berührung dritter Ordnung,* wenn sie vier auf einander folgende Punkte gemein haben. Und da zwei Kegelschnitte nicht mehr als vier Punkte mit einander gemein haben können, so entsteht die Berührung höchster Ordnung, welche zwischen zwei verschiedenen Kegelschnitten stattfinden kann, wenn alle Schnittpunkte in einem reellen Punkt vereint sind.

232. Die analytischen Bedingungen dieser verschiedenen Berührungen können wir übersehen, indem wir sie unter der besonderen Voraussetzung aufstellen, dafs eine der Coordinatenaxen z. B. die y-Axe eine gemeinschaftliche Tangente

im Nullpunkt ist. Nach § 154 (§ 207) haben Kegelschnitte, welche in $0|0$ die Tangente $x=0$ besitzen, die Gleichungen

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0,$$
$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x = 0.$$

Die Elimination von y^2 ergibt die Gleichung eines durch die vier Schnittpunkte gehenden Ortes (§ 207. 1))

$$x\{(a_{11}a'_{22} - a'_{11}a_{22})x + 2(a_{12}a'_{22} - a'_{12}a_{22})y + 2(a_{13}a'_{22} - a'_{13}a_{22})\} = 0.$$

Da der erste Factor die gemeinsame Tangente darstellt, so bezeichnet der zweite die durch die beiden andern Schnittpunkte gehende Schnittsehne LM in 1).

Die Bedingung der Doppelberührung ist 2) diejenige, unter welcher die Sehne LM von voriger Gleichung jeden der Kegelschnitte berührt. Wir bilden die Gleichung des Linienpaares, welches den Nullpunkt mit den Schnittpunkten L und M verbindet, eine homogene Gleichung; also das Glied mit x eliminirend:

$$(a_{11}a'_{13} - a'_{11}a_{13})x^2 + 2(a_{12}a'_{13} - a'_{12}a_{13})xy + (a_{22}a'_{13} - a'_{22}a_{13})y^2 = 0.$$

Damit L und M, also die Geraden TL, TM zusammenfallen, ist die geforderte Bedingung (§ 54)

$$(a_{11}a'_{13} - a'_{11}a_{13})(a_{22}a'_{13} - a'_{22}a_{13}) = (a_{12}a'_{13} - a'_{12}a_{13})^2.$$

Osculation im Nullpunkt haben wir 3), wenn die Gerade LM durch denselben geht, also $a_{13}a'_{22} = a'_{13}a_{22}$ ist. Wir können alsdann durch Multiplication mit einem Factor $k = a_{22} : a'_{22} = a_{13} : a'_{13}$ die zweite Gleichung auf die Form bringen

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0.$$

Die Subtraction der beiden Gleichungen liefert dann

$$(a_{11} - a'_{11})x + 2(a_{12} - a'_{12})y = 0$$

als die Gleichung der Osculationssehne TL.

Endlich fällt 4) die letztere mit der Tangente zusammen, wenn auch noch $a_{12} = a'_{12}$ ist; also lautet die Gleichung eines Kegelschnittes, der mit dem ersten im Nullpunkt eine Berührung dritter Ordnung mit der Tangente $x=0$ hat,

$$a'_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0.$$

Setzen wir die ursprünglichen Gleichungsformen voraus, so ergeben die Gleichungen der Linienpaare unter 1) oder 2) als Bedingungen dieser Berührung dritter Ordnung

$$a_{13}a'_{22} = a'_{13}a_{22}, \quad a_{12}a'_{22} = a'_{12}a_{22}.$$

233. **Krümmungskreis.** Da ein Kegelschnitt stets so bestimmbar ist, dafs er fünf gegebenen Bedingungen genügt (§ 141), so kann immer ein Kegelschnitt gefunden werden, der einen gegebenen in einem gegebenen Punkt berührt und drei andere Bedingungen erfüllt. Soll er in dem gegebenen Punkt eine Berührung zweiter Ordnung mit ihm haben, so kann er dabei *zwei* andere Bedingungen und bei einer Berührung dritter Ordnung nur *eine* erfüllen.

So kann stets eine Parabel gefunden werden, die im Anfangspunkt der Coordinaten eine Berührung dritter Ordnung mit dem Kegelschnitt $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$ hat. Nach der letzten Gleichung des § 232 erhellt, dafs die Parabelgleichung entsteht, wenn man nur a'_{11} statt a_{11} einsetzt, wo a'_{11} nach § 145 durch $a'_{11}a_{22} = a_{12}{}^2$ bestimmt ist.

Im allgemeinen können wir aber keinen Kreis beschreiben, der eine Berührung der dritten Ordnung mit einem gegebenen Kegelschnitt besitzt, weil zwei Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die Gleichung zweiten Grades einen Kreis repräsentire. In andern Worten: wir können durch vier auf einander folgende Punkte eines Kegelschnittes keinen Kreis beschreiben, weil zur Bestimmung des Kreises drei Punkte hinreichen. Durch drei auf einander folgende Punkte der Curve geht jedoch stets ein Kreis, dessen Gleichung man leicht findet.

Für obige Kegelschnittsgleichung und unter der Voraussetzung schiefwinkliger Coordinaten ist die Gleichung eines im Nullpunkt die Curve berührenden Kreises (§ 107. 3))

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - 2\varrho x\sin\omega = 0,$$

und die Bedingung, dafs dieser Kreis osculirend sei (§ 232), ist

$$a_{13} = -\varrho a_{22}\sin\omega, \text{ oder } \varrho = -\frac{a_{13}}{a_{22}\sin\omega}.$$

Der Kreis, welcher eine Curve im Punkt T osculirt, heifst speciell der Krümmungskreis der Curve in diesem Punkt. Sein

Radius ϱ heifst der *Krümmungsradius*, sein Centrum der *Krümmungsmittelpunkt*, der natürlich auf der Normale der Curve in T liegt. Als *Mafs der Krümmung der Curve* an einer Stelle bezeichnet man den reciproken Wert des Krümmungsradius. Diesen pflegt man in der Theorie der Kegelschnitte stets nur in positivem Wert anzugeben*).

234. Um den **Krümmungsradius in einem Punkt T eines Centralkegelschnittes** zu bestimmen, haben wir die Tangente in diesem Punkt zur y-Axe gemacht zu denken. Nun wird die auf den Durchmesser a' von T und den zu ihm conjugirten bezogene Gleichung $\frac{x^2}{a'^2} \pm \frac{y^2}{b'^2} = 1$ zu parallelen Axen durch den Punkt selbst transformirt durch die Substitution $x + a'$ für x, und wird somit zu

$$\frac{x^2}{a'^2} \pm \frac{y^2}{b'^2} + \frac{2x}{a'} = 0.$$

Daher ist der Krümmungsradius, wenn ω den Conjugationswinkel (§ 184) zwischen Durchmesser und Tangente bedeutet,

$$\varrho = \frac{\pm b'^2}{a' \sin \omega}.$$

Aber $a' \sin \omega$ ist der senkrechte Abstand p des Centrums von der Tangente, der Krümmungsradius also $\varrho = b'^2 : p$ oder $\varrho = b'^3 : ab$ (§ 184. 2)). Man stellt ihn mittelst des Ausdruckes für b'^2 in § 183. 2) durch die Coordinaten von T dar.

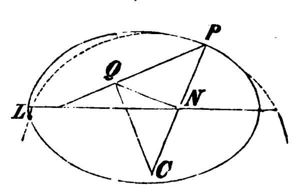
Demnach ist *die Krümmung in den Scheiteln der Hauptaxe am gröfsten*, denn, da $a' < a$, $b' > b$, so ist $\varrho = b^2 : a$ am kleinsten. Dann nimmt sie stetig ab, in der Ellipse bis zu den Scheiteln der kleinen Axe, wo $\varrho = a^2 : b$, in der Hyperbel bis zu den unendlich fernen Punkten, wo $\varrho = \infty$ ist.

235. **Construction des Krümmungskreises** in einem beliebigen Punkt der Ellipse oder Hyperbel.

---

*) Das Vorzeichen entscheidet, ob die gegebene Curve durch einen Kreis von der Gleichungsform $x^2 + 2xy \cos \omega + y^2 \mp 2\varrho x \sin \omega = 0$ berührt wird, dessen Centrum auf der positiven oder negativen Seite der y-Axe liegt. Die Formel des Textes gibt einen positiven Krümmungsradius, wenn die Concavität der Curve nach dem positiven Sinn der x-Axe, und einen negativen, wenn sie entgegengesetzt gerichtet ist.

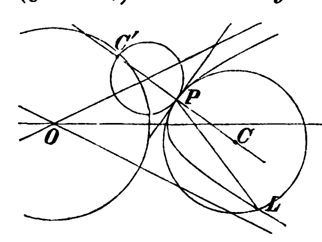
Wir zeigten in § 191, dafs die Länge PN der Normale $n = bb' : a$, und in § 201, dafs $\cos\psi = b : b'$ ist, wenn ψ der vom Brennstrahl mit der Normale gebildete Winkel ist; dies gestaltet den Ausdruck für den Krümmungsradius um in



$$\varrho \cos^2 \psi = n.$$

Wenn wir eine Senkrechte NQ zur Normale in dem Punkt errichten, wo sie die Focalaxe schneidet, und ferner in Q, in welchem diese Senkrechte den Brennstrahl trifft, QC senkrecht zu ihm bis zur Normale ziehen, so ist C das Krümmungscentrum und CP der Krümmungsradius.[57])

Eine andere Construction benutzt den mit dem Radius $\sqrt{(a^2 \pm b^2)}$ beschriebenen Hauptkreis des Kegelschnittes (§ 181. 4)): *Der Orthogonalkreis des Hauptkreises, welcher den Kegelschnitt in P berührt, hat den Krümmungsradius zum Durchmesser.* Der Hilfskreis hat seinen Mittelpunkt auf der Normale und schneidet diese in zwei durch den Hauptkreis harmonisch getrennten Punkten. Also construirt man den zu P auf der Normale harmonisch conjugirten Pol C' des Hauptkreises; dieser und der Krümmungsmittelpunkt C liegen symmetrisch in Bezug auf P. Die Construction ist selbst für eine stumpfwinklige Hyperbel, also imaginären Hauptkreis reell.



Zum Beweis substituirt man ϱ in die Formel (§ 184)

$$a^2 \pm b^2 = a'^2 \pm b'^2 = a'^2 + a'\varrho \sin\omega, \qquad \text{also}$$

$$\overline{PP'}^2 = a^2 \pm b^2 + \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 = a'^2 - 2a' \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) + \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2$$

und dies drückt aus, dafs der Mittelpunkt eines zum Hauptkreis orthogonalen Kreises auf der verlängerten Normale in der Entfernung $\frac{1}{2}\varrho$ liegt.

236. **Krümmungssehne.** Eine fernere Construction kann auf die Bemerkung gegründet werden: *Die Schnittsehnen eines Kreises mit einem Kegelschnitt bilden mit der Axe des letzteren gleiche Winkel.* Denn da die Rechtecke aus den Segmenten

der beiden Kreissehnen gleich sind (§ 114), so sind es auch die parallelen Durchmesser des Kegelschnittes (§ 162. I.); dieselben machen also mit der Axe gleiche Winkel (§ 171). Nun sind im Fall des Krümmungskreises Schnittsehnen (§ 231) erstens die Tangente in P und zweitens die Sehne PL des Kreises, die *Krümmungssehne;* man hat daher nur PL so zu ziehen, dafs sie mit der Axe den nämlichen Winkel wie diese mit der Tangente bildet. Dann ist der durch die Punkte P und L beschriebene Kreis, welcher den Kegelschnitt in P berührt, der Krümmungskreis. Aus der Gleichung der Tangente folgt die der symmetrisch geneigten Krümmungssehne als

$$\frac{x'x}{a^2} \mp \frac{y'y}{b^2} = \frac{x'^2}{a^2} \mp \frac{y'^2}{b^2}.$$

Die Construction zeigt, *dafs der in einem Scheitel der Curve osculirende Kreis eine Berührung der dritten Ordnung mit ihr hat,* da die Krümmungssehne mit der Tangente zusammenfällt.

B. 1) Unter welcher Bedingung liegen vier durch ihre excentrischen Anomalien α, β, γ, δ gegebenen Punkte eines Kegelschnittes in einem Kreis?[58])

Die Sehne, welche zwei der Punkte verbindet, mufs mit der positiven Axe denselben Winkel machen, wie die Sehne der beiden andern mit der negativen; die Sehnen sind durch

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + \frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta) + \frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta) = \cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)$$

repräsentirt; man hat somit $\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\tan\frac{1}{2}(\gamma+\delta)=0$, d. i.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0, \text{ oder } = 2m\pi.$$

2) Bestimme die Coordinaten des Punktes L, in welchem der in P osculirende Kreis den Kegelschnitt ferner schneidet.

Wir haben $\alpha=\beta=\gamma$, also $\delta = -3\alpha$, oder

$$X = \frac{4x'^3}{a^2} - 3x', \quad Y = \frac{4y'^3}{b^2} - 3y'.$$

Die Krümmungssehne hat also die Gleichung

$$\frac{x}{a}\cos\alpha - \frac{y}{b}\sin\alpha = \cos 2\alpha. \qquad (\S\ 183.\ 3).)^{59})$$

3) Der Punkt L liegt auch in einer Geraden, deren Axenabschnitte die doppelten Coordinaten des Punktes P mit umgekehrten Vorzeichen sind, nämlich

$$\frac{X}{x'} + \frac{Y}{y'} + 2 = 0, \text{ bez. } \frac{X}{x'} - \frac{Y}{y'} + 2 = 0.$$

4) Drei Punkte eines Kegelschnittes, deren osculirende Kreise durch einen gegebenen Punkt der Curve gehen, liegen in einem Kreis, welcher diesen Punkt enthält, und bilden ein Dreieck, für welches das Centrum der Curve der Schwerpunkt ist.

Aus dem gemeinschaftlichen Schnittpunkt δ der osculirenden Kreise folgt nach der letzten Aufgabe zur Bestimmung des Berührungspunktes $\alpha = -\frac{1}{3}\delta$, und da der Sinus und Cosinus von δ unverändert bleiben, wenn δ um 360^0 vermehrt wird, so ergibt sich ebenso $\alpha = -\frac{1}{3}\delta + 120^0$, $\alpha = -\frac{1}{3}\delta + 240^0$. Nach 1) liegen diese drei Punkte in einem durch δ gehenden Kreis.[60])

Wenn wir hier $X|Y$ als gegeben voraussetzen, so ist, weil den $x'|y'$ bestimmenden cubischen Gleichungen die zweiten Glieder fehlen, die Summe der drei Werte von x und y gleich Null, und daher ist nach § 13. 4) der Anfangspunkt der Coordinaten der Schnittpunkt der Halbirungslinien der Seiten des durch die Punkte gebildeten Dreiecks. Wir erkennen auch, dafs die Normalen in diesen Punkten die drei Höhen des Dreiecks sind, und dafs sie sich daher in einem Punkt schneiden, wenn die Halbirungslinien der Seiten durch das Centrum gehen. (§ 183. 6).)

5) Wenn drei Punkte einer Ellipse so liegen, dafs

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

ist, so gehen ihre Krümmungskreise durch den Punkt

$$\frac{4}{a^2} x_1 x_2 x_3 \,\Big|\, \frac{4}{b^2} y_1 y_2 y_3 \text{ der Ellipse.}$$

6) Die Parameter der Fufspunkte der vier Normalen aus einem Punkt (§ 192) genügen der Relation

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (2m + 1)\pi.$$

237. Krümmungskreis der Parabel. Aus der auf einen Durchmesser und die unter dem Winkel ϑ conjugirte Tangente bezogenen Gleichung $y^2 = 2p'x$ der Parabel finden wir nach dem Kriterium des § 233 für ϱ

$$\varrho \sin \vartheta = p' \text{ oder } \varrho \sin^3 \vartheta = p \qquad (§ 219).$$

Aus §§ 220. 221 folgt aber $p' \sin \vartheta = n$ oder $p = n \sin \vartheta$ und ϑ ist nach § 225 das Complement des Winkels ψ zwischen Brennstrahl und Normale. Daher ist auch für die Parabel $\varrho \cos^2 \psi = n$; somit sind auch dieselben Constructionen anwendbar.

Besonders einfach wird die zweite des § 235, da der Hauptkreis der Parabel ihre Directrix ist (§ 227), also der Orthogonalkreis desselben den Mittelpunkt auf dieser hat. *Das Segment der Normale von der Parabel bis zur Directrix ist gleich dem*

halben Krümmungsradius. Die Krümmung der Parabel ist im Scheitel am gröfsten und nimmt von da unbegrenzt ab; *der Krümmungsradius des Scheitels ist gleich dem Hauptparameter p.*

B. 1) In allen Kegelschnitten ist der Krümmungsradius gleich dem Quotienten aus dem Cubus der Normale durch das Quadrat des Halbmessers.

2) Man drücke den Krümmungsradius einer Ellipse in Function des Neigungswinkels der Normale gegen die Axe aus.

3) Die Längen der Sehnen des Krümmungskreises, welche durch das Centrum bez. den Brennpunkt eines Centralkegelschnittes gehen, sind $\frac{2b'^2}{a'}$ bez. $\frac{2b'^2}{a}$.

4) Die Focalsehne des Krümmungskreises für einen Punkt im Kegelschnitt ist der Focalsehne des Kegelschnittes gleich, welche der Tangente in dem Punkt parallel ist. (Vergl. § 262.)

5) In der Parabel ist die Focalsehne des Krümmungskreises dem Parameter des durch den Punkt gehenden Durchmessers gleich.

238. **Die Coordinaten des Krümmungscentrums für die Ellipse** werden gefunden, indem man von den Coordinaten ihres Punktes die Projectionen des in der Normale abgetragenen Krümmungsradius auf die Coordinatenaxen abzieht. Nun steht offenbar dieser Radius zu seiner Projection auf die Nebenaxe in demselben Verhältnis wie die Normale zur Ordinate y. Wir erhalten daher diese Projection, indem wir den Radius $b'^2 : p$ mit $y : n$ multipliciren, als $b'^2 y' : b^2$ (§ 191. 2)); die Ordinate des Krümmungsmittelpunktes ist daher

$$Y = \frac{b^2 - b'^2}{b^2} y', \text{ wobei (§ 182) } b'^2 = b^2 + \frac{c^2}{b^2} y'^2.$$

So sind die Coordinaten des Krümmungscentrums

$$X = -\frac{c^2}{a^4} x'^3, \quad Y = -\frac{c^2}{b^4} y'^3. \text{*)}$$

Dieselben gelten mit $c^2 = a^2 \mp b^2$ auch für die Hyperbel.

Da ferner das Centrum des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises der Schnittpunkt der Mittelnormalen der Seiten ist, so sind, wenn das Dreieck durch drei auf einander folgende Punkte der Curve gebildet wird, zwei seiner Seiten

*) Wir würden dieselben Werte erhalten haben, indem wir in § 183. 7) $\alpha = \beta = \gamma$ in die für die Coordinaten des Centrums erhaltenen Ausdrücke substituirten.

auf einander folgende Tangenten der Curve und die Senkrechten zu ihnen die entsprechenden Normalen. *Das Centrum der Krümmung irgend einer Curve ist daher der Schnittpunkt von zwei auf einander folgenden Normalen.* Darauf gegründete Constructionen des Krümmungscentrums geben wir in §299. 2 f.).

Bestimmen wir nach § 192. 3) die Coordinaten des Schnittpunktes der Normalen zweier Punkte, die mit dem Schnittpunkt ihrer Tangenten zusammenfallen, d. h. setzen wir

$$x' = x'' = X, \quad y' = y'' = Y,$$

so erhalten wir in der Tat die eben bestimmten Werte.

B. 1) Für die Scheitel der Ellipse erhält man bez.

$$X = 0, \quad Y = b - \frac{a^2}{b}; \quad X = a - \frac{b^2}{a}, \quad Y = 0.$$

Man construirt somit (vgl. § 234) die Krümmungscentra in den Scheiteln, indem man aus einer Ecke des Rechtecks der Scheiteltangenten auf die Scheitelsehne eine Normale fällt; sie sind die Punkte, wo diese die Axen schneidet.

2) Der Cubus von dem Radius des Kreises, der einem der Ellipse eingeschriebenen Dreieck umgeschrieben ist, ist das Product der Krümmungsradien in den Endpunkten der zu seinen Seiten conjugirten Durchmesser. (Speciell in seinen Ecken, wenn sein Schwerpunkt im Centrum der Ellipse liegt.)

239. Die Projection des Krümmungsradius der Parabel auf die y-Axe wird wie vorher durch Multiplication seiner Länge $n : \sin^2 \vartheta$ mit $y' : n$ gefunden, also $= y' : \sin^2 \vartheta$; indem wir dies von y' abziehen, erhalten wir die Ordinate und analog die Abscisse des Krümmungscentrums der Parabel (§ 219)

$$Y = -\frac{y'}{\tan^2 \vartheta} = -\frac{y'^3}{p^2}, \quad X = x' + \frac{p}{\sin^2 \vartheta} = p + 3x'.$$

Dieselben Werte fliefsen aus der Auflösung in § 229. 7).

B. Der Flächeninhalt des von den Krümmungscentren dreier Parabelpunkte mit den Ordinaten y_1, y_2, y_3 gebildeten Dreiecks ist

$$\frac{6}{p^3} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ y_1^2, & y_2^2, & y_3^2 \\ y_1^3, & y_2^3, & y_3^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{6}{p^3} (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1).$$

Die drei Krümmungscentra liegen in einer Geraden, wenn die Summe der Producte der Ordinaten der Punkte in Paaren Null ist.

240. **Die Evolute einer Curve ist der Ort der Krümmungscentra ihrer Punkte.**

Um die Evolute eines Centralkegelschnittes zu finden, werden wir die Coordinaten $x' \mid y'$ durch die $X \mid Y$ des Krümmungsmittelpunktes ausdrücken und ihre Werte in die Gleichung der Curve substituiren. Mit den Abkürzungen $c^2 : a = A$, $c^2 : b = B$ wird so *die Gleichung der Evolute*

$$\frac{X^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}} + \frac{Y^{\frac{2}{3}}}{B^{\frac{2}{3}}} = 1.$$

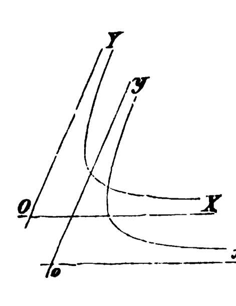
Ebenso wird die Gleichung der Evolute der Parabel gefunden

$$27py^2 = 8(x - p)^3;$$

die *semicubische* oder auch die *Neil'sche Parabel.*

Da jeder Punkt der Evolute Schnittpunkt der benachbarten Normalen des Kegelschnittes ist, so berühren diese offenbar die Evolute. Daher kann man sich ihre Gestalt leicht veranschaulichen, indem man eine Anzahl Normalen construirt. Man bemerkt insbesondere, dafs die Krümmungscentra der Scheitel *Spitzen der Evolute* sind, in welchen die Evolute sich von beiden Seiten an die Axen anschmiegt.

241. **Gemeinsame Asymptotenrichtungen.** Zwei Kegelschnitte haben ferner (§ 230) eine besondere Lagenbeziehung, wenn eine ihrer Schnittsehnen mit der unendlich fernen Geraden identisch wird. Dieselben haben dann ihre Asymptotenrichtungen gemeinsam, können also nur noch zwei Schnittpunkte im Endlichen besitzen. Dies ist auch geometrisch evident, wenn die beiden Curven Hyperbeln mit parallelen Asymptoten sind; die Figur zeigt einen endlichen Schnittpunkt zweier Äste derselben. Ein Beispiel von Ellipsen mit gemeinsamen Asymptotenrichtungen bieten uns die Kreise (§ 120), die deshalb nur zwei Schnittpunkte im Endlichen haben.



Nun hängen die Asymptotenrichtungen nur von den höchsten Gliedern der Gleichung ab (§ 144), indem sie durch das Linienpaar $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ bestimmt sind.

Daher ist *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs zwei Kegelschnitte ihre unendlich fernen Punkte gemein haben, die, dafs die Coefficienten der Glieder zweiten Grades ihrer Gleichungen entsprechend proportional sind:*

$$a_{11} : a'_{11} = a_{12} : a'_{12} = a_{22} : a'_{22}.$$

In Centralkegelschnitten dieser Art sind die Axen parallel, weil sie die Asymptotenwinkel halbiren. Zieht man überhaupt zwei parallele Durchmesser, so sind die zu ihnen conjugirten in beiden Curven wiederum parallel, denn diese Paare sind in Bezug auf die Asymptoten harmonisch (§ 182). Endlich hängt nur vom Asymptotenwinkel die Excentricität ab (§ 177). Kegelschnitte von gleicher Excentricität haben gleiche Asymptotenrichtungen, sobald ihre Axen parallel sind.

Wenn die beiden Kegelschnitte Parabeln sind, so haben sie dieselbe Excentricität, nämlich Eins (§ 217), und werden durch die unendlich ferne Gerade in je einem Punkt berührt, der die Richtung ihrer Durchmesser ist. *Daher berühren sich alle Parabeln von parallelen Axen im Unendlichen.*

242. **Ähnliche Kegelschnitte in ähnlicher Lage.** Wenn zwei Centralkegelschnitte gemeinsame Asymptotenrichtungen haben, so erhalten wir durch Paralleltransformationen (§ 164) ihre je auf den Mittelpunkt bezogenen Gleichungen in den Formen

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \quad a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0.$$

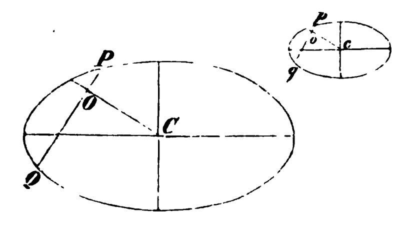
Führen wir dann statt $x \mid y$ Polarcoordinaten $r \mid \vartheta$, statt $x' \mid y'$ aber $r' \mid \vartheta'$ ein, so folgt aus § 144

$$r^2 : r'^2 = a_{33} : a'_{33} \text{ für } \vartheta = \vartheta',$$

d. h. *parallele Halbmesser sind proportional.*

Nun heifsen irgend zwei Figuren *ähnlich und in ähnlicher Lage* oder *homothetisch*, wenn die Vectoren OP der ersten von einem gewissen Punkt O aus in einem constanten Verhältnis zu den parallelen Vectoren op der zweiten von einem andern Punkt o stehen. Wenn es möglich ist, zwei solche Punkte O und o zu finden, so kann man darnach unendlich viele andere bestimmen. Denn, wenn man einen Punkt C wählt und oc parallel zu OC und im constanten

Verhältnis $op : OP$ zieht, so ist in den ähnlichen Dreiecken OCP und ocp die Linie cp zu CP parallel und in dem gegebenen Verhältnis. Ebenso kann man von jedem andern durch c gezogenen Vector zeigen, dafs er zu dem durch C gelegten parallelen Vector in demselben Verhältnis steht. *In zwei homothetischen Centralkegelschnitten sind alle Durchmesser des einen proportional den parallelen Durchmessern des andern* (vgl. § 162).



Man pflegt in der Regel nur den *Fall eines reellen Proportionalitätsfactors* $r : r'$ in Betracht zu ziehen. Mit dieser Beschränkung, dafs parallele Durchmesser zugleich reell sein sollen, sind zu einer reellen Ellipse nur wieder reelle Ellipsen homothetisch, zu einer Hyperbel innerhalb des Asymptotenwinkels 2Θ nur Hyperbeln in gleichen Asymptotenwinkeln. In diesem Sinn können ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte als solche definirt werden, welche parallele gleichnamige Axen und dieselbe Excentricität haben (§ 241).

[Wenn jedoch a_{33} und a_{33}' in obigen Gleichungen verschiedene Vorzeichen haben, so ist der Proportionalitätsfactor imaginär. Die beiden Gleichungen stellen dann eine reelle und eine imaginäre Ellipse, oder zwei Hyperbeln in supplementären Asymptotenwinkeln dar. Speciell für $a_{33} + a_{33}' = 0$ sind die Hyperbeln conjugirt und die Ellipsen könnten ebenso bezeichnet werden (§ 176 mit Anmerk.).]

Endlich sind alle Parabeln ähnlich und ähnlich gelegen, deren Axen dieselbe Richtung haben. Denn die Scheitelgleichungen $y^2 = 2px$, $y'^2 = 2p'x'$ liefern die Vectoren $r = 2p \cos\vartheta : \sin^2\vartheta$, $r' = 2p' \cos\vartheta' : \sin^2\vartheta'$. Mit $\vartheta = \vartheta'$ erhalten wir also parallele Vectoren in dem constanten Verhältnis $p : p'$.

*243. **Ähnlichkeitscentra.** Verbinden wir die Endpunkte P und p paralleler und proportionaler Sehnen aus O und o, so gehen die Geraden nach § 130 durch einen festen Punkt A in Oo, welcher als *Centrum der Ähnlichkeit* bezeichnet wird. Die *Ähnlichkeitsstrahlen* AP, Ap sowie AO, Ao und AC, Ac

haben dasselbe constante Verhältnis k, wie die parallelen Sehnen OP, op. Wenn wir daher in den Vectoren AP eines Kegelschnittes Ap in constantem Verhältnis zu AP nehmen, so ist der Ort von p ein ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitt. *Zu einem gegebenen Kegelschnitt* $a_{11}x^2+\cdots+a_{33}=0$ *und dem Nullpunkt als Ähnlichkeitscentrum erhalten wir jeden ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitt durch die Substitution* $kx \mid ky$ *statt* $x \mid y$ *als*

$$k^2(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)+2k(a_{13}x+a_{23}y)+a_{33}=0.$$

Da durch dieselbe Substitution die Gleichung des vom Nullpunkt ausgehenden Tangentenpaares (§ 156) nicht geändert wird, *so berühren alle ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte dasselbe Tangentenpaar des Ähnlichkeitscentrums.*

Denken wir nun die obige Betrachtung für zwei homothetische Centralcurven wiederholt, indem wir O, o mit ihren Mittelpunkten C, c zusammenfallen lassen. Dann gehen die Verbindungsgeraden der Endpunkte entgegengesetzt gerichteter Halbmesser durch einen Punkt J der *Centrale* Cc, welcher sie in demselben Verhältnis innerlich teilt wie A äufserlich. *Zwei ähnliche und ähnlich gelegene Centralkegelschnitte haben zwei Ähnlichkeitscentra, ein äufseres* A *und ein inneres* J, *welche die Centrale harmonisch im Ähnlichkeitsverhältnis* k *teilen.* Sie sind reell, so lange k reell ist (§ 242). Und: *Homothetische Centralkegelschnitte haben zwei Paare gemeinsamer Tangenten, welche sich in den Ähnlichkeitscentren schneiden.*

Die weitere Analogie zu den Beziehungen zweier Kreise ist in den Beispielen* erläutert und wird für homothetische Ellipsen durch § 187 begründet. In der Tat erhalten wir aus zwei Kreisen zwei homothetische Ellipsen, indem wir die zur Centrale normalen Kreisordinaten um ihre Fufspunkte um einen constanten Winkel drehen.

Parabeln mit parallelen Axen besitzen nur ein Centrum der Ähnlichkeit und nur ein Paar gemeinsamer Tangenten, nämlich im Endlichen, da je das zweite in die unendlich ferne Gerade fällt (§ 241). Das Ähnlichkeitscentrum teilt die Verbindungsgerade der Scheitel im Verhältnis der Hauptparameter, denn die Entfernungen zwischen Scheiteln und Brennpunkten sind

parallel und proportional. Der Teilpunkt ist ein äufserer oder innerer, je nachdem die Parabeln in demselben oder in entgegengesetztem Sinn gekrümmt sind.

B. 1) Wenn durch ein Centrum der Ähnlichkeit von zwei ähnlichen Kegelschnitten in ähnlicher Lage ein Paar Vectoren gezogen werden, so sind die Verbindungssehnen ihrer Endpunkte entweder parallel, oder sie schneiden sich in der Sehne der endlichen Schnittpunkte der Kegelschnitte. Beweis wie in § 136.

2) Die sechs Centra der Ähnlichkeit dreier homothetischer Kegelschnitte liegen zu dreien in vier Geraden (den Ähnlichkeitsaxen § 131).

3) Das Ähnlichkeitsverhältnis k zweier durch ihre allgemeinen Gleichungen gegebenen homothetischen Kegelschnitte ist durch $\mathsf{D} = k^2 \mathsf{D}'$ bestimmt, wenn D, D' ihre Discriminanten sind.

Die Coordinaten der Ähnlichkeitscentra ergeben sich daraus, dafs diese die Centrale $x_0 | y_0$, $x_0' | y_0'$ im Verhältnis $\pm k$ teilen.

244. **Concentrische homothetische Kegelschnitte.** Die Besonderheit der Beziehung von *Kegelschnitten mit gemeinsamen Asymptoten* ist dadurch zu charakterisiren, dafs sie *homothetisch und concentrisch* sind. Da dann ihre Axen zusammenfallen, heifsen sie auch *coaxial.* Solche Kegelschnitte haben dieselben unendlich fernen Punkte und in ihnen überdies dieselben Tangenten. *Ähnliche, ähnlich gelegene, concentrische Kegelschnitte berühren einander in ihren unendlich fernen Punkten,* haben also im Endlichen keine Schnittpunkte, wie dies uns von den concentrischen Kreisen bekannt ist (§ 120).

Die Gleichungen concentrisch-homothetischer Kegelschnitte sind nur in den constanten Gliedern verschieden. Denn nicht nur die Coefficienten der Glieder zweiten Grades müssen proportional sein (§ 241), sondern auch diejenigen der Glieder ersten Grades, weil die Coordinaten des Centrums auch von ihnen, nicht aber von a_{33} abhängen (§ 147).

Zwei Parabeln, deren Gleichungen nur im constanten Glied differiren, haben gleiche Axen und gleiche Hauptparameter, da weder jene (§ 212) noch dieser (§ 213) von a_{33} abhängt. *Coaxiale und ähnlich gelegene Parabeln $y^2 = 2px$, $y^2 = 2p(x - x_0)$ sind congruent und haben mit einander eine Berührung dritter Ordnung im Unendlichen;* sie berühren sich dort (§ 241) und haben keine Schnittpunkte im Endlichen.

B. 1) Die Fuſspunkte der Normalen concentrisch-homothetischer Kegelschnitte aus einem Axenpunkt liegen in derselben Axenordinate (§§ 192. 221).

2) Wenn eine Gerade zwei ähnliche, ähnlich gelegene und concentrische Kegelschnitte schneidet, so sind die zwischen den Kegelschnitten enthaltenen Abschnitte gleich. Jede Sehne des äuſseren Kegelschnittes, welche den inneren berührt, wird im Berührungspunkt halbirt.

Dies wird in derselben Art bewiesen, wie die Sätze des § 188, welche specielle Fälle des gegenwärtigen Satzes sind; denn die Asymptoten einer Hyperbel können als ein zu ihr ähnlicher Kegelschnitt in ähnlicher Lage betrachtet werden, weil die höchsten Glieder in der Gleichung der Asymptoten dieselben wie die in der Gleichung der Curve sind.

3) Wenn eine Tangente in V, dem Scheitel der inneren von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen, die äuſsere in den Punkten T und T' schneidet, so ist jede durch V gezogene Sehne der inneren die Hälfte der algebraischen Summe der parallelen Sehnen der äuſseren durch T und T'.

4) Die Quadratsumme der Tangenten t_1, t_2, welche von Punkten einer Ellipse a, b an eine concentrisch-homothetische von den Halbaxen ka, kb gehen, ist constant:

$$t_1^2 + t_2^2 = 4(1 - k^2)(a^2 + b^2).$$

245. **Ähnliche Kegelschnitte.** Zwei Figuren sind *ähnlich, aber nicht in ähnlicher Lage*, wenn die proportionalen Vectoren einen constanten Winkel mit einander machen, anstatt parallel zu sein. Wenn wir also die eine der Figuren um diesen Winkel gedreht denken, so wird auch die ähnliche Lage hergestellt.

Unter welcher Bedingung sind zwei durch die allgemeinen Gleichungen gegebene Kegelschnitte ähnlich?

Wir haben nur die erste Gleichung zu Axen zu transformiren, welche mit den gegebenen irgend einen Winkel ϑ machen, und zu untersuchen, ob dem ϑ ein Wert beigelegt werden kann, welcher die neuen Coefficienten a_{11}', a_{12}', a_{22}' den alten a_{11}, a_{12}, a_{22} proportional macht. Sei $a_{11} = ka_{11}'$, $a_{12} = ka_{12}'$, $a_{22} = ka_{22}'$, so sahen wir für rectanguläre Axen in § 166, daſs die Gröſsen $a_{11} + a_{22}$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ durch Transformation der Coordinaten unverändert bleiben, und daſs also

$$a_{11} + a_{22} = k(a_{11}' + a_{22}'), \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = k^2(a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2)$$

ist. Durch Elimination von k folgt die geforderte Bedingung
$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) : (a_{11} + a_{22})^2 = (a_{11}' a_{22}' - a_{12}'^2) : (a_{11}' + a_{22}')^2$.

In schiefwinkligen Coordinaten findet man in derselben Art nach § 168 die Bedingung der Ähnlichkeit

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)^2} = \frac{a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2}{(a_{11}' + a_{22}' - 2a_{12}'\cos\omega)^2}.$$

Aus § 55 geht als die geometrische Bedeutung der gefundenen Bedingung hervor, dafs die Winkel der reellen oder imaginären Asymptotenpaare der beiden Curven gleich sind. *Insbesondere sind zwei Parabeln stets ähnlich,* da dann die gefundene Bedingung identisch erfüllt ist.

Man sieht auch, dafs die Ausdrücke concentrisch-homothetisch und coaxial ähnlich gleichbedeutend sind.

246. **Confocale Kegelschnitte.** Unter den coaxialen Kegelschnitten haben aufser den ähnlichen diejenigen eine grofse Zahl merkwürdiger Beziehungen zu einander, welche *dieselben Brennpunkte* besitzen und daher *confocale* (*homofocale*) *Kegelschnitte**) heifsen. Denn eine grofse Zahl der im X. Kapitel entwickelten Eigenschaften der Kegelschnitte hängen nur von den Brennpunkten und nicht von den Axenlängen ab.

Zwei Centralkegelschnitte, deren gleichnamige Axen je in dieselbe Gerade fallen, sind confocal, wenn sie die gleiche Focaldistanz c haben, d. h. wenn die Differenz ihrer Halbaxenquadrate constant ist. Bezeichnet k eine willkürliche Gröfse, so sind *die Gleichungen aller confocalen Kegelschnitte mit den Brennpunkten* $\pm\sqrt{(a^2 - b^2)}\,|\,0$ *in der Form enthalten*

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1.$$

Diese Gleichungen stellen reelle Ellipsen dar für alle negativen und diejenigen positiven Werte von k, welche kleiner als $b^2 < a^2$ sind; bei wachsendem k rücken die Scheitel der grofsen Axe den Brennpunkten immer näher. Für Werte von k zwischen b^2 und a^2 sind die Curven Hyperbeln, deren Hauptaxen mit wachsendem k kleiner werden. Endlich liefern alle

*) Zuweilen nennt man Kegelschnitte, welche *einen* der Brennpunkte und die Hauptaxe gemein haben, confocal, die des Textes *biconfocal.*

a^2 übersteigenden positiven Werte von k imaginäre Ellipsen. *Die confocalen Kegelschnitte sind Ellipsen, Hyperbeln oder imaginäre Curven, je nachdem $k < b^2$, $b^2 < k < a^2$ oder $a^2 < k$ ist.*

Den Werten $k = b^2$ bez. $k = a^2$ entspricht die Reduction der Gleichung auf $y^2 = 0$ bez. $x^2 = 0$, so dafs die Axen selbst als die Grenzen erscheinen, welche confocale Kegelschnitte verschiedener Gattungen trennen. Indessen werden wir erkennen (§ 248 Anm., § 250), dafs die Brennpunktspaare selbst in ganz besonderem Sinne diese Grenzen bilden.

247. **Schnitt confocaler Ellipsen und Hyperbeln.** *Zwei confocale Ellipsen bez. Hyperbeln haben keine reellen Schnittpunkte.* Denn, sind ihre Gleichungen

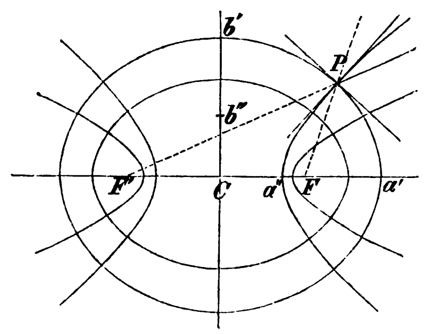
$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2 - k'} + \frac{y^2}{b^2 - k'} = 1,$$

so genügen die Coordinaten des Schnittpunktes auch ihrer Differenz, welche durch $k - k'$ dividirt die Gleichung liefert

$$\frac{x^2}{(a^2 - k)(a^2 - k')} + \frac{y^2}{(b^2 - k)(b^2 - k')} = 0.$$

Diese stellt aber stets ein imaginäres Linienpaar (Durchmesserpaar) dar, sobald k und k' einer und derselben der Ungleichheiten des § 246 genügen, also die beiden Factoren der Glieder je gleiche Zeichen haben.

Dagegen haben, falls $k < b^2$, $b^2 < k' < a^2$ ist, die beiden Glieder entgegengesetzte Zeichen. *Eine Ellipse und eine Hyperbel des confocalen Systems schneiden sich in vier reellen Punkten.* Diese bilden ein bezüglich der Axen symmetrisches Rechteck.



Zwei confocale Kegelschnitte schneiden sich stets orthogonal, denn in jedem Schnittpunkt $x' \mid y'$ zweier confocalen Kegelschnitte sind deren Tangenten in $x' \mid y'$

$$\frac{x'x}{a^2 - k} + \frac{y'y}{b^2 - k} = 1, \quad \frac{x'x}{a^2 - k'} + \frac{y'y}{b^2 - k'} = 1$$

und die Bedingung ihrer Orthogonalität (§ 36) ist identisch mit dem Resultat der Substitution von $x' \mid y'$ in die Gleichung des obigen Linienpaares. Dafs eine reelle Ellipse und eine Hyperbel mit gemeinsamen Brennpunkten sich rechtwinklig schneiden, folgt auch schon daraus, dafs ihre Tangenten in jedem Schnittpunkt die äufsere und die innere Halbirungslinie des Winkels seiner Brennstrahlen sind (§ 201). Die Hauptaxe der Ellipse bez. Hyperbel ist dann gleich der Summe bez. Differenz dieser Brennstrahlen*).

Hieran schliefsen sich fernere Übertragungen der Brennpunktseigenschaften auf Beziehungen zwischen confocalen Kegelschnitten. *Die Tangente und die Normale in einem Punkte P eines Kegelschnittes sind für alle Tangentenpaare aus P an confocale Kegelschnitte die Winkelhalbirenden.* Denn nach der Figur des § 202 haben die Tangenten PT, Pt und die Brennstrahlen PF, PF' dieselben Winkelhalbirenden, und zwar sind dies, wenn wir uns einen Kegelschnitt durch P denken, der F, F' zu Brennpunkten hat, nach § 201 dessen Tangente und Normale.

B. 1) Der Ort des Poles einer festen Geraden in Bezug auf confocale Kegelschnitte ist eine zu ihr senkrechte Gerade.

Der Pol einer Geraden $\xi x + \eta y + 1 = 0$ in Bezug auf $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ wird aus den Gleichungen $-x = a^2\xi$, $-y = b^2\eta$ (§ 181) gefunden; wenn die Brennpunkte des Kegelschnittes gegeben sind, so ist $a^2 - b^2 = c^2$ bestimmt und der Ort des Pols durch $-\eta x + \xi y = c^2\xi y$ repräsentirt.

2) Die Tangenten eines Kegelschnittes in den Punkten, in denen die Tangente eines confocalen Kegelschnittes ihn schneidet, begegnen sich in der Normale des letzteren.

Denn dies ist der Ort der Pole in 1), weil der Schnittpunkt der gegebenen Geraden mit dem Ort der Berührungspunkt derselben mit einem der Kegelschnitte ist.

3) Der Ort der Berührungspunkte der Tangenten aus einem festen Punkt der grofsen Axe an confocale Ellipsen ist ein Kreis.

4) Das Product der Tangenten in § 208. 7) ist offenbar

---

*) Man erkennt, dafs die Methode des § 209 ebenfalls Paare confocaler Curven liefert. Man zeigt leicht, dafs die Ellipse und die Hyperbel jener Construction die Winkel der Grundkreise halbiren

auch noch constant, wenn O nicht fest ist, sondern einen mit dem gegebenen confocalen Kegelschnitt durchläuft.

5) Der Satz § 208. 14) gilt auch noch, wenn statt OF, OF' die Tangenten OT, Ot an einen confocalen Kegelschnitt gesetzt werden. Hieraus folgt:

Die einen confocalen Kegelschnitt berührenden Sehnen eines Kegelschnittes sind den Quadraten der parallelen Durchmesser des letzteren proportional.

6) Die Länge der Sehne einer Ellipse, welche eine confocale Ellipse von den Halbaxenquadraten $a^2 - k^2$, $b^2 - k^2$ berührt, ist $= 2kb'^2 : ab$.[54])

Die Bedingung, unter welcher die Sehne zwischen den Punkten von den excentrischen Anomalien α, β den confocalen Kegelschnitt berührt, ist

$$b^2 (a^2 - k^2) \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + a^2 (b^2 - k^2) \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = a^2 b^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

und man hat (§ 183. 4))

$$a^2 b^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = k^2 \{ b^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta \} = k^2 b'^2.$$

Die Länge der Sehne ist $2b' \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = 2kb'^2 : ab$.

Mit Hilfe dieses Satzes können verschiedene auf Focalsehnen bezügliche Sätze auf Sehnen ausgedehnt werden, welche confocale Kegelschnitte berühren.

248. **Elliptische Coordinaten.** *Durch jeden reellen oder imaginären Punkt der Ebene gehen zwei Kegelschnitte von gegebenen Brennpunkten, welche sich rechtwinklig schneiden.* Denn die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1$$

liefert bei Einsetzung von $x' | y'$ eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von k

$$k^2 - k(a^2 + b^2 - x'^2 - y'^2) + a^2 b^2 - b^2 x'^2 - a^2 y'^2 = 0.$$

Durch jeden reellen Punkt P gehen also (§ 247) eine Ellipse und eine Hyperbel von gegebenen Brennpunkten F, F'. Man bestätigt dies direct durch den Nachweis, dafs zwischen $-\infty$ und b^2, zwischen b^2 und a^2 stets je eine reelle Wurzel jener Gleichung liegt (Vorles. Art. 46)*). Entsprechend den Wurzeln k' bez. k'' seien

*) Für Punkte $x' | 0$ zerfällt die Gleichung in $(k - b^2)(k - a^2 + x'^2) = 0$,

$a^2 - k' = a'^2$, $b^2 - k' = b'^2$; $a^2 - k'' = a''^2$, $b^2 - k'' = -b''^2$ die Halbaxenquadrate der Ellipse bez. der Hyperbel.

Diese Theorie kann eine neue Art von Coordinaten eines Punktes P definiren, die manchmal brauchbar ist. *Man nennt die Wurzeln k', k'' der obigen Gleichung die elliptischen Coordinaten des Punktes $x' \,|\, y'$.* In der Tat ist auch P eindeutig durch zwei confocale Kegelschnitte bestimmt, wenn man sich auf Punkte des positiven Axenwinkels beschränkt. Man ersetzt dann k', k'' zweckmäfsig durch die Angabe der halben Hauptaxen a', a'' dieser Curven und drückt durch sie $x' \,|\, y'$ und die Längen aller von P abhängigen Linien aus. Nach § 201 sind z. B. die Brennstrahlen des Punktes k', k'' $FP = a' + a''$, $F'P = a' - a''$.

Da nämlich nach obiger Gleichung

$$k' + k'' = a^2 + b^2 - x'^2 - y'^2, \quad k'k'' = a^2b^2 - b^2x'^2 - a^2y'^2,$$

so können wir die Summen und Producte bilden

$$a'^2 + a''^2 = c^2 + x'^2 + y'^2, \quad b'^2 + (-b''^2) = -c^2 + x'^2 + y'^2,$$
$$a'^2a''^2 = c^2x'^2, \quad -b'^2b''^2 = -c^2y'^2,$$

also quadratische Gleichungen mit den Wurzelpaaren a'^2, b'^2 und a''^2, $-b''^2$ aufstellen. Die Betrachtung der Vorzeichen lehrt, dafs a'^2, b'^2; a''^2, b''^2 positive Zahlen, die Curven verschiedener Gattung sind. *Aus den elliptischen Coordinaten k', k'' eines Punktes folgen seine rechtwinkligen durch*

$$x'^2 = \frac{a'^2a''^2}{a^2 - b^2}, \quad y'^2 = \frac{b'^2b''^2}{a^2 - b^2}.$$

Aus den obigen Summen folgen aber

$$x'^2 + y'^2 = a'^2 + a''^2 - c^2 = a''^2 + b'^2 = a' - b''^2$$

als das Quadrat des der Ellipse und der Hyperbel gemeinsamen Halbmessers CP. Dagegen ist das Quadrat der zu denselben conjugirten Halbmesser der Ellipse

---

die Wurzel $k = b^2$ liefert $y^2 = 0$, $k = a^2 - x'^2$ den Kegelschnitt, der $x' \,|\, 0$ zum Scheitel hat. Wenn dagegen speciell $x'^2 = a^2 - b^2$, so dafs auch die zweite Wurzel $k = b^2$ ist, so ist klar, dafs die *Brennpunkte* $\pm c \,|\, 0$ in einem gewissen Sinn dem Wert $k = b^2$ entsprechen, ebenso $0 \,|\, \pm ci$ in $x^2 = 0$ dem Wert $k = a^2$.

$$a'^2 + b'^2 - (a''^2 + b'^2) = a'^2 - a''^2 = b'^2 + b''^2,$$

während für die der Hyperbel der Wert mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen ist.

B. 1) Neigungswinkel ψ zwischen den Tangenten PT, Pt aus einem Punkt P an eine Ellipse und der Tangente in P an die confocale Ellipse.

Nach § 247 ist $\psi = \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}TPt$, also ist der Winkel des Tangentenpaares zu bestimmen (§ 181. 2)). Sind a', a'' die halben Hauptaxen der confocalen Curven durch P, so ist

$$k'k'' = (a'^2 - a^2)(a''^2 - a^2) = a^2b^2 - b^2x'^2 - a^2y'^2$$

und $a'' < a < a'$ für ein reelles Tangentenpaar. Also nach § 181. 3)

$$\tan\varphi = \frac{2\sqrt{(a'^2 - a^2)(a^2 - a''^2)}}{(a'^2 - a^2) + (a''^2 - a^2)}, \quad \tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{a^2 - a''^2}{a'^2 - a^2}},$$

somit $$\sin\psi = \sqrt{\frac{a'^2 - a^2}{a'^2 - a''^2}}, \quad \cos\psi = \sqrt{\frac{a^2 - a''^2}{a'^2 - a''^2}}.$$

2) Wenn die Focalabstände PF, PF' auf den Tangenten PT, Pt von P aus abgetragen werden, so ist die Entfernung zwischen den Endpunkten gleich der grofsen Axe.

Denn die Focalabstände sind $a' + a''$, $a' - a''$ und in dem Dreieck mit der dritten Seite $2a$ ergibt sich trigonometrisch für $\tan\frac{1}{2}\varphi$ genau der obige Wert.

3) Werden von P aus Tangenten an zwei feste confocale Ellipsen gezogen, so ist das Sinusverhältnis der Neigungswinkel ψ, ψ' desselben gegen die Tangente der durch P gehenden confocalen Ellipse constant, wenn P diese Ellipse durchläuft.

Denn sind a_1, a_2 die Halbaxen der innern Ellipsen, so ist

$$\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \sqrt{\frac{a'^2 - a_1^2}{a'^2 - a_2^2}}$$

von a'' unabhängig, also für Punkte der Ellipse a' constant.

4) Die Abstände p' bez. p'' der Ellipsen- bez. Hyperbeltangente in P vom Centrum sind

$$p'^2 = \frac{a'^2b'^2}{a'^2 - a''^2}, \quad p''^2 = \frac{a''^2b''^2}{a'^2 - a''^2},$$

denn sie folgen aus den zu CP conjugirten Halbmessern nach § 184. 2).

5) Nimmt man die Tangenten von zwei confocalen Kegelschnitten a', a'' im Schnittpunkt P als Axen, so gibt es zwei confocale Kegelschnitte, welche die Axen jener in C berühren und selbst die Halbaxenpaare a', a''; b', b'' haben.

Dieser Satz ist nur der Ausdruck der Analogie zwischen

den Werten für p'^2, p''^2 in 4) und denen des Textes für x'^2, y'^2, während p', p'' wirklich die auf die Tangenten als Axen bezogenen Coordinaten von C sind.

249. **Confocale Parabeln.** Da Parabeln als Ellipsen oder Hyperbeln mit einem unendlich fernen Brennpunkt aufgefafst werden können (§ 222), so sind *confocale Parabeln solche, welche denselben Brennpunkt und dieselbe Axe besitzen.* Die allgemeinen Sätze über confocale Centralkegelschnitte übertragen sich mit jener Modification auf confocale Parabeln.

Die Gleichung für den Brennpunkt als Nullpunkt lautet

$$y^2 - 2px - p^2 = 0,$$

mit willkürlichem Hauptparameter p. Die Parabeln verlaufen, je nachdem p positiv oder negativ ist, im positiven oder im negativen Sinn der x-Axe. *Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Parabeln von gegebenem Brennpunkt und gegebener Axe, welche sich rechtwinklig schneiden.* Denn durch Einsetzung von $x' \mid y'$ entsteht eine quadratische Gleichung mit den Wurzeln p, p', für welche Summe und Product

$$p + p' = -2x', \quad pp' = -y'^2.$$

Die zweite Bedingung zeigt, dafs die Tangenten der zu p und p' gehörigen Parabeln orthogonal sind. In confocalen Parabeln mit reellen Schnittpunkten sind die Brennstrahlen der Scheitel $\frac{1}{2}p$ und $\frac{1}{2}p'$ entgegengesetzt gerichtet.

B. Die Tangentenpaare aus P an confocale Parabeln haben dieselben Winkelhalbirenden wie der Brennstrahl und die Axenparallele von P.

Man prüfe die Gültigkeit der Sätze § 248. 3) 5) für Parabeln.

250. **Confocale Curven zweiter Classe.** Neben der vorstehenden ist die Behandlung in Liniencoordinaten angezeigt. Nach § 181 ist *die Tangentialgleichung confocaler Centralkegelschnitte*

$$(a^2 - k)\xi^2 + (b^2 - k)\eta^2 = 1 \text{ oder } a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - 1 = k(\xi^2 + \eta^2),$$

und man erhält leicht wie in § 210 *die der confocalen Parabeln* aus $(p + x')\xi = 1$, $y'\xi = -p\eta$ als $2\xi = p(\xi^2 + \eta^2)$.

Da diese Gleichungen die Constante k bez. p nur linear enthalten, so berührt unter den confocalen Kegelschnitten

nur je einer eine gegebene Gerade $\xi \mid \eta$. *Durch die Brennpunkte und eine Tangente ist daher ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt*, nicht aber durch die Brennpunkte und einen Punkt (vgl. § 248 Anm.).

Die Discussion der Gleichungen für die Werte der Constanten liefert eine bemerkenswerte neue Anschauung der Grenzfälle $k = b^2$, $k = a^2$, $p = 0$. Dieselben liefern nämlich

$$c^2 \xi^2 - 1 = 0, \quad c^2 \eta^2 + 1 = 0; \quad \xi = 0,$$

d. h. zerfallende *Gleichungen von Punktepaaren*. Das erste bez. zweite Punktepaar wird von den reellen bez. imaginären Brennpunkten gebildet; endlich $\xi = 0$ steht für $0 \cdot \xi^2 + \xi = 0$ (§ 15), oder sowol für $\xi = 0$ als $1 : \xi = 0$, die Gleichungen der Punkte $\infty \mid 0$ und $0 \mid 0$, die Brennpunkte der Parabel. Das heifst: alle Strahlen durch den einen oder den andern Brennpunkt eines Paares sind Tangenten einer confocalen Curve zweiter Classe. *Somit gelten die Paare der Brennpunkte selbst als Grenzformen*, das reelle als die zwischen confocalen Ellipsen und Hyperbeln, positiv oder negativ gerichteten confocalen Parabeln, das imaginäre als die zwischen Hyperbeln und imaginären Kegelschnitten. Dabei werden aber die Kegelschnitte ausdrücklich nur als *Curven zweiter Classe* betrachtet, während in § 246 die Axen selbst als degenerirte Curven zweiter Ordnung auftraten.

Den beiden zu k und k' oder p und p' gehörigen Curvengleichungen genügen nur solche Wertepaare von $\xi \mid \eta$ gleichzeitig, welche auch ihre Differenz befriedigen, nämlich $\xi^2 + \eta^2 = 0$. Diese Gleichung stellt aber das Paar der absoluten Richtungen dar (§ 58). *Alle confocalen Curven zweiter Classe berühren vier feste Tangenten der absoluten Richtungen.* Wirklich ist dies nach § 195 geradezu die Definition der gemeinsamen Brennpunkte.

Dreizehntes Kapitel.

Die Methode des Unendlich-Kleinen.

251. Die Differential-Rechnung erlaubt auf sehr einfache Weise, die Tangenten der Curven, die Gröfse ihrer Flächen und die Länge ihrer Bögen zu bestimmen. Obgleich wir von ihrer Symbolik und ihren Grundbegriffen in diesem Werke weiterhin mehrfachen Gebrauch machen werden, wollen wir doch einige der angedeuteten Fragen, insofern sie sich eben nur auf Kegelschnitte beziehen, hier ohne ihre directe Vermittelung behandeln, um eine Idee von der Methode zu geben, nach der solche Fragen vor der Entdeckung der Differential- und Integral-Rechnung behandelt wurden.

Wir geben damit zugleich ihren analytischen Begriffen die geometrische Basis. Und die geometrische Methode, welche wir erläutern, besitzt in Bezug auf manche Fragen vor der Analysis den Vorzug der Einfachheit und Strenge; sie hat noch in neuester Zeit zu einzelnen schönen Ergebnissen geführt (vgl. § 266), welche durch Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung nicht gefunden worden waren.

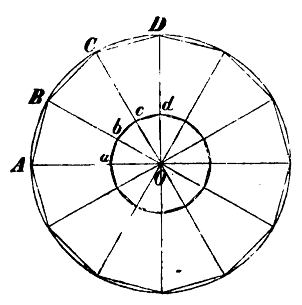
Wenn ein Polygon von gleichen Seiten einer Curve eingeschrieben ist, so nähert sich augenscheinlich der Inhalt und Umfang des Polygons um so mehr der Gleichheit mit dem Inhalt und Umfang der Curve, je gröfser die Zahl der Seiten des Polygons und je kleiner damit jede einzelne Seite desselben wird; gleichzeitig nähert sich jede Seite des Polygons mehr und mehr dem Zusammenfallen mit der Tangente der Curve in dem Punkt, in welchem sie dieselbe schneidet. Wenn die Zahl der Seiten unendlich grofs und die Länge jeder einzelnen Seite unendlich klein geworden ist, so fällt

das Polygon mit der Curve zusammen, und die Tangente derselben in jedem ihrer Punkte wird mit der Verbindungsgeraden zweier unendlich benachbarten Punkte in ihr identisch.

Ebenso nähert sich Inhalt und Umfang eines umgeschriebenen Polygons dem Inhalt und Umfang der Curve um so mehr, je gröſser die Zahl seiner Seiten und je kleiner jede einzelne Seite wird; gleichzeitig nähert sich der Schnittpunkt zweier benachbarter Seiten mehr und mehr dem Berührungspunkt einer jeden derselben. Man kann daher zur Untersuchung des Inhalts und Umfangs einer Curve für dieselbe ein eingeschriebenes oder umgeschriebenes Polygon substituiren, dessen Seitenzahl unendlich groſs und dessen Seiten unendlich klein sind, und jede Tangente der Curve als die Verbindungsgerade zweier unendlich nahen Punkte der Curve, und jeden Punkt der Curve als den Schnittpunkt zweier unendlich nahen Tangenten derselben betrachten.

252. Beisp. 1. *Die Richtung der Tangente in einem Punkt des Kreises zu bestimmen.*

Wir denken uns ein eingeschriebenes reguläres Polygon. Auf jedes der gleichseitigen Dreiecke, in welche es durch die nach seinen Ecken gehenden Radien zerlegt wird, läſst sich dann die Bemerkung anwenden, daſs der Basiswinkel OBA um die Hälfte des Winkels an der Spitze kleiner ist als ein rechter Winkel. Wenn alsdann die Zahl der Seiten des Polygons als unendlich groſs gedacht wird, so daſs jede einzelne unendlich klein sein muſs, so wird der Winkel an der Spitze jedes dieser Dreiecke kleiner als jeder angebbare Winkel: *die Tangente des Kreises bildet daher mit dem Radius des Berührungspunktes einen rechten Winkel.* Es bietet sich häufig die Gelegenheit zur Anwendung eines Princips dar, welches hierin mit enthalten ist, nämlich, *daſs die gleichlangen Schenkel eines unendlich kleinen Winkels zu der Verbindungsgeraden ihrer Endpunkte rechtwinklig sind.*



Beisp. 2. *Die Umfänge zweier Kreise stehen in demselben Verhältnis wie ihre Radien.*

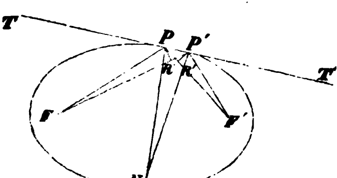
Wenn reguläre Polygone von gleicher Anzahl der Seiten in beide Kreise eingeschrieben werden, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke des einen mit denen des andern, dafs ihre Basen ab und AB in dem Verhältnis der Radien beider Kreise stehen, und daraus, dafs die Umfänge beider Polygone als die Summen solcher Seiten, folglich auch, wenn die Seitenzahl unendlich grofs gedacht wird, die Kreisperipherien in demselben Verhältnis stehen.

Beisp. 3. *Der Inhalt eines Kreises ist dem Product aus dem Halbmesser in den halben Umfang desselben gleich.*

Denn der Inhalt jedes der Dreiecke OAB ist das Product aus der Hälfte seiner Basis in die vom Centrum auf dieselbe gefällte Senkrechte; somit ist der Inhalt jedes der betrachteten regulären Polygone gleich dem mit der senkrechten Entfernung einer Seite desselben multiplicirten halben Umfang. Mit der Vermehrung ihrer Zahl nähert sich ohne Ende der Umfang des Polygons der Peripherie des Kreises und jene senkrechte Entfernung einer Seite dem Halbmesser des Kreises, so dafs die Differenz beider kleiner als jede angebbare Gröfse gemacht werden kann. Demnach ist das ausgesprochene Resultat richtig. Da der Kreisumfang gleich $2\pi\varrho$ ist, so wird der Inhalt eines Kreises durch $\pi\varrho^2$ ausgedrückt.

253. Beisp. 1. *Die Richtung der Tangente in einem Punkt der Ellipse zu bestimmen.*

Man bezeichne durch P und P' zwei unendlich nahe Punkte der Curve, so dafs man hat $FP + PF' = FP' + P'F'$. Nimmt man dann $FR = FP$ und $F'R' = F'P'$, so ist $P'R = PR'$. Die beiden Dreiecke PRP' und $PR'P'$ besitzen die gemeinschaftliche Basis PP', die gleichen Katheten $P'R$ und PR' und nach dem Princip des § 252 die rechten Winkel PRP' und $PR'P'$; in folge dessen ist $\sphericalangle PP'R = \sphericalangle P'PR'$. Unter der Voraussetzung, welche wir gemacht haben, dafs die Punkte



P und P' unendlich nahe sind, ist $\sphericalangle TPF = \sphericalangle PP'F$, weil ihre Differenz unter jeden angebbaren Winkel herabgebracht werden kann; demnach hat man $\sphericalangle TPF = \sphericalangle T'PF'$: die Brennstrahlen des Berührungspunktes machen gleiche Winkel mit der Tangente und bestimmen sie dadurch (§ 201).

Beisp. 2. *Man soll die Richtung der Tangente in einem Punkt der Hyperbel bestimmen.*

Wir haben bei der nämlichen Construction wie vorher

$$F'P' - F'P = FP' - FP, \text{ oder } P'R = P'R'.$$

Demnach ist $\sphericalangle PP'R = \sphericalangle PP'R'$, oder: die Tangente ist die innere Halbirungslinie des Winkels der Brennstrahlen von P'.

Beisp. 3. In derselben Art bestimmen wir *die Richtung der Tangente in einem Punkt der Parabel;* denn wir haben

$$FP = PN \text{ und } FP' = P'N';$$

also $P'R = P'S$ oder $\sphericalangle N'P'P = \sphericalangle FP'P$.

Die Tangente halbirt den Winkel FPN, den der Brennstrahl des Berührungspunktes mit dem durch ihn gezogenen Durchmesser der Parabel bildet.

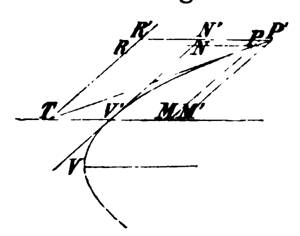
254. Beisp. 1. *Man soll den Inhalt des parabolischen Sectors FVP bestimmen.*

Weil $PS = PR$ und $PN = FP$ ist, so ist die Fläche des Dreiecks FPR die Hälfte des Parallelogramms $PSN'N$. Wenn wir eine Anzahl von Punkten P', P'' etc. zwischen V und P nehmen, so wird die Summe aller der entsprechenden Parallelogramme $PSN'N$ etc. der Gleichheit mit dem Inhalt der Fläche $DVPN$ um so mehr genähert, je näher die einzelnen Punkte P einander sind; ebenso die Summe aller Dreiecke FPR der Gleichheit mit dem Inhalt der Fläche des Sectors VFP. Demnach ist der Inhalt des Sectors PFV die Hälfte von $DVPN$ und somit ein Drittel des Vierecks $DFPN$.

Beisp. 2. *Man bestimme den Inhalt des durch eine beliebige Gerade abgeschnittenen Segments einer Parabel.*

Man zieht den Durchmesser der Parabel, welcher diese

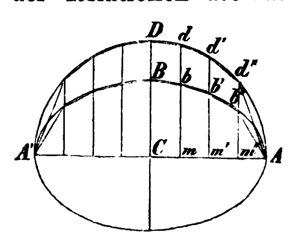
Gerade halbirt; dann ist in der Figur das Parallelogramm PRR' dem Parallelogramm PMM' flächengleich, wie aus ihrer Beziehung zu dem Parallelogramm $TM'P'R'$ und seiner



Diagonale TP' hervorgeht. Die Seite TM ist aber durch die Curve in V' halbirt (§ 218), und das Parallelogramm PNN' ist demnach die Hälfte von PRR'. Wenn wir daher eine Anzahl von Punkten P, P', P'', etc. in der Curve wählen, so ist die Summe der Flächen aller Parallelogramme wie PMM' doppelt so grofs, wie die Summe aller Parallelogramme wie PNN', demnach zuletzt der Inhalt der Fläche $V'PM$ das Doppelte von dem Inhalt der Fläche $V'PN$. Der Inhalt des parabolischen Segments $V'PM$ steht also zu dem Inhalt des Parallelogramms $V'NPM$ in dem Verhältnis von $2:3$.

255. Beisp. 1. *Der Inhalt einer Ellipse ist dem eines Kreises gleich, dessen Halbmesser das geometrische Mittel zwischen den Halbaxen der Ellipse ist.*

Denn, teilt man die Ellipse und den über ihrer grofsen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreis durch Parallelen zur kleinen Axe in schmale Flächenstreifen, so steht wegen der Relationen $mb : md = m'b' : m'd' = b : a$ das Viereck



$mbb'm'$ zu dem Viereck $mdd'm'$ auch in dem Verhältnis $b : a$, demnach die Summe aller Vierecke der einen Reihe, d. h. das der Ellipse eingeschriebene Polygon $CBbb'b''A$, zu dem entsprechenden dem Kreis eingeschriebenen Polygon $Cdd'd''A$ in dem nämlichen Verhältnis. Diese Proportionalität besteht für jede Anzahl der Seiten, welche man den beiden Polygonen geben kann; lassen wir demnach diese Anzahl unbegrenzt wachsen und gleichzeitig alle einzelnen Seiten unbegrenzt abnehmen, so erkennen wir, dafs der Inhalt der Ellipse zu dem des Kreises in dem Verhältnis $b : a$ steht. Also wird der Inhalt der Ellipse durch den Ausdruck πab bestimmt.

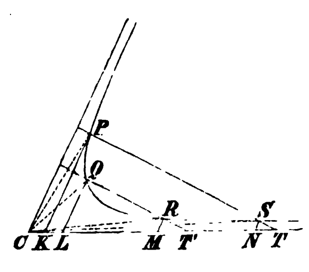
Man beweist ebenso, dafs die Flächen zweier Figuren, deren correspondirende Ordinaten zu einander in einem bestimmten Verhältnis stehen, immer das nämliche Verhältnis haben.

Beisp. 2. *Der Durchmesser eines Kegelschnittes halbirt ihn.*

Die Richtigkeit des Satzes erhellt sofort aus der Betrachtung der Trapeze, in welche die dem Durchmesser entsprechenden Ordinaten die Fläche der Curve zerlegen. Weil der Durchmesser alle ihm entsprechende Ordinaten halbirt, so halbirt er auch diese Trapeze und demnach die Curve, weil die Fläche derselben der Summe dieser Trapeze gleich ist, sobald man die Ordinaten als unendlich nahe voraussetzt.

Beisp. 3. *Die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate der Längen zweier homologer Sehnen derselben.* Denn je zwei Dreiecke, welche in zwei homologen festen Punkten O, o je eine Ecke und homologe Sehnen PQ, pq zu Gegenseiten haben, sind ähnlich und verhalten sich, wie $\overline{OP}^2 : \overline{op}^2$. Dies gilt unabhängig davon, wie sehr sich die Sehnen PQ, pq den Tangenten nähern. Die unbegrenzte Zerlegung in homologe Sectoren von O und o aus ergibt also stets auch für ihre Summe jenes constante Verhältnis.

256. Beisp. 1. *Der Inhalt des Sectors einer Hyperbel, welcher durch die Verbindungsgerade zweier ihrer Punkte mit dem Centrum begrenzt wird, ist dem Inhalt des Segments gleich, welches durch Parallelen zu den Asymptoten von denselben Punkten aus bestimmt wird.*



Denn wegen der Gleichheit der Dreiecke PKC und QLC (§ 178) ist auch die Fläche PQC gleich der Fläche $PQLK$.

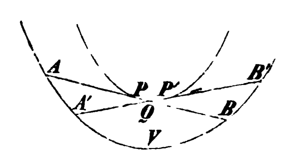
Beisp. 2. *Zwei beliebige Segmente $PQLK$ und $RSNM$ sind gleich, wenn $PK : QL = RM : SN$ ist.* Denn $PK : QL = CL : CK$, und nach § 205 $CL = MT'$, $CK = NT$; also $RM : SN = MT' : NT$, somit QR parallel zu PS. Nun sind die Sectoren PCQ und RCS einander gleich, weil der PS und QR halbirende Durchmesser sowohl den hyperbolischen Inhalt $PQRS$, als auch die Dreiecke PCS und QCR halbirt.

Setzen wir voraus, dafs die Punkte Q und R zusammenfallen, so sehen wir, dafs jeder Inhalt $PKNS$ halbirt werden kann, indem man die Ordinate QL verzeichnet, welche das geometrische Mittel zwischen den Ordinaten seiner Endpunkte ist.

Und wenn Ordinaten bestimmt werden, deren Längen eine stetige geometrische Proportion bilden, so ist der von zwei benachbarten unter ihnen begrenzte Inhalt constant.

257. *Wenn zwei Kegelschnitte ähnlich, ähnlich gelegen und concentrisch sind, so schneidet jede Tangente des innern von beiden ein Segment von constanter Fläche von dem äufsern ab.*

In § 244. 4) ward bewiesen, dafs eine solche Tangente im Berührungspunkt halbirt ist. Wenn wir demnach irgend zwei Tangenten dieser Art betrachten, so ist $\sphericalangle AQA' = \sphericalangle BQB'$; je näher wir den Punkt Q bei dem Punkt P gelegen voraussetzen, desto näher kommen die Seiten AQ, $A'Q$ der Gleichheit mit den Seiten BQ, $B'Q$; daher werden die Dreiecke AQA' und BQB' inhaltsgleich, wenn wir die beiden Tangenten als unendlich nahe betrachten. Dann ist die Fläche AVB der Fläche $A'VB'$ gleich; weil aber diese Fläche beim Übergang von einer Tangente zur nächstbenachbarten unverändert bleibt, so bleibt sie es für jede beliebige Lage der begrenzenden Tangente.



Man kann in derselben Art den umgekehrten Satz beweisen, dafs die Tangente einer Curve im Berührungspunkt halbirt werden mufs, wenn sie in jeder ihrer Lagen eine constante Fläche von einer andern Curve abschneidet; auch gilt es allgemein für jede Curve, dafs der abgeschnittene Flächeninhalt constant ist, wenn die Tangente in jeder ihrer Lagen im Berührungspunkt halbirt wird.

Darnach läfst sich die Aufgabe lösen: *Man soll durch einen gegebenen Punkt im Innern eines Kegelschnittes eine Gerade so ziehen, dafs sie den Minimal-Inhalt von demselben abschneidet.* Wäre verlangt, dafs die gesuchte Gerade einen *gegebenen* Inhalt abschneide, so hätte man durch den Punkt zu einem bestimmten ähnlichen, ähnlich gelegenen, concentrischen Kegelschnitt eine Tangente zu ziehen; mit dem abzuschneidenden In-

halt müfste die Entfernung zwischen beiden Kegelschnitten wachsen. Wenn dieser zweite innere Kegelschnitt durch den gegebenen Punkt selbst geht, so wird der abgeschnittene Inhalt am kleinsten. Weil dann die Gerade als Tangente der Curve in dem gegebenen Punkt halbirt wird, so hat man die Gerade, welche den Minimal-Inhalt abschneiden soll, so durch den gegebenen Punkt zu ziehen, dafs sie in ihm halbirt wird. So für jede Curve.

258. Durch analoge Betrachtungen können die beiden folgenden von Mac Cullagh herrührenden Sätze bewiesen werden: 1) *Wenn die Tangente AB einer Curve in einer anderen Curve einen Bogen AB von constanter Länge abschneidet, so wird sie in ihrem Berührungspunkt P so geteilt, dafs ihre Abschnitte AP und BP in dem umgekehrten Verhältnis der Tangenten AT, BT der letztern Curve in A und B stehen.* 2) *Wenn die Tangente AB von einer constanten Länge ist, und wenn die vom Schnittpunkt T der in A und B an die äufsere Curve gezogenen Tangenten auf AB gefällte Senkrechte sie in M trifft, so ist stets $AP = MB$.*

Man kann die Beweise auch auf den Transversalensatz des § 51. 1) stützen. Im ersten Satz sind die beiden zwischen aufeinanderfolgenden Tangenten AB, $A'B'$ enthaltenen Bogenteile gleich. Behandelt man $A'B'$ als Transversale des Dreiecks ABT, so ist $AA'.TB'.BQ = AQ.BB'.TA'$ und, weil $AA' = BB'$ ist, im Grenzübergang

$$AQ : BQ = TB' : TA' \quad \text{oder} \quad AP : BP = TB : TA.$$

Beim zweiten denken wir das Dreieck $QA'A$ erstens durch TBB', zweitens durch TMM' geschnitten. Die Multiplication der entsprechenden Transversalenrelationen liefert wegen

$$AB = A'B', \quad AM.QM'.QB = A'M'.QM.QB'.$$

Geht man zur Grenze über, so ist $QM = QM'$ zu setzen, weil MM' auf AB senkrecht ist, dagegen kann nicht ebensowol $QB = QB'$ und $AM = A'M'$ angenommen werden, so lange die beiden Tangenten noch irgend welchen kleinen Winkel einschliefsen. Also ist aus $AM.QB = A'M'.QB'$ und aus $AM.QB = A'M'.QB'$ zu schliefsen, dafs $AM = QB'$, $A'M' = QB$, also auch $AM = PB$ ist.

259. *Die Normalen inverser Curven* (§ 138) *in entsprechen-*

den Punkten P, P' derselben schneiden sich auf der Mittelnormale der Strecke PP'.

Denn zwei Punkte P, Q und ihre inversen P', Q' bilden ein Kreisviereck (§ 138), also schneiden sich die Mittelnormalen von PP', QQ', PQ, $P'Q'$ in einem Punkt C'. Nähert sich Q unbegrenzt an P, somit auch P' an Q', so gehen die Mittelnormalen von PQ, $P'Q'$ in die Normalen der von P und P' gleichzeitig beschriebenen Curven über und ihr Schnittpunkt C' bleibt nach dem Satz auf der Mittelnormale von PP'.

Da C das Centrum des in P und P' die Curven berührenden Kreises ist, so sind die Winkel CPP' und $CP'P$ entgegengesetzt gleich, *also bilden auch die Tangenten in inversen Punkten mit dem Inversionsstrahl entgegengesetzt gleiche Winkel* (§ 139). Auch der Schnittpunkt dieser Tangenten in P, P' liegt auf derselben Mittelnormale von PP'.

260. Wir haben mehrmals (§§ 203. 226) von einem festen Punkt O aus die Perpendikel OT auf die Tangenten PT einer Curve gefällt und den Ort ihrer Fufspunkte T bestimmt; derselbe heifst die *Fufspunktcurve zu O.*

Die Normale der Fufspunktcurve im Punkt T halbirt OP.

Sei in der Tangente vom Berührungspunkt P' der Fufspunkt des Perpendikels T' und Q der Schnittpunkt der Tangenten in P und in P'. Dann liegen T und T' auf dem über OQ als Durchmesser beschriebenen Kreis, also halbirt die Mittelnormale von TT' den Durchmesser in C'. Nähert sich nun P' unbegrenzt P, so fällt der Tangentenschnittpunkt Q mit P zusammen, ebenso T' mit T und die Mittelnormale von TT' wird Normale der von P erzeugten Fufspunktcurve.

261. *Den Krümmungsradius in einem beliebigen Punkt einer Ellipse zu bestimmen.*

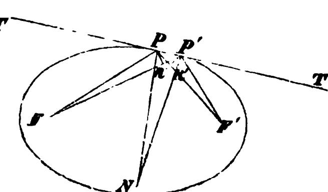
Weil der Mittelpunkt des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises der Schnittpunkt der Mittelnormalen seiner Seiten ist, so ist das Centrum des durch drei aufeinander folgende Punkte einer Curve gehenden Kreises der Schnittpunkt zweier aufeinander folgenden Normalen der Curve. (§ 238.)

Betrachten wir also zwei Dreiecke FPF' und $FP'F'$ und bezeichnen die Halbirungslinien ihrer Winkel an der Spitze

durch PN, $P'N$, so beweisen wir elementar-geometrisch, dafs

$$2 \sphericalangle PNP' = \sphericalangle PFP' + \sphericalangle PF'P'.$$

Weil nun der Bogen eines Kreises dem Radius desselben und der Gröfse des Centriwinkels proportional ist, so wird $\sphericalangle PNP'$ durch $PP' : PN$ gemessen, wenn wir den Bogen PP' als Bogen des Kreises vom Centrum N betrachten. Ebenso



wird für $FR = FP$, $\sphericalangle PFP'$ durch $PR : FP$ gemessen, und wir erhalten

$$\frac{2PP'}{PN} = \frac{PR}{FP} + \frac{P'R'}{F'P'}.$$

Wenn wir den Winkel $PP'F$ durch ϑ bezeichnen, so ist

$$PR = P'R' = PP' \sin \vartheta,$$

und, indem wir $PN = \varrho$, $FP = r$ und $F'P = r'$ setzen,

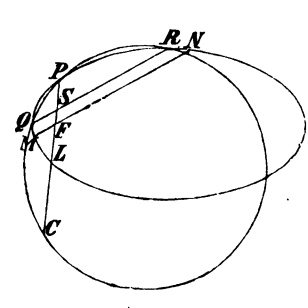
$$\frac{2}{\varrho \sin \vartheta} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$

Also ist *die Focalsehne der Krümmung* ($2\varrho \sin \vartheta$ § 237. 3f.)) *für einen Punkt der Ellipse das Doppelte des harmonischen Mittels zwischen seinen Brennstrahlen.*

Wenn man für $\sin \vartheta$ den Wert $b : b'$, für $r + r'$ den Wert $2a$ und für rr' den Wert b'^2 einsetzt, erhält man den bekannten Ausdruck wieder $\varrho = b'^3 : ab$ (§ 234).

Der Krümmungsradius der Hyperbel wird auf ganz ähnliche Art ermittelt. Im Fall der Parabel ist r' unendlich grofs und daher $2r = \varrho \sin \vartheta$.

262. Ein interessantes Ergebnis in Bezug auf die Focalsehne der Krümmung eines Kegelschnittes erhalten wir durch folgende Betrachtung.[61]) Wir ziehen in dem betrachteten Kegelschnitt eine Sehne QR parallel zu der Tangente im Punkt P, beschreiben den durch die Punkte P, Q und R bestimmten Kreis und verlängern die Focalsehne PL des Kegelschnittes,

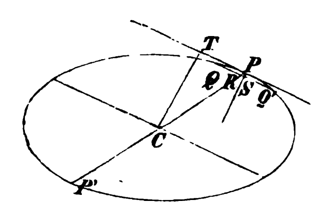


bis sie demselben zum zweiten Mal in C begegnet. Dann

ist nach einer Eigenschaft des Kreises $PS.SC = QS.SR$, und nach einer im § 198. 2) gegebenen Eigenschaft der Kegelschnitte
$$PS.SL : QS.SR = PL : MN.$$
Daher ist für jeden so beschriebenen Kreis $SC:SL = MN:PL$. Da aber für den Krümmungskreis die Punkte S und P zusammenfallen, so ist für ihn speciell $PC = MN$, d. i. *für einen beliebigen Punkt eines Kegelschnittes ist die Focalsehne des Krümmungskreises derjenigen Focalsehne des Kegelschnittes gleich, welche der Tangente jenes Punktes parallel ist.* (237. 4).)

263. Der Krümmungsradius eines Centralkegelschnittes kann auch wie folgt gefunden werden:

Wenn Q ein dem Punkt P unendlich naher Punkt der Curve ist, und QR eine Parallele zur Tangente der Curve in P darstellt, welche die Normale von P in S schneidet; wenn man dann durch die Punkte P und Q einen Kreis beschreibt, welcher die Tangente PT in P berührt, so dafs QS eine Ordinate des Kreises ist für den Durchmesser PS desselben,



so ist das Rechteck aus diesem Durchmesser und dem Abschnitt PS gleich dem Quadrat über der Sehne PQ, oder der Krümmungsradius des Punktes P ist $\varrho = \overline{PQ}^2 : 2PS$. Aber für unendlich nahe Punkte wird PQ zur Tangente und $PQ = RQ$; und weil die Ellipse, unter der Voraussetzung, dafs a' und b' den Durchmesser CP des Punktes P und seinen conjugirten bezeichnen, die Eigenschaft hat, dafs
$$b'^2 : a'^2 = \overline{QR}^2 : PR.RP' = \overline{QR}^2 : 2a'.PR,$$
so ist $a'.\overline{QR}^2 = 2b'^2.PR$, demnach $\varrho = \frac{b'^2}{a'} \cdot \frac{PR}{PS}$.

Durch die Ähnlichkeit der Dreiecke PRS und CPT ist aber stets $PR : PS = CP : CT = a' : p$, und daher endlich der Krümmungsradius $\varrho = b'^2 : p$.

Es ist nicht schwer, zu beweisen, *dafs im Schnittpunkt zweier confocalen Kegelschnitte das Centrum der Krümmung des einen stets der Pol seiner Tangente in Bezug auf den andern ist.*

264. Die Evolute einer Curve wurde (§ 240) als Ort ihrer Krümmungscentra definirt, das Krümmungscentrum C von P ist die Grenze des Schnittpunktes der Normale von P mit der unendlich benachbarten (§ 238). Also ist C der Berührungspunkt jener Normale PC in der Evolute.

Ziehen wir in aufeinanderfolgenden Punkten $P, P_1, P_2, P_3, \ldots$ die Normalen $PC, P_1C_1, P_2C_2, P_3C_3, \ldots$ und nennen $C, C_1, C_2, C_3, \ldots$ die Schnittpunkte der aufeinanderfolgenden Normalen, so sind beim Grenzübergang $C, C_1, C_2, C_3, \ldots$ consecutive Punkte der Evolute, also $P_1C = PC$, $P_1C_1 = P_2C_1$, $P_2C_2 = P_3C_2$, $P_3C_3 = P_4C_3, \ldots$ und $CC_1, C_1C_2, C_2C_3, \ldots$ consecutive Bogenelemente der Evolute. Alsdann ist $CC_1 = P_1C_1 - PC$, $C_1C_2 = P_2C_2 - P_1C_1$, $C_2C_3 = P_3C_3 - P_2C_2, \ldots$ also schliefslich auch durch Summirung aller dieser Elemente der Bogen $CC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \ldots = CC' = P'C' - PC$, d. h. *der Bogen der Evolute ist gleich dem Unterschied der seinen Endpunkten entsprechenden Krümmungsradien.*

Umgekehrt können wir zu einer gegebenen Evolute die Curve erzeugen, wenn einer ihrer Punkte P gegeben ist. Denken von P aus einen Faden gespannt, so dafs er von C bis C' fest an der Evolute anliegt, und ihn, am Ende C' festgehalten, abgewickelt, so beschreibt der Endpunkt die Curve $PP_1P_2 \ldots P_n$.

Jeder von P verschiedene Punkt Q des Fadens beschreibt eine andere Curve, welche ebenfalls die gegebene Evolute als Ort ihrer Krümmungscentra besitzt. *Curven mit gemeinsamer Evolute heifsen Parallelcurven oder äquidistante Curven,* denn offenbar haben je die Punkte auf einer gemeinsamen Normale parallele Tangenten und constante Distanz PQ.

265. *Wenn von einem Punkt einer Ellipse an eine confocale Ellipse zwei Tangenten gezogen sind, so ist der Überschufs ihrer Summe über den zwischen ihren Berührungspunkten enthaltenen Bogen der Ellipse constant.*[62])

Denn, wenn wir einen dem ersten T unendlich nahen Punkt T' in der Curve wählen, und die Perpendikel TR, $T'S$ fällen, so ist $PT = PR = PP' + P'R$, weil PR als die Verlängerung der Geraden PP' angesehen werden kann; ebenso